

# AZ OPTIMALIZÁLÁS ALKALMAZÁSAI

Csendes Tibor



Szeged, 2018.

## Előszó

A jelen jegyzet a Szegedi Tudományegyetemen 2004-től tartott Az optimalizálás alkalmazásai című tárgy anyagát tartalmazza. A tárgy heti két óra előadást és egy óra gyakorlatot jelent.

A jegyzet az operációkutatás, lineáris algebra, kalkulus és numerikus matematika témáira támaszkodik. Aktuális változata egy része, a hozzá kapcsolódó feladatok, gyakorlatok és adataik elérhetők a

<http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/optalk.pdf>

címen.

A tárgy olyan tudást kíván adni, amely elegendő egyszerűbb optimalizálási, operációkutatási munkák elvégzéséhez, és amelyet önálló gyakorlással továbbfejlesztve egy-egy ilyen feladat teljes megoldását meg lehet találni. Mivel az érintett eljárások, programcsomagok gyakran változnak, az anyag főleg az állandó vagy kevésbé változó ismereteket tartalmazza.

A rendelkezésre álló rövid idő (kb.  $14 \times 3$  óra) nem elég a teljes körű tárgyalására, ezért a legfontosabb definíciókat, összefüggéseket és az elméletet az érintett eljárások tárgyalása előtt csak a feltétlenül szükséges terjedelemben ismertetjük. A teljesen önálló optimalizáláshoz ez persze nem elegendő. Ennek ellenére bízom benne, hogy a tárgyalt anyag segít a leggyakoribb hibákat elkerülni, és a viszonylag könnyen kezelhető programok segítségével (támaszkodva a mind több esetben rendelkezésre álló readme fájlokra, súgó, tanácsadó varázslókra) önálló munkával is lehetséges a további szükséges modellek és eljárások megismerése. A teljes itt közreadott anyag több, mint amit egy féléves kurzusban át lehet adni, ez némi rugalmasságot követel az előadótól, illetve a gyakorlatvezetőtől.

További cél segítséget nyújtani az optimalizálási, operációkutatási vizsgálatokhoz olyanok számára is, akik ezt a hagyományos képzés keretében nem tanulták. Így a jegyzet alapján az egyszerűbb feladatok esetén az olvasó elegendő útmutatást kap ahhoz, hogy a feladatát úgy fogalmazzon meg, illetve írja át, hogy az a rendelkezésre álló szoftverrel hatékonyan megoldható legyen.

A kreditrendszerre való áttéréssel megváltozott a tantárgyak teljesítésének feltétele is. A félreértések, tévedések elkerülése céljából hasznos előre áttekinteni az Informatikai Intézet vendégoldalán hogy mi mindent kell ahhoz teljesíteni, hogy a vizsgára bocsáthatósági szintet el lehessen érni.

Itt mondok köszönetet korábbi hallgatóimnak és munkatársaimnak a jegyzet létrejöttéhez, illetve a javításához nyújtott segítségükért. Várom a további véleményeket és javaslatokat is. A tananyag az EFOP-3.5.1-16-2017-00004 pályázat támogatásával készült.

Szeged, 2018. szeptember

*a szerző*



## Jelölések

Itt a legfontosabb, szinte mindig a megadott formában használatos jelöléseket adjuk meg, de ezektől helyenként – ahol a tárgyalás ezt megköveteli – eltérhetünk.

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| $AD$                          | automatikus differenciálás   |
| $\alpha$                      | intervallum sorozatok konvergencia rendje  |
| $c(X)$                        | a központi alak alappontja az $X$ intervallumban                                   |
| $f(x)$                        | a célfüggvény  |
| $f(X)$                        | a célfüggvény értékkészlete az $X$ intervallumon                                   |
| $F(X)$                        | a célfüggvény befoglaló függvénye az $X$ intervallumon                             |
| $F'(X)$                       | az egyváltozós függvény deriváltja befoglaló függvénye                             |
| $f(x^*)$                      | a globális minimum értéke  |
| $\tilde{f}$                   | intervallumos optimalizálási módszerben a globális minimum aktuális felső becslése |
| $g_i(x)$                      | egy feltételi függvény   |
| $H(x)$                        | a célfüggvény Hesse-mátrixa  |
| $H(X)$                        | a célfüggvény Hesse-mátrixa befoglaló függvénye                                    |
| $\mathbb{I}$                  | a kompakt intervallumok halmaza  |
| $\mathbb{I}^n$                | az $n$ -dimenziós kompakt intervallumok halmaza                                    |
| $m(X)$                        | az $X$ intervallum középpontja   |
| $\nabla f(x)$                 | a célfüggvény gradiense  |
| $\mathbb{R}$                  | a valós számok halmaza   |
| $\mathbb{R}^n$                | az $n$ -dimenziós valós vektorok halmaza   |
| $x, y, \dots$                 | változók   |
| $X, Y, \dots, A, B, \dots$    | intervallumok vagy mátrixok  |
| $\underline{X}, \overline{X}$ | az $X$ intervallum alsó és felső korlátja, $X = [\underline{X}, \overline{X}]$     |
| $x^*$                         | a globális minimumpont   |
| $w(X)$                        | az $X$ intervallum szélessége  |



# 1. fejezet

## Bevezetés

Optimalizálási feladatok a mindennapi élet számos területén előfordulnak, főleg a mérnöki, gazdasági alkalmazások területén, de természetesen a tudományos kutatásban is. Ide tartoznak azok a problémák, amelyekben a kérdésfeltevés a következő sémát követi: mikor lesz minimális egy mennyiség, melyik esetben optimális egy beállítás, milyen paraméterek mellett lesz maximális egy együttható értéke stb. Gyakorlati esetben a hasonló kérdések úgy hangzanak például, hogy: mikor lesz a legnagyobb a profit, ha különben adott termelési feltételeknek elegetteszünk, mely esetben lesz minimális a költsége egy beruházásnak, miközben előírt mennyiséget gyártunk, és a lehetséges megoldásainkat feltételek korlátozzák.

Az optimalizálás a matematika, azon belül az operációkutatás, vagy más szempontból a numerikus matematika része. Érintkezik a számítástudománnyal, és van számítástechnikai vetülete is. Az operációkutatás mint önálló tudományterület a múlt század közepétől létezik, és számos közös részterülete van az alkalmazott matematikával. Az OR Today című szakmai folyóirat egy korábbi felmérése szerint az Amerikai Egyesült Államokban az operációkutatási szakemberek álláskilátása volt a negyedik legjobb a vizsgált nagyon sok szakma közül.

A finomabb kategorizálás szerint a globális optimalizálás a nemlineáris optimalizálás, vagy más néven a matematikai programozás témaköréhez tartozik. Az utóbbi név a lineáris programozás analógiájára azt a területet jelöli, amikor az optimalizálandó függvény, vagy a feltételi halmazt kijelölő függvények valamelyike nem lineáris.

Az egyik, Hans-Paul Schwefel professzortól hallott történet szerint a SIEMENS cég számára az atomerőművek fűtőelemeinek elhelyezését optimalizálták egy (később tárgyal) ún. evolúciós algoritmusmal. A mérnökök által gyakorlati megfontolásokon és szimmetria elven alapuló korábbi megoldáson kb. egy százalékot sikerült javítani a hatékonyság szempontjából. Ennek ellenére nem tudható, hogy mi lenne az optimális elhelyezés, és az sem, hogy a jelen megoldás a cél-függvény értékében mennyire tér el attól. Mégis, az új elhelyezési javaslat akkora megtakarítást jelentett, hogy a kutató intézete német Márkában is 9 jegyű támogatásban részesült.

Egy másik hasonló, nagy volumenű optimalizálási feladatban egy nagy európai multi számára kellett a telephelyek optimális elhelyezését meghatározni. Jellemző módon a feladat modelljének felállítása nem volt triviális, és a piacon kapható kereskedelmi optimalizáló szoftver nem volt alkalmas a feladat közvetlen megoldására. A talált közelítő megoldás kb. 7%-os megtakarítást jelentett, miközben az érintett vállalkozás éves pénzforgalma Európában is több százmilliós volt.

A 2000-ben Budapesten rendezett EURO nevű operációkutatási konferencián (a konferencia internetes vendégoldala a <http://www.sztaki.hu/conferences/euro17/> címen érhető el) George L. Nemhauser professzor Large-Scale Discrete Optimization in Airline Scheduling című plenáris előadásával arról számolt be, hogy az amerikai légitársaságok optimalizálási feladatai (pl. a személyzet beosztása, ütemezési, hozzárendelési és szállítási feladatok) az évi több milliárd

Dolláros költségek százalékos nagyságrendjét is megtakaríthatják.

Saját esetünkben a KÉSZ Kft. számára kerestünk egy olyan gyors algoritmust, amely képes a napi építési feladatokhoz meghatározni azt, hogy a leszabandó munkadarabokat milyen sorrendben és milyen orientálással vágják ki a raktáron levő különböző profilú acél rudakból úgy, hogy a veszteség minimális legyen. A teljes leszámolás kb. annyi eset megvizsgálását igényelte volna, ahány elemi részecske van az univerzumban (és emiatt nyilván kivitelezhetetlen lett volna). A javasolt heurisztika a részfeladatok nagy részén garantáltan optimális megoldást szolgáltatott, a többin pedig jobb eredményeket tudott adni, mint a korábban használt eljárás. Az ilyen jellegű nyersanyagok felhasználásának éves volumene az érintett vállalatnál milliárdos nagyságrendű.

