7. Előadás

k-szerver probléma:

adottak:

-pontok

-d távolságok: $d(x,y)=d(y,x)$

$d(x,y)\geq 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

-háromszög egyenlőtlenség: $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

input:

-pontsorozat

-van k szerver: az igény kielégítésére oda kell küldeni egy szervert, cél minimalizálni a megtett távolságok összegét.

Példa: - $I_n=(a,b)^n$ s_1, s_2:szerverek

+Mohó: Bármit s_1-el szolgál ki

$\text{Mohó}(I_n)=2*n*d(a,b)\rightarrow\infty$

+OPT : s_2-t elküldi $b-be$

$OPT(I_n)=d(b,c)$

+Megj.: Ha a metrikus tér $d(x,y)=1$ $\forall x\neq y$ akkor a lapozási feladatot kapjuk.

Tétel: Tetszőleges legalább $k+1$ pontú metrikus térre nincs k-versenyképesnél jobb online algoritmus adaptív online ellenfél ellen.

Biz: Vegyünk $k+1$ pontot $P_{1,\dots,}$ P_{k+1}

Kezdetben a szerverek $P_{1,\dots,}$ P_k-n vannak.

Input: n db kérés, bármely kérés arra a pontra ahol nincs szerver

$I_n=\varsigma_1,\varsigma_2,\dots,\varsigma_n$ ahol $\varsigma_1=P_0$

Kérdés: Mennyi az online algoritmus költsége: $ONL(I_n)=?$

ς_i-t melyik szerver szolgálja ki?

Válasz: a ς_{i+1} szolgálja ki.

$$\Rightarrow ONL(I_n)=\sum_{i=1}^{n+1} d(\varsigma_i,\varsigma_{i-1})$$

k db algoritmust kell definiálni: $A\lg_i$

kezdetben a szerverek a $P_0,\dots P_{i-1},P_{i+1},\dots,P_k$ pontokban vannak.

Ha $\varsigma_i - n$ van szerver $\rightarrow$ nem cserél semmit.
Ha $\varsigma_i - n$ nincs szerver $\rightarrow$ $\varsigma_{i-1} - el$ szolgál ki.

<u>Lemma</u>: $A\lg_i$ és $A\lg_j$ $(i \neq j)$ szerverei sohasem vannak pontosan ugyanazon a helyen.

<u>Biz</u>: Indukcióval

Kezdetben igaz.

Tfh.: ς_i előtt igaz.

Jön ς_i: <u>$\overline{A\lg_i}$ mozdul és $\overline{A\lg_j}$ nem mozdul</u>: ekkor $A\lg_i$ $\varsigma_{i-1} -$ről indul; $A\lg_j$ $\varsigma_{i-1} - en$ van.

<u>$\overline{A\lg_i}$ és $\overline{A\lg_j}$ nem mozdulnak</u>: triviális

<u>$\overline{A\lg_i}$ és $\overline{A\lg_j}$ mozdulnak</u>: ez ellenmondáshoz vezet, mert mindkettő $P \setminus \varsigma_i$ halmazon lenne.

□

<u>Lemma következmény</u>: $\varsigma_i - n\acute{e}l$ csak egy algoritmus mozdul. □

<u>Biz folytatása</u>: $\sum_{j=1}^{k} A\lg_j(I_n) = \sum_{i=0}^{n} d(\varsigma_i, \varsigma_{i+1}) = ONL(I_n + \text{konstans})$

$\Rightarrow$ $\exists j$, hogy $A\lg_j(I_n) \leq ONL(I_n) + D'$

□

<u>2 SAT probléma</u>: klózok tartalmaznak 2 literált: $(X_1 \vee \neg X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_1)$
véletlenszerű értékadás, majd értékelés(ha minden klóz igaz, akkor találtunk egy megoldást).
Ha egy klóz hamis, akkor véletlenszerűen(1/2 valószínűséggel) valamely változót átállítjuk.
Kérdés: várhatóan hány átállítás szükséges?

Átállítás után mi történik: $P \rightarrow P+1$ és $P \rightarrow P-1$ $\left(P_r \geq 1/2\right)$

állapotok: 1,…,n

legalább ½ valószínűséggel $P \rightarrow P+1$ -be

kilépés: legkésőbb ha elérjük az n-et.

<u>Markov lánc</u>

Adott egy P átmeneti valószínűségi mátrix, és n db állapot.

$$P(X_{t+1} = i \mid X_t = j) = P_{ij}$$

Nincs memória:

$$P(X_{t+1} = i \mid X_t = j, X_{t-1} = k_{t-1}, X_{t-2} = k_{t-2}, \ldots, X_0 = k_0) = P_{ij}$$

Használjuk:

- véletlen algoritmusok elemzésénél.
- Determinisztikus algoritmus átlagos viselkedésénél.
- ládapakolás

DEF: Egy Markov lánc irreducibilis, ha a hozzárendelt gráf egyetlen erősen összefüggő komponens.

DEF: Egy i állapot periódusa a legnagyobb T, hogy $\exists q^0$ és a, melyekre $q_i^{(j)} > 0 \Rightarrow j \in \{a + Tk(k = 1, \ldots, n)\}$.

-aperiodikus, ha $T = 1$.

-Egy Markov lánc aperiodikus ha minden állapot aperiodikus.

DEF: Egy π eloszlás stacionárius, ha $\pi = \pi P$.

DEF: $r_{ij}^{(k)} = P_r(\text{i-ből indulva j-t először a k-adik lépésben érjük el})$.

$$f_{ij} = \sum r_{ij}^{(k)}$$

$$h_{ij} = E(\text{először elérjük j-t}) = \sum_{k=1}^{\infty} r_{ij}^{(k)} * k \text{ ha } f_{ij} = 1.$$

$$= \infty \text{ ha } f_{ij} < 1$$

DEF: ergodikus állapot $h_{ii} \neq \infty$ és aperiodikus.

Markov láncok főtétele:

Ha M egy véges irreducibilis, aperiodikus markov lánc, akkor

- $\forall$ állapot ergodikus
- $\exists$ pontosan egy stacionárius eloszlás
- $h_{ij} = \dfrac{1}{\pi_i}$
- Legyen $N(i,t)$ azon lépések száma az első t lépésből, ahányszor i-ben voltunk. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{N(i,t)}{t} \to \pi_i$

Lemma: $h_{uv} + h_{vu} \le 2m$

Biz: $P_r(uv \to vu) = \frac{1}{d(v)}$

Nemcsak a sorösszeg de az oszlopösszeg is 1. Duplán sztochasztikus mátrix.

Lemma: Ha P duplán sztochasztikus (és irreducibilis ill. aperiodikus) akkor az egyenletes eloszlás stacionárius.

Tétel: Tetszőleges G-re (ami összefüggő és nem páros gráf) a

$$\text{Lefedési idő} \le (n-1)2m$$

Biz: u-ból venni kell egy feszítő fát.

Ennek a feszítő fának a $\text{lefedési ideje} \le \sum h_{uv} + h_{vu}$

Készítette: Tajti András