# 8. Előadás

**Párhuzamos algoritmusok:**

PRAM modell:

CREW - ha többen akarnak írni vagy olvasni, akkor ki teheti?
Exclusive: E, ha az algoritmus biztosítja, hogy egyszerre csak egy processor akarjon írni.

NC osztály:
- $x \in L \Rightarrow$ elfogad
- $x \notin L \Rightarrow$ nem fogad el
- processzorok száma polinomiális x méretében
- lépések száma polilogaritmikus x méretében

NNC: különbség NC-hez képest
- véletlenített algoritmus
- $x \in L \Rightarrow \Pr(\text{elfogad } x) \geq \frac{1}{2}$
- $x \notin L \Rightarrow \Pr(\text{elfogad } x) = 0$

példa: Adott n darab szám és össze akarjuk adni.

Vegyünk n processzort: $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8$

1. lépés: $x_1 + x_2$ ; $x_3 + x_4$ ; $x_5 + x_6$ ; $x_7 + x_8$
2. lépés: $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)$ ; $(x_5 + x_6) + (x_7 + x_8)$
3. lépés: $[(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)] + [(x_5 + x_6) + (x_7 + x_8)]$

log(n) lépésben megkapjuk az eredményt.

Maximális független halmaz gráfokban

G-ben I független ha $a, b \in I \Rightarrow (a,b) \notin E$

**Greedy MIS (mohó):**

$I = \emptyset$
for $v \in V$ (csúcsokon végigmegy)
if $v \notin$ SZOM(I) ahol $\text{SZOM}(I) = \{u \in V, \exists\, p \in I, (u,p) \in E\}$
$I = I \cup \{v\}$

futási ideje: $O(|E|)$ ha a gráf éllistával van megadva.

Lexikografikusan első MIS-t adja.

**Pár MIS (párhuzamosított)**

$I = \emptyset$

while $(G \neq \emptyset)$ // amíg ki nem ürült a gráf

1. Ha $d(v) = 0$, akkor V-t megjelöljük

   Egyébként megjelöljük $\frac{1}{2d(v)}$ valószínűséggel.
2. $\forall\ (u,v) \in E$, ha u és v jelölt akkor a kisebb fokszámú jelöletlen lesz
3. $S = \{$a jelölt pontok$\}$
4. Töröljük G-ből $S \cup SZOM(S)$, $I = I \cup S$.

Lépések száma:

<u>Def</u>: p jó, ha van legalább $\frac{d(v)}{3}$ szomszédja aminek a fokszáma legfeljebb d(v)

<u>Def</u>: p rossz, ha nem jó.

<u>Def</u>: (u,v) él jó ha legalább az egyik végpont jó.

<u>Lemma</u>: Ha p jó, akkor $Pr(\text{p valamely szomszédja jelölt lesz}) \geq 1 - e^{-1/6}$

Biz: $1\text{-}\frac{d(v)}{3}$ fokszám $\leq d(v)$ bármely ilyen pontra $Pr(\text{megjelölve}) \geq \frac{1}{2d(v)}$

$$Pr(\text{egyiket sem jelöljük meg}) \leq \left(1 - \frac{1}{2d(v)}\right)^{d(v)/3} \leq e^{-1/6}$$

felhasználtuk, hogy: $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \to e^{-1}$

<u>Lemma</u>: Ha valakit megjelöltünk, akkor legalább ½ valószínűséggel jelölt marad.

Biz: $Pr(\text{elveszti a jelölést}) = Pr(\exists \text{ egy szomszédja aki jelölt és nagyobb fokszámú})$

$$\sum_{(u,v) \in E,\ d(u) > d(v)} Pr(\text{u jelölt}) = \sum_{(u,v) \in E,\ d(u) > d(v)} \frac{1}{2d(u)} \leq \sum_{(u,v) \in E,\ d(u) > d(v)} \frac{1}{2d(v)} \leq \frac{1}{2}$$

<u>Lemma</u>: Ha v jó, akkor $Pr(v \in S \cup SZOM(S)) \geq \frac{1 - e^{-1/6}}{2}$

<u>Lemma</u>: A jó élek száma $\geq \frac{|E|}{2}$.

Biz ötlete: Irányított gráf

$u \to v$, ha $(u,v) \in E$ $d(u) \leq d(v)$

v rossz akkor teljesül, hogy $d_{ki}(v) - d_{be}(v) \geq \frac{d(v)}{3}$

Ha összeszámoljuk a rossz csúcsok fokszámainak összegét, adódik a lemma.

Tehát A jó élek száma $\geq \frac{|E|}{2}$.

$$\Pr(\text{egy jó él kiesik}) \geq \frac{1-e^{-1/6}}{2}$$

Következésképpen bármely iteráció után, egy konstans faktora az éleknek eltűnik.

**Kiválasztás probléma:**

Van két nem szinkronizált processzor, és közösen ki kell választani egy alternatívát

**Szinkronizált**: lokális érték $B_i$, regiszter $R_i$

Elolvassa $R_i$-t

-ha „pipa” akkor STOP

-ha $R_i$=1, $B_i$=0 , akkor beír „pipa” STOP

-egyébként legyen $B_i$=0 Pr=1/2 valószínűséggel

vagy $B_i$=1 Pr=1/2 valószínűséggel

és beírjuk $B_i$-t

-csere a következőre.

Lehetséges- e $\frac{\text{"pipa"}}{\text{"pipa"}}$ ? Ha igen, akkor egyszerre írtuk be. Ez nem lehetséges!

I:1 és B=0 ->0 amiből következik, hogy II nem írhat „pipa”-t.

$B_1 \neq B_2$ akkor utána megáll 2 lépésben.

T lépésen belül nem teljesül $(\frac{1}{2})^t$

**Aszinkron:**

$R_i,\ T_i$

$C_1 = <0,0>$

$C_2 = <0,0>$

játékosok: $B_i = 0,\ t_i = 0$

kezdetben megy az egyik regiszterhez , majd lezárja

-Ha „pipa” STOP

-Ha $t_i < T_i$ akkor $t_i = T_i \quad B_i = R_i$

-Ha $t_i > T_i$ akkor beír „pipa”

-Ha $t_i = T_i$ és $R_i = 1\ B_i = 0$ akkor beír „pipa” STOP

-Egyébként $t_i = t_i + 1$ , $T_i = T_i + 1 \rightarrow$ véletlen $B_i$ és beír „pipa”

**Byzantine megegyezés:**

Adott: N db processzor 0 vagy 1 döntéssel ; t < n/8, t rossz processzor.

Olyan protokollt keresünk, amelyre igaz, hogy

-ha minden jó processzor ugyanazt a döntést hozza akkor az legyen végleges

-ha a jók kezdetben különbözőket hoznak akkor legyen egy egységes döntés.

Algoritmus:

$$H = \frac{5}{8}n + 1 \quad L = \frac{6}{8}n + 1 \quad G = \frac{7}{8}n$$

$\forall$ processzor $= b_i$

- vote $= b_i$

-elküldjük $\forall$ processzornak a vote-t(szavazást)

-maj = a többsége a legelső szavazatoknak

-tally = hányszor szerepel a többségi

Ha $\text{tally} \geq G$ , akkor vote=maj

Else Ha $\text{fej} \Rightarrow \text{Res} \quad H$

$\text{írás} \Rightarrow \text{Res} \quad L$

Ha $\text{tally} \geq \text{Res}$, akkor vote =maj

Tally<Res , akkor vote=0.

Készítette: Tajti András