

Optimalizálás

A Számítógépes Optimalizálás Tanszék ilyen néven 2008 óta szerepel, korábban az Alkalmazott Informatika Tanszék nevet viselte. Ilyen szervezeti egység több is volt, kissé eltérő profillal. Az Informatika Tanszékcsoport kialakulása során a főként a korábbi Kibernetikai Laboratórium kutatási feladatokat végző munkatársaiból állt. A 2008-as névadás annak a következménye volt, hogy eddigre kialakult és letisztult az oktatási és kutatási profil, amely a leginkább a numerikus módszerek és az operációkutatás tárgyainak tanítását jelentette az oktatók saját kutatási érdeklődésének megfelelő részterületek művelésével.

A bemutatandó néhány kutatási terület az utóbbi 1–2 évtized munkáját jellemzi. Erre az időszakra esik néhány kollégánk PhD értekezés megvédése, mind az egyetemünkön történt:



Bánhelyi Balázs: Dinamikus rendszerek kaotikusságának és stabilitásának vizsgálata megbízható számítógépes módszerekkel, 2007

Blázsik Zoltán: Domináló csúcsok szerepe hálózati folyamatok tervezésében, 2008



Szabó P. Gábor: Egybevágó körök pakolásai négyzetben – korlátok, ismétlődő minták és minimálpolinomok, 2005

Vinkó Tamás: Globális optimalizálási módszerek továbbfejlesztése, tesztelése és alkalmazása atomklaszter feladatokra, 2006

Született egy MTA Doktora fokozat is: Csendes Tibor: Reliable optimization, methods and applications, 2007.

Módszertani fejlesztések az optimalizálásban

Talán ez a kutatási téma volt a legnagyobb volumenű, és a tanszéki kutatások nagy része besorolható ide. Nagyon gyakori gyakorlati feladatok megoldása során, hogy a vizsgált rendszer működését szabályzó föltételek teljesülése mellett a valamilyen szempontból legkedvezőbb viselkedés paraméterezését keressük. Amennyiben a föltételi függvények vagy a célfüggvény valamelyike nemlineáris, akkor nemlineáris optimalizálási feladatról beszélünk. Gyakran a nemlinearitás nem az egyetlen gond, de a megoldások között számos helyi optimum is lehet. Ebben az esetben globális optimalizálási feladatot kell megoldanunk. Évtizedekkel ezelőtt ez a feladat olyan nehéznek számított, hogy

a nemlineáris optimalizálási monográfiák föl sem vetették az összes, vagy a legjobb helyi szélsőérték meghatározásának problémáját.

Az utóbbi évtizedek nagy fejlődéséhez a tanszékünk is hozzájárult. Így kidolgoztunk egy olyan sztochasztikus globális optimalizálási eljárást GLOBAL néven, amely hatékonyan képes jó közelítést adni a globális szélsőértékre és a globális minimumpontra. Ennek jelenleg elérhető FORTRAN és Matlab implementációja. Az algoritmust több cikkben is összehasonlítottuk korszerű hasonló módszerekkel, és dokumentáltuk azon feladatok körét, amelyekre eredményesen és jó hatékonysággal használható. A programcsomagot több ezren letöltötték már, többek között vezető kutatóhelyekről, és neves ipari alkalmazók is. A 80-as években fejlesztett algoritmus legutóbb 2008-ban igazolta, hogy tartja a lépést megbízhatóság és hatékonyság terén a közben kifejlesztett divatos módszerekkel.

A másik nagy fejlesztési irány az intervallum aritmetikán alapuló megbízható globális optimalizálási eljárás fejlesztése volt. Ezek a módszerek valós függvények kiértékelése helyett úgy nevezett befoglaló függvényeket használnak, amelyek az argumentumokat egy több dimenziós intervallumon értelmezve korlátot tudnak adni a vizsgált függvény értékészletére. A módszer használhatósága nyilván a korlátok minőségén múlik. Az utóbbi évtizedek fejlődésére támaszkodva olyan algoritmust dolgoztunk ki, amely általános problémaosztályon képes a globális optimum meghatározására kivárható számítási idő alatt. A függvények kiértékelése 4–35-ször több időbe kerül intervallumos formában, mint a hagyományos valós függvény kiszámítása lebegőpontos számokkal. A megbízható optimalizálás ugyan általában nagyobb műveletigényű, mégis vannak olyan feladatok, amiket ezzel a fejlettebb módszertannal gyorsabban lehet megoldani. A fejlesztés során tisztáztuk az intervallumok fölosztási irányának legkedvezőbb megválasztási módját, valamint azt, hogy a földolgozás alatt álló részintervallumokból melyiket érdemes ahhoz kiválasztani a további földarabolás céljából, hogy a teljes módszer hatékonysága a lehető legjobb legyen.