Ezen példák mindegyikében kimondatlanul is nyilván a legjobb megoldás megtalálásában voltunk érdekeltek, és nem csak egy olyant keresünk, amely egy szűk környezetében a legjobb értéket adja. Emiatt ezek is a globális optimalizálás témakörébe tartoznak. Ennek ellenére a globális optimalizálási feladatok leggyakoribb kezelési módja az ignorálás, tehát a felhasználó sokszor megelégszik egy helyi kereső eljárás által adott közelítő megoldással — ami nyilvánvaló módon mind a célfüggvényértékben, mind a talált optimalizálandó változók értékében tetszőlegesen messze lehet a valódi megoldástól.

## 1.1. Intervallum matematika

### 1.1.1. Intervallum-aritmetika és a befoglaló függvények

Legyen  $\mathbb{I}$  a kompakt valós intervallumok tere. Az intervallum-aritmetika műveletei ezen a halmazon vannak értelmezve. A műveleteket úgy kell definiálni, hogy az  $A \circ B$  eredménye egy olyan  $C$  intervallum legyen, amely pontosan azon  $c$  valós számok halmaza, amelyekhez léteznek olyan  $a \in A$  és  $b \in B$  valósok, hogy  $c = a \circ b$ . Itt  $\circ$  a négy alaplóművelet valamelyikét jelöli. Az ilyen aritmetika segítségével követni lehet a kerekítési hibákat, és az adatainkat terhelő bizonytalanság tükröződhet az eredményekben.

Az előző definíció mellett az intervallum-aritmetikát lehet kizárólag a valós aritmetikára támaszkodva is definiálni. Az  $[a, b]$  és  $[c, d]$  intervallumokra legyen

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b][c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)],$$

$$[a, b]/[c, d] = [a, b][1/d, 1/c].$$

Az osztást csak akkor értelmezzük, ha  $0 \notin [c, d]$ . Érdeemes megjegyezni, hogy ez utóbbi feltétel jól megfogalmazott gyakorlati feladatokban tapasztalataink szerint szinte kivétel nélkül teljesül. A valós műveleteknek ezt a kiterjesztését intervallumokra természetes vagy naiv intervallum-kiterjesztésnek nevezik. Az utóbbi években vizsgálják az olyan intervallum-aritmetikákat is, amelyek nem csak kompakt intervallumokon definiáltak. Ezekben a nullát tartalmazó intervallummal való osztás is értelmezhető.

Bár az alaplóműveletek pontosak a fenti értelemben, mégis, a velük kiszámított bonyolultabb függvények durva becslései is lehetnek a megfelelő értékészletnek. A gyakran emlegetett példa a következő: az  $x - x^2$  értékészlete a  $[0, 2]$  intervallumon  $[-2, 0, 25]$ . Ezzel szemben az intervallum-kiterjesztéssel adódó intervallum  $[-4, 2]$ .

Az intervallum-aritmetika műveleteinek tulajdonságaival foglalkozik az intervallum-algebra. Számos, a valós műveletekre érvényes tulajdonság változatlanul teljesül az intervallum-műveletekre is (pl. a kommutativitás, asszociativitás az összeadásra és a szorzásra), de általában nincs inverz, és érvényes a szubdisztribúciós tulajdonság:  $A(B + C) \subseteq AB + AC$ .

Az alpműveletekhez hasonlóan könnyen lehet definiálni az elemi függvények intervallum-kiterjesztését is, tehát a számítógépen kiszámítható függvényeket szinte kivétel nélkül meg lehet valósítani természetes intervallum-kiterjesztésben is.

Az intervallum-aritmetika alkalmazása szempontjából alapvető fogalom a befoglaló függvény. Az  $F(X) : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$  az  $f(x)$   $n$ -változós valós függvény befoglaló függvénye, ha  $f(x) \in F(X)$  érvényes minden  $x \in X$  pontra és  $X \in \mathbb{I}^n$  intervallumra. Az intervallum-matematika fontos eredménye, hogy az  $f(x)$  valós függvényből természetes (vagy naiv) intervallum-kiterjesztéssel adódó  $F(X)$  függvény befoglaló függvény.

A befoglaló függvényektől természetes azt elvárni, hogy bővebb argumentum-intervallumra ne adjanak szűkebb eredmény-intervallumot. Ezt a feltételt fogalmazza meg az izotonitás: egy  $F(X)$  befoglaló függvény akkor izoton, ha  $X \subseteq Y$ -ből következik  $F(X) \subseteq F(Y)$ . Az izotonitás szinte minden intervallum-aritmetika implementációra érvényes.

A befoglaló függvények minőségének fontos mutatója a rend: azt mondjuk, hogy az  $F(X)$  befoglaló függvény rendje  $\alpha > 0$ , ha létezik olyan  $c$  valós konstans, hogy  $w(F(X)) - w(\overline{f}(X)) \leq cw(X)^\alpha$  teljesül minden  $X \in \mathbb{I}^n$ -re, ahol  $w(X)$  az  $X$  intervallum szélessége, és  $\overline{X}$  az  $X$  intervallum felső korlátja. A természetes intervallum-kiterjesztéssel adódó befoglaló függvények elsőrendűek, de kidolgozott a magasabbrendű befoglaló függvények elmélete is. Az egynél szélesebb intervallumokra a természetes intervallum-kiterjesztést, a kisebbekre pedig a magasabbrendű befoglaló függvényeket szokták ajánlani.

A számítógépes megvalósítás során minden intervallum-művelet végrehajtása után a kapott intervallumot módosítani szokás. Az intervallum alsó határát lefelé, felső határát felfelé kell kerekíteni a legközelebbi ábrázolható számra. Ezzel az úgynevezett kifelé kerekítési eljárással el lehet érni, hogy a befoglalási tulajdonság a kerekítési hibák ellenére is fennmaradjon. Ezen a módon számítógéppel automatizálható a garantált megbízhatóságú befoglaló függvények előállítás.

Az intervallum-aritmetikához használatos speciális kerekítéseket az IEEE szabvány biztosítja, ezért napjaink szinte minden processzora támogatja. A hetvenes évek közepétől elérhető olyan programozási nyelvek, amelyek az INTERVAL adattípus használatát támogatják. Ilyen nyelveken még az intervallum-aritmetikát megvalósító szubrutinokat sem kell megírni: a megfelelő befoglaló függvény implementálásához elegendő a függvény kiszámításához használt változók típusát megváltoztatni.

A befoglaló függvényekre támaszkodó numerikus algoritmusok érzékenyek a befoglaló függvény minőségére, pontosságára. A vázolt természetes intervallum-kiterjesztés mellett számos más eljárás is ismert a befoglaló függvények előállítására, például a magasabbrendű deriváltakat is használó ún. középponti alakok, az automatikus deriválásra és monotonitás-vizsgálatra épülő stratégiák a befoglaló függvény javítására, illetve az optimális pontosságú befoglaló függvényt generáló eljárás. Ezek a módosítások természetesen növelik az egy befoglaló függvény kiértékeléséhez szükséges számítások mennyiségét.

Az intervallum matematikát részletesen tárgyaló jegyzet vagy magyar nyelvű irodalom sajnos még nincs. Angol és német (esetleg orosz) nyelvű bevezető könyveket tudok ajánlani:

1. G. Alefeld, J. Herzberger: Einführung in die Intervallrechnung, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1974.



2. G. Alefeld, J. Herzberger: Introduction to Interval Computations, Academic Press, New York, 1983.
3. H. Ratschek, J. Rokne: Computer Methods for the Range of Functions, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1984.
4. S.A. Kalmikov, Yu.I. Sokin, Z.H. Yuldashev: Az intervallum-analízis módszerei (oroszul), Nauka, 1986.
5. H. Ratschek, J. Rokne: New Computer Methods for Global Optimization, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1988.

A jelenlegi numerikus eljárások szinte kivétel nélkül helyi információra alapulnak: pl. a vizsgált függvényt adott pontban kiértékelő szubrutin megadását kívánják meg. Bár a szóban forgó függvények pontos képletét, vagy legalább annak kiszámítási módját ismerni kell, mégis a legtöbb numerikus módszer csak adott pontbeli függvényértékre épül. Számos feladat és módszer esetén igazolható, hogy csak helyi információra támaszkodva az illető feladat véges sok lépésben nem oldható meg, sőt, ilyen módszer se létezhet (vö. Cs. T., Acta Cybernetica, 1988). Az a paradox helyzet áll fenn, hogy valójában az illető függvényről lényegesen többet tudunk, mint amennyit a legtöbb numerikus módszer a megoldáshoz felhasznál. Ezek tehát a fekete doboz elvén működnek.

Esszé írásra a kapcsolódó választható témák a következők:

- Affin aritmetika (Ronald van Iwaarden doktori dolgozata alapján)
- Back-boxing, illetve  $\epsilon$ -infláció (Ronald van Iwaarden doktori dolgozata alapján)
- Kiterjesztett intervallum aritmetikák, Kaucher-féle intervallum aritmetika (elsősorban a Kearfott könyv alapján)
- Intervallumos Newton-iteráció, Prekondicionálás (Kearfott könyve alapján)
- lejtő aritmetika (slope, Dietmar Ratz habilitációs disszertációja alapján)
- változó pontosságú aritmetikák
- Taylor-modellek (Martin Berz munkái alapján)

Feladatok:

- Írjunk egy rövid programot, amely három valós számot összead, majd igazoljuk, hogy van három szám, amelyre a program által adott eredmény a ténylegestől legalább 2002-vel eltér!
- Módosítsuk a programot úgy, hogy az utóbbi három számra pontos legyen!
- Adjunk meg néhány olyan összeadó eljárást, amely a fenti problémára megoldást jelenthet!
- Vizsgáljuk meg az egyes algoritmusok műveletigényét!
- Milyen módszer felel meg a pénzügyi számításokhoz, ahol lényegében csak egész számokkal számolnak, de azért  $100.\dot{3} + 100.\dot{3} + 100.\dot{3} = 301$ ?

- Mit lehet ajánlani olyan alkalmazáshoz, ahol minden szóbajövő szám racionális, és azt szeretnénk, ha  $(xy)/y = x$  mindig teljesülne?

Postscript file-ként rendelkezésre álló doktori dolgozatok, illetve kéziratok:

1. S.L.P. Ferguson: Sphere Packings (a Kepler feladat megoldásának részletei)
2. R.J. Van Iwaarden: An improved unconstrained global optimization algorithm, Denver, 1996.
3. F. Messine: Methodes d'Optimisation Globale basees sur l'Analyse d'Intervale pour la Resolution de Problemes avec Contraintes. Toulouse, 1997.
4. A. Wiethoff: Verifizierte globale Optimierung auf Parallelrechnern. Karlsruhe, 1997.

**Alapötlet:** a valós számokra végzett műveleteket ki lehet terjeszteni intervallumokra is, és ha valamely mennyiségről nem egy konkrét valós számmal való egyenlőségét, hanem egy intervallumba való tartozását ismerjük, akkor az intervallumokra végrehajtott műveletek célirányosnak tűnnek.

**Halmazelméleti definíció:**  $A \circ B := \{a \circ b : a \in A, b \in B\}$ ;  $A, B \in \mathbb{I}$ , ahol  $\mathbb{I}$  a valós kompakt intervallumok halmaza (azaz olyan  $(i, j)$  pároké, amelyekre  $i, j \in \mathbb{R}$ , és  $i \leq j$ ).

**Aritmetikai definíció:**

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] * [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$[a, b]/[c, d] = [a, b] * [1/d, 1/c], \text{ ha } 0 \notin [c, d].$$

Megjegyzés: az osztás definiálásánál a  $0 \notin [c, d]$  feltétel gyakran előforduló megszorításnak tűnik, de a tapasztalatok szerint nem az.

**Állítás:** az aritmetikai definíció megfelel a halmazelméletinek, és viszont. Tehát az intervallum-aritmetika ebben az értelemben pontos.

Az intervallum-aritmetika algebrai tulajdonságai:

- az  $+$  és a  $-$ , illetve az  $*$  és a  $/$  nem inverzei egymásnak, ha intervallumokra alkalmazzuk őket. Például  $[0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$ , és  $[1, 2]/[1, 2] = [1/2, 2]$ . Valamint  $[0, 0] + [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$  és az eredmény nem  $[0, 0]$ .
- érvényes az ún. szubdisztribúciós törvény, azaz  $A(B + C) \subseteq AB + AC$ . Például  $[0, 1]([1, 1] - [1, 1]) = [0, 0] \subset [0, 1][1, 1] - [0, 1][1, 1] = [-1, 1]$ . Másrészt viszont az  $a \in \mathbb{R}$  konstansra  $a(B + C) = aB + aC$ .
- érvényes az az általános szabály is, hogy a 0-szélességű intervallumokra (amelyekre  $w(A) = 0$ , ahol  $w(A) = b - a$ , ha  $A = [a, b]$ ) az intervallum-műveletek megegyeznek a valós számokon szokásos műveletekkel.
- az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív. Az egyetlen egységelem az  $[1, 1]$ , az egyetlen zéruselem a  $[0, 0]$ .

- érvényes az intervallum-műveletek befoglalási izotonitása:  $A \subseteq B, C \subseteq D$ -ből következik, hogy  $A \circ C \subseteq B \circ D$ . (Persze csak akkor, ha az illető műveletek definiáltak.)
- definiáljuk az  $n$ -dimenziós  $A \in \mathbb{I}^n$  intervallum szélességét a koordinátánkénti intervallumok szélességének maximumaként:  $w(A) := \max(w(A_i) \mid i = 1, \dots, n)$ , ha  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{I}^n$ . Ekkor teljesülnek a következők:
  1. ha  $A \subseteq B$ , akkor  $w(A) \leq w(B)$
  2.  $w(C + D) = w(C) + w(D)$  (az egy dimenziós esetben)
  3.  $w(aB) = |a|w(B)$
- Definiáljuk az  $A$  intervallum  $m(A)$  középpontját a következők szerint:  $m(A) = (a+b)/2$ , ha  $A \in \mathbb{I}$ , és  $m(A) = (m(A_1), m(A_2), \dots, m(A_n))$ , ha  $A \in \mathbb{I}^n$ . Ekkor  $m(A \pm B) = m(A) \pm m(B)$ , ha  $A, B \in \mathbb{I}^n$ .

### 1.1.2. Intervallum-felosztási algoritmus

Az intervallum-felosztási (Moore-Skelboe) algoritmus adott nemlineáris függvény valamely intervallumon vett globális minimumának alsó- és felsőbecslését adja meg. A kezdeti  $X$  intervallumban egy olyan  $X'$ -t keres meg, hogy  $F(X')$  tartalmazza a globális minimum értékét, és az  $F(X')$  intervallum szélessége kisebb legyen, mint egy előre adott  $\varepsilon$  pozitív konstans. Az algoritmus a következő:

1. Legyen  $Y := X$  és  $y := \min F(X)$ . Inicializáljuk az  $L = ((Y, y))$  listát.
2. Válasszunk egy olyan  $k$  koordinátát, amellyel párhuzamosan az  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ -nek maximális hosszúságú éle van.
3. Vágjuk ketté  $Y$ -t a  $k$  irány mentén: így olyan  $V_1$  és  $V_2$  boxokat kapunk, amelyekre  $Y = V_1 \cup V_2$ .
4. Számítsuk ki  $F(V_1)$ -et és  $F(V_2)$ -t, és legyen  $v_i = \min F(V_i)$   $i = 1, 2$ -re.
5. Töröljük  $(Y, y)$ -t az  $L$  listából.
  - (a) Monotonitási-vizsgálat: töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $0 \notin F'_j(V_i)$  valamely  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ )-re és  $i = 1, 2$ -re.
  - (b) Kivágási-vizsgálat: töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $v_i > \delta$  (ahol  $\delta$  adott eljárás-paraméter, általában a globális minimum legjobb ismert felső korlátja) és  $i = 1, 2$ .
6. Tegyük a  $(V_1, v_1)$  és  $(V_2, v_2)$  párokból a megmaradtakat a listába. Ha a lista üres, akkor STOP.
7. Jelöljük a lista azon párját, amelynek második eleme a legkisebb,  $(Y, y)$ -al.
8. Ha  $F(Y)$  szélessége kisebb, mint  $\varepsilon$ , akkor nyomtassuk ki  $F(Y)$  és  $Y$  értékét, és STOP.
9. Folytassuk az algoritmust a 2. lépésnél.

Az 5a pontbeli monotonitási teszt akkor töröl valamely intervallumot, ha azon az  $f(x)$  függvény szigorúan monoton. Ilyen esetben az adott intervallum nem tartalmazhat a belsejében minimumpontot. Ha az algoritmus azzal áll le, hogy üres lett a lista, akkor meg kell vizsgálni, hogy nem lehetett-e minimumpont az eredeti  $X$  intervallum határán (például úgy, hogy az algoritmust újraindítjuk egy  $\hat{X} \supset X$  intervallummal. Másik megoldás lehet, ha az 5a lépésben a törlés helyett az aktuális intervallumot helyettesítjük a megfelelő lapjával. Ekkor nincs szükség az  $\hat{X}$  intervallummal való ellenőrzésre.

Az 5b pontbeli kivágási teszt olyan részintervallumokat dob el, amelyekre az  $f(x)$  függvény lehetséges legkisebb értéke is nagyobb, mint  $\delta$ . A  $\delta$  értékét megválaszthatjuk a feladatra vonatkozó előzetes információink alapján, de adaptív módon is: kezdetben legyen  $\delta = \max F(X)$ , majd minden vágásnál  $\delta = \min(\delta, \max F(V_1), \max F(V_2))$ . Algoritmusunk 5b lépése az utóbbi eljárással biztos nem dob ki olyan részintervallumot, amelyben globális minimumpont van. Teszteredmények az 5a, 5b lépések nélkül, illetve az 5a lépéssel:

|     | S5  | S7  | S10 | H3 <sup>†</sup> | H6 <sup>†</sup> | GP <sup>†</sup> | RB  | SHCB  | RCOS |
|-----|-----|-----|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----|-------|------|
| STU | 0.4 | 0.7 | 1.4 | 244.3           | 249.8           | 199.5           | 0.1 | 142.7 | 0.1  |
| NFE | 90  | 186 | 204 | 11453           | 11319           | 10499           | 56  | 9024  | 98   |
| NDE | –   | –   | –   | –               | –               | –               | –   | –     | –    |
| LLI | 48  | 137 | 166 | 5000            | 5000            | 5000            | 28  | 5000  | 47   |
| EFF | 0.3 | 0.6 | 0.5 | 97.5            | 49.0            | 52.8            | 0.3 | 77.5  | 0.8  |

|     | S5  | S7  | S10 | H3   | H6   | GP    | RB  | SHCB | RCOS |
|-----|-----|-----|-----|------|------|-------|-----|------|------|
| STU | 1.2 | 1.7 | 2.5 | 9.5  | 75.2 | 746.8 | 0.1 | 0.9  | 0.4  |
| NFE | 86  | 92  | 94  | 722  | 2288 | 34850 | 56  | 384  | 98   |
| NDE | 205 | 219 | 227 | 1158 | 8141 | 46355 | 63  | 540  | 149  |
| LLI | 3   | 5   | 10  | 361  | 1238 | 5000  | 9   | 194  | 29   |
| EFF | 1.0 | 1.0 | 0.9 | 16.0 | 45.1 | 408.1 | 0.6 | 7.9  | 2.1  |

Itt S5 - RCOS standard globális optimalizálási tesztfüggvények, a hatékonyságot jelző mutatók pedig: STU – standard időegység, NFE – A függvényhívások száma, NDE – a deriválthívások száma, LLI – a maximális listahossz, és EFF az intervallumos módszer relatív hatékonysága, a hagyományos, sztochasztikus algoritmusokhoz képest.