Vinkó Tamás a Bécsi Egyetemen dolgozó kollégáinkkal összeállított egy olyan nagy méretű nemlineáris optimalizálási tesztrendszerrel, amelynek segítségével megbízhatóbban lehet a korlátozás nélküli, a korlátozott optimalizálási feladatokat megoldó, és a tisztán adott korlátokat kielégítő pontokat megkereső algoritmusokat összevetni.

Káosz keresés

A káosz hétköznapi jelenségek körében a kiszámíthatatlanságot, a rendetlenséget jelenti. A differenciálegyenletekkel leírt dinamikus rendsze-

rek esetében akkor beszélünk káoszról, ha a kezdőpont tetszőlegesen kis megváltoztatása is eredményezhet bármilyen kimenetelt a megoldásban később. Numerikus szempontból ez épp a kezelhetetlenség szinonimája. Számos dinamikus rendszer volt ismert, amelynek a kaotikus viselkedésére jeleket lehetett fölismerni, de a kaotikusságot mégsem igazolták. Ilyen volt például a nagyon egyszerű Hénon leképezés: $H(x,y) = (1+y-1,4x, 3x)$. A káosz léte bizonyításához az úgy nevezett Smale-patkót kellett megkeresni: egy egyszerű geometriai tulajdonságokat fölmutató halmazt a vizsgált tartományban. A keresésre az általunk korábban fejlesztett sztochasztikus globális optimalizálási eljárásra, és az intervallum aritmetikán alapuló korlátozás és szétválasztás módszerre is szükség volt. Ezekkel sikerült igazolni az Hénon leképezés számos iteráltjának kaotikusságát, és egy fajta katasztert, általános leírást tudtunk adni a leképezés viselkedésére.

A káosz keresése során virtusból minél egyszerűbbnek ismertről érdekes kimutatni a kaotikusságot. J.H. Hubbard 1999-ben az American Mathematical Monthly-ban közölt cikkében a kényszerrezgéses fékezett inga viselkedésének kaotikusságára utalt, de bizonyítani nem tudta. Garay Barnával és Hatvani Lászlóval teljes körű bizonyítást adtunk 2008-ban erre. Az új eredmény a napilapokba is belekerült, többek között az Index és a Frankfurter Rundschau is említette.

Dinamikus rendszerek megbízható módszerei

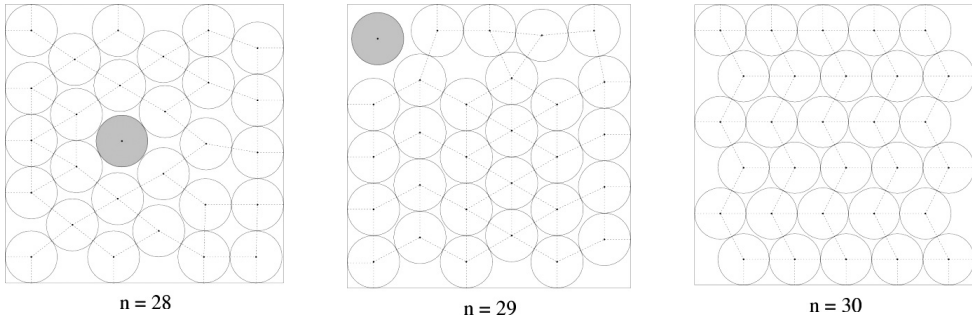
A káosz keresése és igazolása céljából kidolgozott megbízható számítógépes eljárásoknak késleltetett differenciálegyenletek megoldására is alkalmas változatát adta meg Bánhelyi Balázs. Ezt közvetlenül az $y'(t) = -\alpha (e^{y(t)} - 1)$ késleltetett differenciálegyenletre vonatkozó, E.M. Wrighttól származó közel 60 éves sejtés igazolására használtuk föl. Hardy és Wright híres számelméleti könyvével szokták matematikai könyvtárak minőségét mérni (ha megvan a kötet, akkor jó). A bizonyítás szétválaszthatatlanul egy elméleti eredmény és egy garantált megbízhatóságú számítógépes becslési séma együttes alkalmazása révén vált lehetővé. A sejtés maga egy számelmülethez és közgazdasági alkalmazásokhoz kapcsolódó késleltetett dinamikus rendszer, amire Wright azt sejtette, hogy a modell α paramétere 1.5 és $\pi/2$ közti értékeire is nullához tart a megoldás. Wright ezen intervallum kis részére igazolta az állítást, egy további szakaszra sejtette, hogy a módszere működik, de a zöme az intervallumnak évtizedekig nyitott volt.