### 1.1.3. Intervallumos Newton módszer

Az  $f(x)$  függvény befoglalását kiszámítjuk. Feltételezzük, hogy  $f'(x)$  folytonos függvény az  $[a, b]$  intervallumon, és

$$0 \notin \{f'(x), x \in [a, b]\} \text{ és } f(a)f(b) < 0.$$

Ha az  $f(x)$  zérushelyének egy  $X_n$  befoglalása ismert, egy jobb  $X_{n+1}$  befoglalást a következő iterációs képlettel kaphatunk:

$$X_{n+1} := \left( m(X_n) - \frac{f(m(X_n))}{F'(X_n)} \right) \cap X_n,$$

ahol  $m(X)$  az  $X$  intervallum egy belső pontja (például a középpontja). Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x} + (x+1)\cos(x)$  függvényt a  $[2, 3]$  intervallumon. A kapott iterációs sorozat az intervallumok  $w(X_k)$  szélességével együtt:

| k | $X_k$                            | $w(X_k)$       |
|---|----------------------------------|----------------|
| 1 | [2,0, 3,0]                       | 1,0            |
| 2 | [2,0, 2,3]                       | 0,3            |
| 3 | [2,05, 2,07]                     | 0,02           |
| 4 | [2,05903, 2,05906]               | 0,00003        |
| 5 | [2,059045253413, 2,059045253417] | 0,000000000004 |

Optimalizálási feladatokra nyilván a célfüggvény deriváltjára kell a képleteinket alkalmazni, hiszen annak a zérushelyeit keressük. Ekkor az iterációs formula a következő lesz:

$$X_{n+1} := \left( m(X_n) - \frac{f'(m(X_n))}{F''(X_n)} \right) \cap X_n.$$

Itt  $f'(x)$  a célfüggvény deriváltja,  $F''(X)$  pedig a második derivált befoglaló függvénye. Vegyük észre, hogy az iterációs képletünk nem függ közvetlenül magától a célfüggvénytől. Ez rendben is van abból a szempontból, hogy nyilván azonos iterációs sorozatot várunk  $f(x)$ -re, és annak eltoltjára,  $f(x) + c$ -re.

Idézet a C-XSC Toolbox könyvből<sup>1</sup> az intervallumos Newton módszernek az adott példára való használatával:

```
#include "interval.h"          /* include interval arithmetic package */
#include "imath.h"             /* include interval standard functions */

interval F (real& x) {
    return sqrt(x) + (x+1) * cos(x);
}

interval Deriv (interval& x) {
    return (1 / (2 * sqrt(x)) + cos(x) - (x+1) * sin(x));
}

int Criter (interval& x) {
    /* computing F(a) * F(b) < 0          */
    interval Fa, Fb;                    /* using point intervals          */
    Fa = Inf(x);                          /* operator <= is the relational   */
    Fb = Sup(x);                          /* operator 'element of'          */
    return (Sup(Fa*Fb) < 0.0 && !(0 <= Deriv(x)));
}
```

<sup>1</sup>Hammer, R. M. Hocks, U. Kulisch, D. Ratz: C++ Toolbox for Verified Computing. Springer, Berlin, 1995

```

main() {
    interval y, y_old;
    real mid (interval&);          /* prototype of the midpoint function */

    cout << "Please enter starting interval:"; cin >> y;
    while (Inf(y) != Sup(y)) {
        if (Criter(y)) {
            do {
                y_old = y;
                cout << "y = " << y << "\n";
                y = (mid(y)-F(mid(y))/Deriv(y)) & y; /* The iteration formula */
            } /* & is the intersection */
            while (y != y_old);
        }
        else {
            cout << "Criterion not satisfied! \n";
        }
        cout << "Please enter starting interval: ";
        cin >> y;
    }
}

```

### 1.1.4. Példák

1. Az intervallumos Newton módszer működésének illusztrálására tekintsük az  $f(x) = x^2 - x$  függvényt. Ez egy egyszerű parabola, amelynek tengelye párhuzamos az  $y$  tengellyel, és amelynek két zérushelye a 0 és az 1. A függvény minimumpontja a 0,5, ahol itt a függvényérték -0,25. A célfüggvényünk deriváltja az  $f'(x) = 2x - 1$ , második deriváltja pedig  $f''(x) = 2$ .

Tekintsük először az  $X_0 = [0, 1]$  induló intervallumot, az iteráció első lépése erre:

$$X_1 = \left( m(X_0) - \frac{f'(m(X_0))}{F''(X_0)} \right) \cap X_0 = \left( 0,5 - \frac{0,0}{[2,2]} \right) \cap [0,1] = [0,5,0,5] \cap [0,1] = [0,5,0,5].$$

Ez azt jelenti, hogy pontos aritmetikával az intervallumos Newton módszer egy lépésben meg tudja határozni egy kvadratikus függvény minimumát abszolút pontosan. A kifelé kerekítés ezen nyilván ront, de ezzel együtt is nagyon hatékony eszköz ez az optimalizálásban. Nyilván általában nem kvadratikus függvényt kell optimalizálnunk, de mivel a sima függvényeknek egy pont kis környezetében a kvadratikus közelítés tetszőlegesen jó, ezért az intervallumos Newton módszertől hasonlóan jó hatékonyságot várhatunk sima nemlineáris optimalizálásban.

Említésre méltó az is, hogy példánkban nem volt túlbecslés az érintett függvényekben, mert mind a lineáris, mind a konstans függvényhez (a kifelé kerekítést leszámítva az implementációban) pontos befoglaló függvényt kapunk már a természetes intervallum kiterjesztéssel is.

Tekintsük most az  $X_0 = [0, 2]$  kezdőintervallumot, erre a következőt kapjuk:

$$X_1 = \left( m([0,2]) - \frac{f'(m([0,2]))}{F''([0,2])} \right) \cap X_0 = \left( 1 - \frac{1,0}{[2,2]} \right) \cap [0,2] = [0,5,0,5] \cap [0,2] = [0,5,0,5].$$

Ebből az látszik, hogy az előző nagyszerű eredményben nem volt annak szerepe, hogy a kiinduló intervallum középpontja volt a keresett minimumpont. Tekintsünk most egy olyan intervallumot,

amely nem tartalmaz minimumpontot,  $X_0 = [1, 2]$ :

$$X_1 = \left( m([1, 2]) - \frac{f'(m([1, 2]))}{F''([1, 2])} \right) \cap [1, 2] = \left( 1, 5 - \frac{2, 0}{[2, 2]} \right) \cap [1, 2] = [0, 5, 0, 5] \cap [1, 2] = \emptyset.$$

Az intervallumos Newton módszer tehát igazolta, hogy a keresési tartományban nincs minimumpont.

2. Vegyük most az előző példa célfüggvényének a négyzetét:  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ . Ennek nyilván a 0 és az 1 pontok a minimumpontjai. Az első és a második derivált függvény:  $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ , illetve  $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$ . Első keresési intervallumként tekintünk az  $X_0 = [0, 2]$  intervallumot, ami tehát mindkét minimumpontot (és köztük az egyetlen maximumpontot is) tartalmazza. Erre az intervallumos Newton módszerrel a következő eredményt kapjuk:

$$X_1 = \left( m(X_0) - \frac{f'(m(X_0))}{F''(X_0)} \right) \cap X_0 = \left( 1 - \frac{0, 0}{[-22, 50]} \right) \cap [0, 2] = [-\infty, \infty] \cap [0, 2] = [0, 2].$$

Ez a példa azt mutatja, hogy ha a kiindulási intervallumban több szélsőérték is van, akkor az intervallum nem változik. Figyeljük meg, hogy a metszetképzés kellett ahhoz, hogy a keresési intervallum ne nőjön. A második derivált most egy kvadratikus függvény, amihez a befoglaló függvény általában csak túlbecsléssel adható meg. Esetünkben az értékkészlet,  $[-1, 26]$  lényegesen kisebb, mint a kapott befoglalás:  $[-22, 50]$ . Ennek ellenére az értékkészlettel is a fenti eredményt kaptuk volna, mivel az értékkészlet is tartalmazza a nullát.

A második derivált befoglalására a következő értékeket kapjuk:

$$F''([0, 9, 1, 1]) = [-1, 48, 6, 02],$$

illetve

$$F''([0, 99, 1, 01]) = [1, 6412, 2, 3612].$$

Sajnos ez a példa se igazolja azt a közkeletű vélekedést, hogy az intervallumos Newton módszer akkor érdemes használni, ha az argumentum intervallum szélessége egynél kisebb. Az elmondottak miatt csak a második esetben számíthatunk arra, hogy a keresési intervallumunk méretét csökkenteni tudjuk. Ekkor az eredményünk az  $[1, 1]$  intervallum. Ennek a magyarázata pedig az, hogy a keresési intervallum középpontjában az első derivált értéke nulla, másrészt a második derivált értékei mindenütt pozitívak, így a szélsőértéket a függvény csak a középpontban veheti fel.