A sejtésben szereplő nyitott intervallum több, mint 99%-ára sikerült igazolni a sejtést. Ugyan további számítások árán tovább javítható ez az arány, de sajnos az összeállított módszer láthatóan nem lehet képes a teljes intervallumon igazolást adni. A dinamikus rendszerek matematikai bizonyító erővel való megoldhatóságát illetően mégis nagyon biztató az eredmény, hiszen a késleltetett rendszerek végtelen dimenziós közönséges differenciálegyenleteknek felelnek meg. Az is a számítógépes eljárás kifinomultságát jelzi, hogy az eredeti sejtésnek van olyan megfogalmazása, amelyben olyan végtelen elemszámú összegek, sorok nulla voltának bizonyítását jelenti, amelyeknek tagjai váltakozó előjellel, de exponenciálisan nőnek. Ez a szokásos számítógépes architektúrákon nyilvánvalóan kezelhetetlen.

Körpakolás

Egyszerűen megérthető feladat adott számú egybevágó körnek a legsűrűbb elhelyezése az egységnégyzetben. Nyilván nem engedjük meg a körök átlapolását, és a négyzet határát is csak érinthetik a körök, de nem érhetnek azon túl. A probléma a diszkrét geometriai feladatok közé tartozik. Már a kilencvenes évek elején kísérletet tettünk sztochasztikus, majd intervallum aritmetikára alapozott megbízható módszerrel is a legkedvezőbb konfigurációk meghatározására. Az első megközelítés viszonylag gyorsan jó közelítő eredményt tud szolgáltatni, számos tudományos közlemény jelent meg e témában, és egy internetes adatbázis is elérhető a Packomania oldalain. Az első megbízható, matematikai bizonyítóerővel rendelkező eredményeinkre viszont sokat kellett várni. A feladat természetes megfogalmazási formája reménytelenül nehéz volt az ilyen korlátozás és szétválasztás típusú módszereknek. Az áttörést a 2000-es évek elején ismert legkorszerűbb trükkök (mint az ún. csempézés) bevetése és ezek gondos implementálása hozta meg. A 28–30 kör elhelyezésére vonatkozó eredményünket elsőként értük el, és azóta sem sikerült az ennél nehezebb, magasabb körszámmal járó esetek megoldása – bár a módszertant is leíró könyvünkhöz mellékeljük a programjaink kódját.

A körpakolási feladatokkal kapcsolatban számos részeredményt is publikáltunk, így az ún. rácspakolásokról (amelyek jól szerkeszthetők, és így könnyebben alkalmazhatók), valamint a körpakolási feladatok és egyes egész együtthatós magas fokszámú polinomok gyökei közti összefüggésről. Később Bánhelyi Balázs és Lévai Balázs sikeresen foglalkozott a körökkel való legritkább fedéssel is.



1. ábra. 8, 20 egybevágó, maximális sugarú kör pakolása a négyzetbe.

A szürke színnel jelzett körök szabadok, tehát ezek kis mozgátása mellett is megmarad az optimalitás.

Az 1. ábrán is látható szabad körök az amúgy is reménytelenül nehéz feladat megoldásának további keménységét jelzik, hiszen ezek létezése azt jelenti, hogy globálisan optimális pontból nem csak hogy végtelen sok van, de ezek mértéke pozitív is.