Tekintsünk akkor most egy olyan intervallumot, amelynek felezőpontja nem megoldás:  $[0, 98, 1, 01]$ . Erre az intervallumos Newton módszerrel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X_1 &= \left( m(X_0) - \frac{f'(m(X_0))}{F''(X_0)} \right) \cap X_0 = \left( 0, 995 - \frac{-0, 0098505}{[1, 4048, 2, 4812]} \right) \cap [0, 98, 1, 01] = \\ &= (0, 995 + [0, 003970, 0, 007012]) \cap [0, 98, 1, 01] = [0, 99897, 1, 002012] \cap [0, 98, 1, 01] = \\ &= [0, 99897, 1, 002012]. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldásunkra egy meglehetősen szűk intervallumot kaptunk: a keresési intervallum kb. tizedére (a szélessége 0,03-ról 0,003042-re) csökkent, és ezzel együtt a bizonytalanságunk is a minimum helyét illetően.

PÉLDA. A SIAM (Ipari és Alkalmazott Matematikai) Társaság 2002-ben 10 numerikus feladatot tűzött ki<sup>2</sup>. Feladatonként 10 helyes decimális jeggyel 100 dollárt lehetett nyerni. A negyedik megadott feladat a következő függvény minimalizálása volt:

$$\begin{aligned} & \exp(\sin(50x)) + \sin(60e^y) + \sin(70 \sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \\ & - \sin(10(x + y)) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

A feladat megoldására egy intervallum aritmetikára alapuló korlátozás és szétválasztás módszert használtunk. A kapott eredmény a  $[-10.0, 10.0]$  keresési tartományon a globális minimum értékére a következő alsó- és felső korlátokat adta:

$$[-3.306868647475316, -3.306868647475196].$$

Az eredményben a kiemelt első 13 jegy matematikai bizonyítóerővel igazoltan helyes. Ehhez 0.26 másodperc CPU-ideje, minimális memóriaigény (75 részintervallum tárolására volt szükség), 1975 célfüggvény-, 1158 gradiens- és 92 Hesse-mátrix kiértékelés kellett mindössze.

## 1.2. Automatikus differenciálás

Ahogy a korábbiakban láttuk, a differenciál-hányadosoknak fontos szerepük van a nemlineáris optimalizálásban, de a numerikus matematika számos területen is szinte elengedhetetlen a használatuk. Ide tartozó problémák vannak a nemlineáris egyenletmegoldásban, az irányításelméletben és az érzékenység-vizsgálatban is. Talán a legismertebb eset a függvények zérushelyének megkeresése, itt a derivált használatával működő Newton-Rawson eljárás konvergencia-sebessége lényegesen jobb, mint a deriváltakat nem használó szelő- vagy húrmódszeré.

Ma már egyes programozási nyelvek (pl. a PASCAL-XSC<sup>3</sup>) is támogatják az automatikus differenciálást megfelelő adattípussal és műveletekkel, és számos szoftver is használja ezt a deriválási módszert<sup>4</sup>.

### 1.2.1. Deriváltak a számítógépeken

A leggyakrabban használt két módszer a deriváltértékek előállítására azok numerikus közelítése és a "kézzel" való derivált-meghatározás a deriválási szabályok alkalmazásával. A legtöbb numerikus matematikai monográfia és a professzionális numerikus programcsomagok többsége is ezt a két utat javasolja. Mindkét módszernek vannak azonban olyan gyengéi, amelyek számos feladatban lehetetlenné vagy értelmetlenné teszik alkalmazásukat. A ritka kivételek egyike Skeel és Keiper könyve<sup>5</sup>, amely a szimbolikus differenciálással szemben is az automatikus deriválást javasolja.

Érdekes összefüggések vannak a deriválás és az integrálás analitikus, illetve numerikus meghatározása között is. Az analitikus deriválás könnyen, csaknem mechanikusan végrehajtható,

<sup>2</sup>Nick Trefethen: A Hundred-Dollar, Hundred-digit Challenge. SIAM News 35(2002)

<sup>3</sup>Klatte, R., U. Kulisch, M. Neaga, D. Ratz, Ch. Ullrich: PASCAL-XSC, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

<sup>4</sup>Pl. a D. Ratz: Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen. (Doktori értekezés, Karlsruhei Egyetem, 1992.) című disszertációban leírt optimalizálási eljárás, amely csak a célfüggvény megadását igényli.

<sup>5</sup>Skeel, R.D., J.B. Keiper: Elementary Numerical Computing with MATHEMATICA. McGraw-Hill Inc., New York, 1993.



míg az analitikus integrálás nehéz vagy akár lehetetlen is lehet. Ezzel szemben a numerikus közelítés a deriváltra gyakran pontatlan, míg az integrálra általában pontosabb.

A numerikus differenciálás viszonylag könnyen programozható, sokszor a könyvtári program maga állítja őket elő, ha a felhasználó nem adott meg szubrutint az analitikus deriváltak kiszámítására. A numerikus derivált használatának előnye, hogy

- + nincs előzetes munkaráfordítás a deriváltak "kézzel" történő előállítására,
- + emiatt javítani sem kell az azok programozása során elkövetett hibákat, és
- + akkor is működik, ha az illető függvény képletét nem ismerjük, csak a kiszámolására szolgáló szubrutin adott.

Hátránya viszont, hogy

- a levágási hiba miatt sok értékes jegy veszik el. Ez a jelenség csak bonyolult, és nem is minden számítógépes környezetben rendelkezésre álló eszközökkel csökkenthető (változó méretű számábrázolás, racionális aritmetika stb.),
- a gyorsan változó deriváltak becslésére alkalmatlan.

A hüvelykszabály szerint – hacsak lehetséges – érdemes előállítani a deriváltakat számító szubrutinokat. Ezen eljárás előnye, hogy

- + a levágási hiba nem jelentkezik, a kiszámított deriváltértékek általában csak nagyon kis kerekítési hibával terheltek, és
- + a gyorsan változó deriváltértékek is jól meghatározhatók.

A hátránya ezzel szemben, hogy

- a deriváltak képletének meghatározása munkaigényes, és a "kézzel" való előállítás esetén gyakran komoly hibaforrás, valamint
- csak a képlettel adott függvények deriváltja határozható meg ilyen módon, tehát a kizárólag algoritmussal adottakat általában nem lehet így deriválni.

Itt kell megjegyezni, hogy a számítógépes algebrarendszerek (mint például a Mathematica, a Maple vagy a Derive) szimbolikus manipulációval elő tudják állítani a képlettel adott függvények deriváltjait. Így ez az előkészítő munka legalább számítógépesíthető, tehát nem feltétlenül kell "kézzel" végrehajtani. Az ilyen szimbolikus deriválás, a vele járó egyszerűsítés és a programozási nyelvre való alakítás időigénye nagyon változó, mindenesetre a számítógépes algebrarendszerek sokat fejlődtek ezen a téren az utóbbi időben<sup>6</sup>.

Az automatikus differenciálás egyszerűen abból az igényből fakadt, hogy az előző módszerek előnyeit kell egyesíteni a hátrányok elhagyásával. Olyan eljárást kerestek tehát, amely

---

<sup>6</sup>Lásd Iri, M.: History of automatic differentiation and rounding error estimation, in: Griewank, A., G. Corliss (Eds.): Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation, and Application. SIAM, Philadelphia, 1991. 3-16.

1.. táblázat. Néhány alpművelet és elemi függvény differenciálása

|            |           |         |        |            |           |           |            |
|------------|-----------|---------|--------|------------|-----------|-----------|------------|
| $y = f(x)$ | $a \pm x$ | $a * x$ | $a/x$  | $\sqrt{x}$ | $\log(x)$ | $\exp(x)$ | $\cos(x)$  |
| $f'(x)$    | $\pm 1$   | $a$     | $-y/x$ | $0.5/y$    | $1/x$     | $y$       | $-\sin(x)$ |

- + lényegében nem igényel előzetes ráfordítást a deriváltak "kézzel-" vagy akár számítógépes algebrarendszerrel, szimbolikus manipulációval való meghatározására,
- + emiatt nem is kell a megfelelő szubrutinokat programozni és javítani,
- + akkor is működik, ha csak az illető függvény kiszámolására szolgáló szubrutin adott, de a függvény képlete nem ismert,
- + a levágási hiba miatt nem vesznek el értékes jegyek,
- + a gyorsan változó deriváltak meghatározására is alkalmas, és
- + a deriváltak kiszámításának műveletigénye általában kisebb, mint a numerikus deriválása, illetve az analitikus deriváltakat kiszámító szubrutinoké.

Maga az ötlet nem nagyon bonyolult, és jellemző módon többen egymástól függetlenül rátaláltak<sup>7</sup>. Ha valaki kedvet érez hozzá, maga is megpróbálhatja az automatikus differenciálást újra felfedezni: az előző feltételeket teljesítő eljárást kell megadni (eddig nem árultunk el semmi lényegeset a trükkből).

### 1.2.2. Az ötlet.

A trükk mindössze annyi, hogy használjuk az adott függvényre ismert kiszámítási eljárást az egyes műveletekhez tartozó deriválási szabályokkal együtt. Például ha  $f(x) = f_1(x) * f_2(x)$ , akkor legyen  $f'(x)$  értéke  $f_1'(x) * f_2(x) + f_1(x) * f_2'(x)$ , ahol  $f_1'(x)$  és  $f_2'(x)$  értéke már ismert. Minden egyes részletszámítással együtt tehát a rá vonatkozó, az aktuális változó- és konstansértékekhez tartozó deriváltértéket is meghatározzuk. A kiinduláshoz a változó deriváltja természetesen 1, a konstansé nulla. Az 1. Táblázat egyes alpműveletek és elemi függvények differenciálásának formális leírását tartalmazza, itt  $x$  változó,  $a$  pedig konstans.

Az automatikus differenciálás implementálása során célszerű olyan adatszerkezetet választani, hogy minden, az illető függvény kiszámításában szerepet játszó változó és konstans számára egy rendezett párt használunk, amelynek első tagja a szokásos értéket tartalmazza majd, a második tag pedig a hozzá tartozó deriváltértéket. Ilyen adatstruktúrával az új műveleteket egyszerű felírni szubrutinok segítségével, vagy egyes újabb programozási nyelvekben (pl. C++ vagy FORTRAN-90) az eredeti műveletek és standard függvények definíciójának az új adatszerkezetre való kiterjesztésével (operation overloading). Az utóbbi esetben a már működő, az eredeti függvényt kiszámító programban csak az adattípust kell kicserélni (pl. "real" helyett "derivative" vagy "gradient"), és máris rendelkezésre állnak a kívánt deriváltértékek.

<sup>7</sup>Ostrovskij, G.M., Ju. M. Wolin, W.W. Borisov: Über die Berechnung von Ableitungen, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule für Chemie, Leuna-Merseburg 13(1971) 382-384 és Wengert, R.E.: A simple automatic derivative evaluation program, Communications of the ACM 7(1964) 463-464.

Tekintsünk egy egyszerű példát az automatikus differenciálás használatára: határozzuk meg az  $f(x) = (x - 1)^2$  függvény deriváltját az  $x = 2$  pontban! A differenciálhányados-függvény  $f'(x) = 2(x - 1)$ , a keresett deriváltérték pedig 2.

A változónkhoz tartozó pár  $(2, 1)$ , a függvényben szereplő konstanshoz tartozó pedig  $(1, 0)$ . A zárójelen belüli kifejezés  $f(x)$  képletében a  $(2, 1) - (1, 0) = (1, 1)$  párt eredményezi. A négyzetre-emelést szorzással értelmezve az  $(1, 1) * (1, 1) = (1, 2)$  párt kapjuk, amelyből kiolvasható, hogy  $f(2) = 1$ , és  $f'(2) = 2$ .

### 1.2.3. Kiterjesztések.

A képlettel megadott függvények differenciálásával szemben szokás kiemelni az "algoritmusok differenciálását". Ezen az automatikus differenciálás egyszerű kiterjesztését értik feltételes utasításokat is tartalmazó eljárásokkal megadott függvények deriválására. Az utóbbiakkal kapcsolatban persze felvetődik, hogy differenciálhatók-e ezek egyáltalán. Szerencsére ez a probléma inkább matematikai jellegű, és a technikai megoldást nem nagyon befolyásolja.

A magasabbrendű deriváltak előállításához két út között választhatunk: vagy közvetlenül az egyes műveletekhez tartozó magasabbrendű deriválási képleteket használjuk (például, ha  $f(x) = g(x) + h(x)$ , akkor  $f''(x) = g''(x) + h''(x)$ ), vagy az alacsonyabbrendű deriváltak kiszámítására már meglévő algoritmusra alkalmazzuk ismételten az algoritmusok differenciálását.

A többváltozós függvények differenciálására a bevezetett automatikus differenciálási módszer minden további nélkül alkalmazható, az egyes parciális deriváltak meghatározásakor csak a változó-konstans viszonyt kell mindig megfelelően tisztázni. Ez is könnyen programozható, és így a gradiens, a Hesse- és a Jacobi-mátrix kiszámítása is nagyon kényelmessé tehető.

### 1.2.4. Az automatikus differenciálás két változata.

Az automatikus differenciálás legegyszerűbb megvalósítása az, amikor a különben már rendelkezésre álló, az adott függvényt kiszámító programot kibővítjük az egyes műveletekhez tartozó elemi deriválási lépésekkel - megtartva az eredeti algoritmus szerkezetét. Ezt a módszert a továbbiakban sima algoritmusnak fogjuk nevezni. Az angol nyelvű szakirodalomban nincs még kialakult egységes elnevezése, a "forward", "contravariant" vagy "bottom-up" jelzőkkel szokás megkülönböztetni (a másik, fordított eljárás angolul "reverse", "backward", "covariant" vagy "top-down"). A két eljárás lényegében az összetett függvények deriválásához használatos láncszabály végrehajtási irányában különbözik.

A sima eljárás például az  $y = f(g(h(x), k(x)))$  függvény automatikus differenciálása során a

$$du = h'(x)dx,$$

$$dv = k'(x)dx,$$

$$dw = [g_u(u, v)h'(x) + g_v(u, v)k'(x)]dx,$$

$$dy = f'(w)[g_u(u, v)h'(x) + g_v(u, v)k'(x)]dx$$

sorrendet követi.

A fordított eljárás az ellentétes irányban alkalmazza a láncszabályt:

$$dy = f'(w)dw,$$

$$\begin{aligned} dy &= f'(w)[g_u(u, v)du + g_v(u, v)dv], \\ dy &= f'(w)[g_u(u, v)du + g_v(u, v)k'(x)dx], \\ dy &= f'(w)[g_u(u, v)dh'(x) + g_v(u, v)k'(x)]dx. \end{aligned}$$

A fordított algoritmus előnye abban van, hogy ez a végrehajtási sorrend lehetővé teszi többváltozós függvények differenciálása során bizonyos szükségtelen műveletek elhagyását. Ennek az az ára (amit a következő szakasz adatai is alátámasztanak), hogy a fordított algoritmus tárigénye magasabb, és a sima algoritmus egymenetes végrehajtásával szemben két menetet igényel.

A két változat közötti különbség megvilágítása céljából tekintsük az  $f(x) = x_1(1 - x_2)^2$  függvényt az  $x = [2, 1]^T$  pontban. A sima eljárás az egyes végrehajtott műveletekkel együtt a megfelelő deriváltértékeket is meghatározza:

$$\begin{aligned} f_1 = x_1 = 2 & & d_1 = (1, 0), \\ f_2 = x_2 = 1 & & d_2 = (0, 1), \\ f_3 = 1 & & d_3 = (0, 0), \\ f_4 = f_3 - f_2 = 0 & & d_4 = d_3 - d_2 = (0, -1), \\ f_5 = f_4^2 = 0 & & d_5 = 2f_4d_4 = (0, 0), \\ f_6 = f_1f_5 = 2 & & d_6 = f_1d_5 + d_1f_5 = (0, 0). \end{aligned}$$

A sima eljárás eközben esetleg többször is végrehajtja ugyanazt a műveletet, viszont nem igényli a kiszámítási fa létrehozását és tárolását. A fordított algoritmus ezzel szemben először meghatározza az  $f_i$  értékeket és a kiszámítási fát, majd ennek segítségével előállítja a  $d_i = \partial f / \partial f_i$  értékeket:

$$\begin{aligned} d_6 &= 1 \\ d_5 &= d_6 \frac{\partial f_6}{\partial f_5} = d_6 f_1 = 2, \\ d_4 &= d_5 \frac{\partial f_5}{\partial f_4} = d_5 2f_4 = 0, \\ d_3 &= d_4 \frac{\partial f_4}{\partial f_3} = d_4 1 = 0, \\ d_2 &= d_4 \frac{\partial f_4}{\partial f_2} = d_4 (-1) = 0, \\ d_1 &= d_6 \frac{\partial f_6}{\partial f_1} = d_6 f_5 = 0. \end{aligned}$$

A gradiens értékét a  $[d_1, d_2]^T$  vektor adja.

### 1.2.5. Művelet- és tárigény.

A 2. Táblázat az automatikus differenciálás két változatának művelet- és tárigényét adja meg néhány gyakori deriválási feladatra. A legmeglepőbb adat talán az, hogy egy többváltozós függvénynek és gradiensének meghatározása a fordított algoritmussal legfeljebb négyszerannyi műveletet igényel mint az illető függvény kiszámítása. A felső korlát tehát nem is függ közvetlenül az illető függvény változóinak számától.

Az automatikus differenciálás műveletigénye nagyjából megfeleltethető egy ciklusmentes gráfban a legrövidebb út megkeresése műveletigényének, hozzáadva a kiszámítási gráf létrehozásának műveletigényét. A tárigény nagy részét a kiszámítási gráf tárolása okozza. A tár- és műveletigény javítása terén még várhatók további eredmények, de az is látszik, hogy a tárigény inkább csak a műveletigény rovására csökkenthető (és viszont).