Gráfmenti adatbányászat

A fő cél a komplex pénzügyi modellek felépítésnek a támogatása volt. A predikció egy megfelelően felparaméterezett tranzakciós (fraud esetén metszet) gráf fertőzési modelljén történhet. Ehhez a következő problémákat vizsgáltuk, illetve oldottuk meg: a ritka gráfszerkezetre kiterjesztett regularitási vizsgálatok, mely felhasználható a különböző módszerekkel generált véletlen gráfok felbontására. A gráfok felépítése (az OTP és Complex adatbázis szűrése, transzformációja). A megfelelő paraméterek kinyerése, statisztikák és főként a közösségkeresés algoritmikus vonatkozásai. A közösségkereső algoritmusok egyéb (nyelvészeti) alkalmazása. A fertőzés szimulációkon és approximációkon alapuló hatékony kiszámítása. Ezen belül a részleges és teljes szimulációk a teljes kezdeti eloszlás transzformálására és a lineáris algebrai modell sebességének/pontosságának a vizsgálata a különböző modellekre. Tanuló algoritmus kifejlesztése, amely a múltbeli adatok alapján meghatározza az élfertőzési valószínűségek értéket a relevánsnak ítélt paraméterek függvényében (inverz fertőzési modell). A fenti eredmények módszertanná alakítása, esettanulmány az OTP KKV szektor cégeinek kredit default valószínűségek becslésére, amely felülmúlja/kiegészíti a korábbi egyedi statisztikán alapuló módszereket.

Folyamatszintézis

Friedler Ferenc és L.T. Fan egy speciális páros gráffal modellezte a vegyipari folyamatokat. Ennek alkalmazási területei szélesítésében, valamint elméleti vizsgálataiban több szegedi kutató vett részt, a tanszékünkéről Blázsik Zoltán és Kovács Zoltán. A leírás lényege, hogy a folyamatokban résztvevő anyagok egy-egy bemeneti részhalmazából feldolgozó egységek előállítanak egy-egy kimeneti részhalmazt. Szegeden főleg a gyártani kívánt anyagok, nyersanyagokból történő optimális előállítását vizsgáltuk, csak a feldolgozó egységek működési költségeit tekintve. Kiderült, hogy a PNS ezen speciális formája egy fontos NP-teljes probléma, így számos egészen eltérő tudományterületen is sikerrel alkalmazható. A kombinatorikus bonyolultság miatt heurisztikus algoritmusokat terveztünk és jól-megoldható probléma osztályokat definiáltunk.

Hálózatos optimalizálás

Az utóbbi évek divatos kutatási területe a nagy méretű hálózatok vizsgálata, és ezen belül is a hálózati jellegű rendszerek működésének optimalizálása. Ide tartoznak a pletyka alapú teljesen elosztott számítási rendszerek és a peer-to-peer rendszerek, amelyekkel hatékony és eredményes adattárolás valósítható meg. Ilyen a BitTorrent közösség rendszere, amelynek belső jutalmazási rendszerének optimális beállításával foglalkozott Vinkó Tamás. Tekintettel az ilyen jellegű szolgáltatások gyors terjedésére, a nyitott vezérlési, befolyásolási kérdések megválaszolása fontos. A hálózati alapú optimalizálás drámai hatással rendelkezhet az érintett szolgáltatás hozzáférési sebességére, a letöltések sebességére.

Lazán ide köthetők azok a vizsgálataink is, amelyek keretében a gráffal megadott összefüggések segítségével a minőség kimutatására tettünk kísérletet tudományometriai, illetve borkóstolási adatokra alapozva. Az első esetben az összefüggést nyilván a cikkek hivatkozásai adták. A borkóstolás esetén pedig a természetesen adódó páros gráfra alkalmazott ésszerű súlyozással adódó hálózatra alkalmaztunk PageRank, illetve HITS típusú algoritmusokat. Az első empirikus eredményeink kifejezetten biztatók: sikerült Egerváry Jenő híres magyar nyelvű cikkének fontosságát alátámasztani, illetve több borfesztivál adatai alapján plauzibilis, a vártnak megfelelő rangsort sikerült találni a tesztekben résztvevő szakértők között.