2.. táblázat. A fontosabb automatikus differenciálási feladatok művelet- és tárigénye. Magyarázat:  $f$ : egy  $n$ -változós függvény,  $\mathbf{f}$ :  $m$  darab  $n$ -változós függvény,  $\nabla f$ : az  $f$  gradiense,  $H$ : az  $f$  Hesse-mátrixa,  $J$ : az  $\mathbf{f}$  Jacobi-mátrixa,  $L(\cdot)$ : az argumentumok meghatározásának műveletigénye a  $\{+, -, *, /, \sqrt{\cdot}, \log, \exp, \sin, \cos\}$  alapműveletek felett, és  $S(\cdot)$ : az argumentumok meghatározásának tárigénye.

| Feladat             | Algoritmus                    |  |
|---------------------|-------------------------------|--|
|                     | sima                          | fordított                                    |
| $L(f, \nabla f)$    | $\leq 4nL(f)$                 | $\leq 4L(f)$                                 |
| $L(f, \nabla f, H)$ | $\mathcal{O}(n^2L(f))$        | $\leq (10n + 4)L(f)$                         |
| $L(\mathbf{f}, J)$  | $\mathcal{O}(nL(\mathbf{f}))$ | $\leq (3m + 1)L(\mathbf{f})$                 |
| $S(f, \nabla f)$    | $\mathcal{O}(S(f))$           | $\mathcal{O}(S(f) + L(f))$                   |
| $S(f, \nabla f, H)$ | $\mathcal{O}(S(f))$           | $\mathcal{O}(S(f) + L(f))$                   |
| $S(\mathbf{f}, J)$  | $\mathcal{O}(S(\mathbf{f}))$  | $\mathcal{O}(S(\mathbf{f}) + L(\mathbf{f}))$ |

### 1.2.6. Az automatikus differenciálás veszélyei.

Az előzőek alapján úgy tűnhet, hogy az automatikus differenciálás számítógépes megvalósítása problémamentes. Sajnos nem egészen ez a helyzet, íme néhány példa:

1. A zérus gyökök esete. Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x_1^4 + x_2^4}$  függvényt. Ez differenciálható, és a gradiense a  $(0., 0.)^T$  pontban  $(0., 0.)^T$ . Az automatikus differenciálás a négyzetgyök művelethez azonban nem tud értéket rendelni, ha a gyök argumentuma nulla. A felhasználó számára ilyen esetekben az a leghasznosabb, ha az illető implementáció felhívja a figyelmet erre a hibalehetőségre, pl. az IEEE aritmetikát támogató számítógépekben a NaN (Not a Number) érték hozzárendelésével.

2. A programelágazás esete. Tekintsük az alábbi utasítást:

$$\text{if } x = 1 \text{ then } f(x) = 1 \text{ else } f(x) = x^2$$

Világos, hogy az így definiált függvény folytonosan differenciálható, mégis az automatikus differenciálás a hamis  $f'(1) = 0$  értéket adja. A példa kicsit erőltetettnek tűnik, de viszonylag gyakran előfordul, hogy adott függvény kiszámítására hasonló módon az argumentumok értékétől függően más és más eljárást adunk meg. Valódi megoldást erre a problémára nem lehet javasolni, legfeljebb azt, hogy a jelenség tudatában (különösen az egyenlőség-feltétellel adott programelágazás esetén) a felhasználó ellenőrizze, hogy ilyen hiba felléphet-e.

3. A határértékkel adott függvény esete. Eddig a függvények megadására mindig véges eljárást használtunk. Mi történik akkor, ha ez a leírás végtelen? Könnyű olyan alkalmazási példát mutatni, ahol a differenciálni kívánt függvényt csak egy iteratív sorozattal tudjuk jellemezni. A klasszikus analízis szerint viszont a differenciálás és a határértékképzés nem cserélhető fel. Tekintsük a következő egyszerű függvénysorozatot:

$$f_1(x) = xe^{-x^2}, f_2(x) = xe^{-x^2}e^{-x^2}, \dots, f_k = x(e^{-x^2})^k, \dots$$

Automatikus differenciálással (is)  $\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(0) = 1$ , habár a valódi  $f(x)$  határfüggvényre  $f'(0) = 0$ . Ebben az esetben is csak azt lehet tanácsolni, hogy a jelenség ismeretében az

automatikus differenciálással nyert értékeket ellenőrizni kell. Ehhez viszonylag kényelmesen használható elméleti eredmények is rendelkezésre állnak<sup>8</sup>.

### 1.2.7. Az automatikus differenciálás implementálása.

A már említett PASCAL-XSC beépített adattípusainak és kiterjesztett alpműveleteinek a használata a legegyszerűbb. A felhasználónak mindössze a megfelelő adattípusokat kell megváltoztatnia. A FORTRAN-90 és C++ nyelvekben ezek az új adattípusok és a kiterjesztett műveletek megvalósítása után ugyanolyan kényelmesen lehet az automatikus differenciálás sima algoritmusát alkalmazni, mint a PASCAL-XSC támogatásával.

A következő egyszerű példában az  $f(x) = 25(x - 1)/(x + 2)$  függvény és deriváltja értékét határozzuk meg automatikus differenciálással az  $x = 2$  pontban. A PASCAL-XSC implementáció érdekesebb részleteit adjuk csak meg.

```

program pelda (input,output); type df_type = record f,df: real; end;

operator + (u,v: df_type) res: df_type; begin res.f:=u.f+v.f;
res.df:=u.df+v.df; end;

:

operator * (u,v: df_type) res: df_type; begin res.f:=u.f*v.f;
res.df:=u.df*v.f+u.f*v.df; end;

:

function df_var (h: real) : df_type; begin df_var.f:=h; df_var.df:=1.0; end;

var x,f: df_type;
    h: real;
begin
    h:=2.0;
    x:=df_var(h);
    f:=25*(x-1)/(x+2);
    writeln(' f, df:', f.f, f.df);
end.

```

Számos kevésbé elegáns, de annál hatásosabb számítógépes eszköz (preprocesszor, precompiler, keresztfordító és más programcsomag) érhető el az automatikus differenciálás megvalósítására. Mintaként néhány híresebbnek az adatai:

- A JAKEF egy FORTRAN precompiler, amit az Argonne National Laboratory fejlesztett ki. Inputként egy skalár vagy vektorfüggvényt kiszámító szubrutint használ, és eredményként egy a gradienst, illetve a Jacobi-mátrixot előállító szubrutint ad. A fordított algoritmusra épül. A dokumentációt és a forrásszöveget is meg lehet kapni. A NETLIB nevű adatbázisban található, bővebb információt úgy kaphatunk, hogy a netlib@research.att.com E-mail címre egy "send index" üzenetet küldünk.

<sup>8</sup>Fischer, H.: Special problems in automatic differentiation, in: Griewank, A., G. Corliss (Eds.): Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation, and Application. SIAM, Philadelphia, 1991, 43-50.

- A FORTRAN programok sima algoritmussal való automatikus differenciálására szolgáló GRAD programcsomag a következő címen érhető el: Larry Husch, Dept. Mathematics, University of Tennessee, Knoxville TN, USA, illetve husch@WUARCHIVE.WUSTL.EDU az elektronikus postával.
- Az ADOL-C egy C++ nyelven írt rendszer, amely C vagy C++ nyelvű algoritmusok differenciálására alkalmas sima és fordított eljárással is. A forráskód és a dokumentáció Andreas Griewank címén érhető el (Argonne National Labs, Argonne, IL 60439, USA, illetve elektronikus postával griewank@antares.mcs.anl.gov).
- A MAPLE nevű számítógépes algebrarendszer az 5.1-es változatától kezdve a szimbolikus deriválás mellett képes az automatikus differenciálásra is (a sima algoritmussal). Az "optimize" rutinja csökkentheti a műveletigényt, és az eredményt FORTRAN vagy C nyelven is ki tudja adni.

Meg kell még említeni, hogy az automatikus differenciáláshoz természetes módon kapcsolható a kerekítési hibák becslése és a számított deriváltak alsó- és felsőkorlátjainak meghatározása is. Az utóbbi feladatok (részben az intervallum-aritmetikára támaszkodva) szintén kényelmesen megoldhatók számítógépen. Az automatikus differenciálásnak bő irodalma érhető el, említésre méltó a következő két cikk, illetve könyv:

- Kedem, G.: Automatic differentiation of computer programs, ACM Transactions on Mathematical Software 6(1980) 150-165.
- Rall, L.B.: Automatic Differentiation: Techniques and Applications. Lecture Notes In Computer Science, Vol. 120, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

### 1.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Ki lehet-e terjeszteni a négy alpműveletek valós számokról intervallumokra?
2. Igaz-e, hogy két intervallum összege pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek előállnak a két argumentum-intervallumbeli pontok összegeként?
3. Milyen információra támaszkodik a monotonitási teszt?
4. Mi okozza a befoglaló függvények durva becslését?
5. Mi a kifelé-kerekítés?
6. Hány féle kerekítést enged meg az IEEE processzor-szabvány?
7. Igaz-e, hogy egy szigorúan monoton függvény deriváltjának befoglaló függvénye nem tartalmazza a nullát?
8. Igaz-e, hogy az intervallumos befoglaló függvény számítása mindig tovább tart, mint az eredeti valós függvényé?
9. Melyik eljárással kapjuk a legjobb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[-1,1]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a gyorsabb eljárás a jobb)