Szimbolikus módszerek az optimalizálásban

Optimalizálási feladatok megoldása során gyakran érdemes a feladat kedvező ekvivalens alakjait megkeresni, mert a megoldás minősége, megbízhatósága és műveletigénye szempontjából lényegesen jobb formák is lehetnek. Egy 1993-as ötlet alapján Antal Elvira doktorandusz és Virágh János megalkotott egy olyan implementációját az eredeti javasolt algoritmusnak, amely Maple számítógépes algebra rendszerre támaszkodva képes volt egyszerűsíthető optimalizálási feladatok automatikus átalakítására. Az eredeti módszer ugyan olyan lépésekkel dolgozott, amelyek mind megoldhatók voltak ilyen szimbolikus számítási környezetben, de számos technikai részlet nyitott volt. Ez a magyarázata annak is, hogy a Maple implementációban jelentkező olyan hibákat, amelyeket a Maple hibás vagy nem teljes eljárásai okoztak, a hasonló Mathematica rendszerben való újra telepítés meg tudta szüntetni. Az átalakítás képes kimutatni a képletekben meglévő redundanciát, megadva azt az összefüggést, amelynek a behelyettesítésével a feladat dimenziója csökkenthető – miközben az eredetivel ekvivalens problémát kapunk, tehát a helyi minimumhelyek egymásnak egyértelműen megfeleltethetők a régi és az új alakra vonatkozóan.

Jelenleg olyan eljárásunk van, amely lényegében minden olyan feladatot tud egyszerűsíteni, amelyre az eredeti algoritmust tervezték. Van lehetőség további kiterjesztésre is, és előttünk áll még a hálózati változat kidolgozása, és olyan átíró rendszer kifejlesztése, amely képes az intervallum aritmetikán alapuló befoglaló függvények közül azt javasolni, amely a legkisebb túlbecslést adja az értékkészlethez képest.

Ipari projektek



A Számítógépes Optimalizálás Tanszék alkalmi jelleggel korábban is foglalkozott ipari, illetve gazdasági problémák megoldásával. Ez a fejlesztési, alkalmazott kutatási, vagy innovációs munka az utóbbi években megerősödött. Az első fázisban közvetlen megkeresések nyomán kerültünk kapcsolatba a megbízókkal, később zömében a KNRET által szervezett munkákat végeztünk részben az innovációs járulék, részben a GOP pályázatok támogatásával. Ezen lehetőségek háttérbe szorulásával, illetve lényegében az eltűnésükkel a megbízások darabszáma is és volumene is csökkent. Ennek ellenére számos korábbi megbízónk keresett meg bennünket ismételten. Erre külön büszkék vagyunk, és persze minden projekt esetén gondot fordítottunk arra, hogy a vállalkozások elégedettségéig vigyük az adott megbízás teljesítését.

Az ilyen alkalmazott kutatási projektek szerződéskötését, a kapcsolódó eljárások tervezését, a munka irányítását valamint a megbízóval való egyeztetést oktatók végezték; az implementálást, az adatok előkészítését, az algoritmusok tesztelését és alkalmazását pedig hallgatók. Ez a szerkezet nagyon sikeresnek bizonyult, volt időszak, amikor a tanszékcsoporthoz köztársasági ösztöndíjas hallgatói egy kivételével mind a tanszékünk ipari projektjein dolgoztak. Ennek nyilvánvaló oka az volt, hogy a kapott feladatok sokrétűek voltak, érdekes matematikai modellezési és algoritmus fejlesztési részfeladatokat jelentettek.


LED alapú közvilágítás. Az egyik legérdekesebb feladatunk olyan világítótest tervezése volt, amely kihasználva a LED-es világítótestek hatékonyságát, a közvilágítás számára olyan összetett világítótestet ad meg, amely az érvényes törvényi szabályozásnak megfelelő, gazdaságilag és a működés szempontjából kedvező megoldást kínál. A kapcsolódó nemlineáris optimalizálási feladat ijesztőnek tűnt, hiszen 2–300 változós térben erősen nemlineáris célfüggvényt kellett minimalizálni súlyos korlátozó feltételek mellett. A megoldásra talált kombinált eljárás háztartási laptop számítógépen kb. fél óra alatt adott a véglegeshez nagyon közeli minőségű megoldást, fél nap alatt pedig tovább már más eszközzel sem javítható közelítést lehetett vele kapni. Vizsgáltuk a grafikus processzorok kínálta párhuzamosítás előnyét (tetemes), és érzékenységvizsgálattal biztosítottuk, hogy az ajánlott megoldások kissé eltérő feladatra is jó eredményt szolgáltatnak. A fejlesztés eredményét a megbízó szabadalmaztatta is, az eredetiség-vizsgálat arra jutott, hogy az alkalmazott eljárások közül a mi optimalizálási módszerünk volt eredeti. Az első világítótesteket legyártották, ezeket Tatabányán üzembe is helyezték. Az elvégzett munkából díjazott tudományos diákköri dolgozat is született.

Időalapú villamosjegy hatásvizsgálata. A Szegedi Közlekedési Társaságtól kaptuk a megbízást, hogy tisztázzuk az időalapú menetjegyek bevezetésének hatását a vállalat fő eredményességi mutatóira. A megoldáshoz mikroszimulációt alkalmaztunk a szegedi tömegközlekedés előzetesen kidolgozott, és 2 utasszámlálási vizsgálat eredményéhez igazított modelljére. A város szociológiai modelljét és részletes menetrendjét felhasználva megadtunk olyan sztochasztikus modellt, amely az elvárható pontossági határon belül helyesen volt képes szimulálni egy-egy nap bekövetkező tömegközlekedési terhelését. Az alkalmazott mikroszimulációs eljárás ezután meg tudta mutatni a hatását a különböző ésszerűnek tűnő időalapú jegyek hatásának. Az eredményünk tömören összefoglalva az lett, hogy tudtunk olyan konstrukciót mutatni, amellyel mind az utasok száma, mind a megtett utaskilométer, mind a bevétel

nőtt. A szegedi tömegközlekedés meglévő jegyértékesítő eszközei különben azonnali bevezetést is lehetővé tesznek: bízunk benne, hogy hamarosan sor kerülhet az időalapú jegyek bevezetésére. Az elvégzett munkából OTDK II. díjas dolgozat is született.

Minimális szenzorrendszer hiba előrejelzéséhez. Az Antarktisz Kft. megbízásából kritikus alkalmazási környezetben (pl. műtőkben) működő klíma- és szellőztető rendszerek időben való karbantartásához dolgoztunk ki olyan érzékelő rendszert, amely  minimális számú érzékelő alkalmazásával képes helyes korai előrejelzésre,  az üzemkiesések időtartamát, és az okozott kárt érdemben lehet csökkenteni. A projektet a Műszaki Informatika Tanszékkel közösen valósítottuk meg. A munka első fázisában egy tesztrendszert alakítottunk ki, számos érzékelő egységgel típus és elhelyezés szempontjából. Meghatároztuk a jellemző hibatípusokat, és megvalósítottuk azok mesterséges kiváltását. Ezután vizsgáltuk az érzékelők jeleinek olyan értelmes tömörítési formáit, amelyek alkalmasnak tűntek a keresett jelenségek korai fölismerésére. Miután sikerült elérni az elvárható érzékenységet, és korai előrejelzési képességet, a szenzorok olyan részhalmozait kerestük, amelyek képesek maradnak az elvárt tucatnyi hiba előrejelzésére, de a lehető legkisebb darabszám és alkalmas elhelyezés révén hatékonyan használhatók. Az elvégzett munkából díjazott tudományos diákköri dolgozat is született.





Mobil telefonos alkalmazás NFI alapú azonosítók fölismerésére. Értékes termékek, értékpapírok eredetiségének igazolására egy új technológia természetes módon kialakított egyedi azonosítót használ (Natural Feature Identification): homogén festékbe kevert csillámló részecskék véletlen elhelyezkedése ad erre lehetőséget. Ezeknek a címkéknek a profi fölismerése persze megoldott, de a módszertan elrettentő erejét lényegesen lehet növelni azzal, ha egy egyszerű mobiltelefon kamerája segítségével is lehet adni egy kevésbé megbízható, de a figyelmeztetésre alkalmas eredményességű jelzést. Ezt a módszert dolgoztuk ki a Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszékkel közösen. A megbízó által kitűzött célt sikerült elérni, a továbbfejlesztés ügyében épp a napokban kerestek meg ismét.

Vállalti ítási rendszer és termelés ütemezés. A leghosszabb ideig tartó együttműködésünk egy autóiipari beszállító multival volt. Az első feladatunk a gyártósor ütemezésének optimalizálása volt. A különféle gyártmányok előállítási sorrendje az átállás ideje és költsége miatt fontos. A kidolgozott algoritmusunk valós időben volt képes a művezető döntését jó minőségben

támogatni, kritikus esetben akár kiváltani is. A teljes gyártást szimuláló modellünkkel lehetővé vált havária helyzeteket előre tanulmányozni, és a gépsorok kiegészítését ennek megfelelően tervezni. A kifejlesztett algoritmus kiválóan alkalmas volt az üzem auditálása során való használatra is. A legnagyobb volumenű munkánk több részüzem gyártásirányítási munkáit támogató vezetői információs rendszer volt. A korábbi esetleges, több program formátumát alkalmazó módszertan helyett a folyamatirányítás korszerű módszereit figyelembevevő, autentikált, naplózott, a jogosultságoknak megfelelően fölépített rendszer a vállalatirányítás minőségét érdemben tudta javítani. A munka által megkívánt adatszolgáltatás sokat jelentett a cég középvezetőinek is a tényleges információáramlás megismerésével és a korábbi hibák elkerülésével.

Az itt leírt újabb projektjeinken túl a korábbiakról tömör leírás érhető el a cikkünk végén megadott internetes linkek között.

Irodalomjegyzék

- B. Bánhelyi, T. Csendes, B.M. Garay, and L. Hatvani: A computer-assisted proof for Sigma_3-chaos in the forced damped pendulum equation. *SIAM J. on Applied Dynamical Systems* 7(2008) 843–867
- B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin, and A. Neumaier: Global attractivity of the zero solution for Wright’s equation. *SIAM J. on Applied Dynamical Systems* 13(2014) 537–563
- Z Blázsik, Cs Holló, B Imreh, Cs Imreh  Kovács: On bottleneck and k-sum versions of the Process Network Synthesis problems. *Novi Sad Journal of Mathematics* 30(2000) 11–19
- T. Csendes and D. Ratz: Subdivision direction selection in interval methods for global optimization, *SIAM J. Numerical Analysis* 34(1997) 922–938
- I. Heckl, Z. Kovacs, F. Friedler, L.T. Fan  Liu: Algorithmic synthesis of an optimal separation network comprising separators of different classes. *Chemical Engineering and Processing* 46(2007) 656–665
- A. Neumaier, O. Shcherbina, W. Huye  Vinkó: A comparison of complete global optimization solvers. *Mathematical Programming* 103(2005) 335–356
- A. Pluhár: Greedy colorings of uniform hypergraphs. *Random Structures and Algorithms* 35(2009) 216–221
- P.G. Szabó: Optimal substructures in optimal and approximate circle packings, *Beitr  zur Algebra und Geometrie* 46(2005) 103–118

- P.G. Szabó, M.Cs. Markót, T. Csendes, E. Specht, L.G. Casado, and I. García: New Approaches to Circle Packing in a Square – With Program Codes. *Springer*, Berlin, 2007.
- T. Vinkó, F. Santos, N. Andrade, and M. Capotă. On swarm-level resource allocation in BitTorrent communities. *Optimization Letters*, 7(2013) 923–932

Kapcsolódó internetes linkek

- Packomania: www.packomania.com
- Ismertető hír a Wright sejtés igazolásáról: http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/szegedi_hirek_131206.avi.mp4
- Egy szabadegyetemi előadás a megbízható számítógépes eljárásokról: <http://www.u-szeged.hu/szabadegyetem-szeged/vii-szemeszter/megbizhato-szamitogepes?objectParentFolderId=16164>
- És egy másik érdekes optimalizálási problémákról: <https://www.u-szeged.hu/szabadegyetem-szeged/xiii-szemeszter/erdekes-optimalizalasi?objectParentFolderId=24714>
- Egy körpakolási applet: <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/pack.html>
- A Számítógépes Optimalizálás Tanszék ipari projektjeinek egy kicsit régi ismertetője: http://www.inf.u-szeged.hu/tanszekek/alkalmazott-informatika/inf_ipari_proj.xml
- A kényszerrezgéses inga kaotikusságáról szóló rádió interjú: <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/Hatvani.mp3>
- A sztochasztikus GLOBAL és egy intervallum aritmetikán alapuló korlátozás és szétválasztás algoritmus letölthető több nyelven: <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/Reg/regform.php>