10. Melyik eljárással kapjuk a legrosszabb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[-1,1]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a lassabb eljárás a rosszabb)
11. Melyik eljárással kapjuk a legjobb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[1,10]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a gyorsabb eljárás a jobb)
12. Melyik eljárással kapjuk a legrosszabb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[1, 10]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a lassabb eljárás a rosszabb)
13. Melyik eljárással kapjuk a legjobb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[0.4, 0.6]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a gyorsabb eljárás a jobb)
14. Melyik eljárással kapjuk a legrosszabb befoglaló függvényt az  $X^*X-X$  függvényre a  $[0.4, 0.6]$  intervallumra? ( $X^*X$  nem négyzetreemelés, azonos pontosság esetén a lassabb eljárás a rosszabb)
15. Mutassunk példát arra az esetre, amikor  $w(X) + w(Y) \neq w(X + Y)$ !
16. Mi a szubdisztribúciós szabály?
17. Invertálható-e az intervallumos összeadás?
18. Azonos-e az  $X$  intervallum négyzete  $X * X$ -el?
19. Reprezentálhatók-e mindig a valós műveletek intervallum-műveletekkel?
20. Igaz-e, hogy ha  $X$  része  $Y$ -nak, akkor minden befoglaló függvényre  $F(X)$  is része  $F(Y)$ -nak?
21. Milyen programozási nyelvek alkalmasak intervallum aritmetikával való számolásra?
22. Igazoljuk, hogy a vázolt eljárás kerekítés nélküli aritmetika esetén pontosan a derivált értékét adja.
23. Adjunk becslést arra, hogy az automatikus differenciálás és az analitikusan megadott derivált műveletigénye hogyan viszonyul egymáshoz!
24. Hogyan működik a belsőfüggvény deriválása esetünkben?
25. Hogyan lehet eljárásunkat többváltozós függvények parciális deriválására kiterjeszteni? (Mit kell konstansnak, és mit változónak tekinteni?)
26. Határozzuk meg a másodrendű deriváltak előállításához szükséges aritmetikát!
27. Vizsgáljuk meg annak lehetőségét, hogy az automatikus differenciáláshoz hasonlóan felépíthető (?) optimalizálási aritmetikát milyen feladatokra lehet alkalmazni!
28. Az intervallumokra definiált műveletek pontosak, de pontosak-e az ezekkel felépített függvények? Mutassunk példát!



29. Milyen függvények intervallumon vett értékkészlete számítható pusztán az intervallum végpontjaiban felvett függvényértékekkel?
30. Mit mondhatunk a konvex, és a konkáv függvények befoglaló-függvényeiről?
31. Próbáljuk meg a valós számokra ismert négy alapműveletet általánosítani kompakt valós intervallumokra!
32. Igaz-e, hogy ha  $X$  része  $Y$ -nak, akkor minden befoglaló függvényre  $F(X)$  is része  $F(Y)$ -nak?
33. Igaz-e, hogy egy szigorúan monoton függvény deriváltjának befoglaló függvénye nem tartalmazza a nullát?
34. Milyen intervallumot kapunk eredményül, ha az  $f(x) = (2x - 1) * (x^2 - x)$  függvény természetes intervallum-kiterjesztését a  $[-1, 1]$  intervallumon kiértékeljük?
35. Milyen információra támaszkodik az intervallumos korlátozás és szétválasztás típusú globális optimalizálási algoritmusban a monotonitási teszt?
36. Definiálja a természetes intervallum kiterjesztést, és mutasson rá példát!
37. Ismertesse az intervallum aritmetika néhány, a valós aritmetikáétól eltérő algebrai tulajdonságát!
38. Írja meg az automatikus differenciálás szubrutinjait, és tesztelje néhány függvényen!

## 2. fejezet

### A hátizsák feladat

Adottak szállítandó tárgyak súllyal (vagy térfogattal) és értékkel (vagy fontossággal). A feladat az, hogy meghatározzuk a hátizsákba beteendő holmiknak azt a részhalmazát, amelyek az előző értelemben a leghasznosabbak, és együtt beférnek a korlátozott kapacitású hátizsákba.

Használjuk a következő jelölést:

- $m$  a tárgyak száma,
- $a_i$  az  $i$ . tárgy súlya,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $c_i$  az  $i$ . tárgy értéke,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $b$  a rakomány megengedett maximális összsúlya.

Legyen  $x_i$  értéke 1, ha az  $i$ -edik tárgy bekerült a hátizsákba, és 0, ha nem ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

A megoldandó feladat ezekkel felírva:

$$\max \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b, \text{ és}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

A hátizsák feladat tehát egy egészértékű, bináris lineáris programozási feladat. Egy egyszerű kiterjesztése adódik akkor, ha az elhelyezendő tárgyak között vannak azonosak. Ekkor az optimalizálandó változók értékei nemnegatív egészek lehetnek.

A feladat jellege miatt a kiindulási feladatra legtöbbször fel lehet tenni azt, hogy a súlyok és a súlyhatár nemnegatívak. Ennek ellenére mind az  $a_i$ , mind a  $c_i$  értékek előjele tetszőleges.

#### 2.1. A hátizsák feladat megoldása teljes leszámolással

A hátizsák feladatot megoldhatjuk a durva erő módszerével (brute force, enumeration). Ennek lényege, hogy felsoroljuk az összes változó-kombinációt, meghatározzuk a lehetséges megoldásokra a célfüggvény értékét, és kiválasztjuk ez alapján az optimálisat.

Az összes változó-kombinációt például lexicografikus sorrendben határozhatjuk meg. Négy bináris változó esetén az így kapott sorozat:

$$(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1, 1).$$

Az eljárás hátránya, hogy nagyszámú változó esetén kezelhetetlenül sok esetre kell ellenőrizni a feltételt, és ez a szám a változók számával exponenciálisan nő.

PÉLDA. Tekintsük a következő feladatot. Legyen a tárgyak súlya rendre 2, 3 és 4, a hasznossága pedig 5, 3, 1, míg a megengedett összsúly 5. A megoldást tartalmazó táblázat (a lehetséges megoldásokat félkövér betű, az optimálist csillag jelzi):

| javasolt megoldás | a súlya   | az értéke |
|-------------------|-----------|-----------|
| <b>(0,0,0)</b>    | <b>0</b>  | <b>0</b>  |
| <b>(0,0,1)</b>    | <b>4</b>  | <b>1</b>  |
| <b>(0,1,0)</b>    | <b>3</b>  | <b>3</b>  |
| (0,1,1)           | 7         | 4         |
| <b>(1,0,0)</b>    | <b>2</b>  | <b>5</b>  |
| (1,0,1)           | 6         | 6         |
| <b>(1,1,0)*</b>   | <b>5*</b> | <b>8*</b> |
| (1,1,1)           | 9         | 9         |

Vegyük észre, hogy a megoldást a mohó módszerrel is megkapnánk: addig vennénk a legértékesebb tárgyakat csökkenő hasznossági sorrendben, amíg azt a súlyhatár megengedi.

A feladatnak megfeleltethető a következő, többé-kevésbé reális probléma: adott egy komp, ennek teherbírása 5 tonna. Három jármű vár az átvitelre: egy 2 tonnás személyautó, egy 3 tonnás kisteherautó, és egy 4 tonnás szekér. A viteldíjak rendre 500, 300, illetve 100 forint. Üzleti okokból kíváncsiak vagyunk az előírásoknak megfelelő, legnagyobb bevételt jelentő fuvarra.

## 2.2. A hátizsák feladat megoldása közvetett, implicit leszámolással

A megoldási módszer lényege, hogy a teljes leszámolást ésszerűen gyorsítjuk a feltétel és az értékek figyelembe vételével. Többek között azokat a kiértékeléseket tudjuk megtakarítani, amelyek egyértelműen nem lehetséges megoldásokhoz tartoznak. Például, ha kiderült, hogy a

$$(0, 1, 0, \dots, 1, 0, 0)$$

megsérti a súlykorlátot, akkor nincs értelme a több egyest tartalmazó

$$(0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1)$$

ellenőrzésének – ha a megfelelő súlyok pozitívok.

1. Első lépésként alakítsuk át a feladatunkat egy könnyebben áttekinthető, kanonikus alakúra: legyen minden célfüggvény együttható nem pozitív, és a súlyok növekvő sorrendbe rendezettek:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ .

Az első feltételt az  $x'_i = 1 - x_i$  helyettesítéssel lehet elérni olyan változókra, amelyekre az nem teljesült. Ezeket a változókat természetesen meg kell jegyezni, és az eljárás végén a kapott optimális értékeket megfelelően vissza kell alakítani. A második tulajdonság teljesüléséhez

a változókat kell csak alkalmasan átrendezni (és a megoldás után vissza).

2. Az  $x$  indulóvektornak válasszuk a nulla vektort. A keresés során ettől haladunk a keresési fa levelei felé, amelyek utolsó komponense egyes.

3. Ha  $\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b$  teljesül, akkor adjuk  $x$ -et a lehetséges megoldások  $L$  halmazához. Hagyjuk ki az ellenőrizendő csúcsok közül azokat, amelyekre a jelen  $x$  utolsó nullái egyikének  $c_i$  együtthatója negatív.

Ha ez az egyenlőtlenség nem igaz, akkor ugorjuk át mindazokat a vektorokat a keresésben, amelyek előállnak úgy, hogy  $x$  utolsó nulla elemei egyike helyett egyes szerepel, és a megfelelő súly pozitív.

4. Generáljunk egy újabb vektort! Ha van még ilyen, akkor folytassuk a 3. Lépéssel. Az új vektor generálása során ha lehet, akkor olyant választunk, amely az előző  $x$  vektor utolsó nulla jegyeit módosítva kapható. Ha ez már nem lehetséges, akkor visszatérünk egy korábban félbehagyott ághoz a keresési fában.

5. A legnagyobb célfüggvény értékű talált lehetséges megoldás az optimális megoldás az  $x^*$  pontban. Az 1. Lépésben végrehajtott átalakításoknak megfelelően az eredményt visszatranszformáljuk.

PÉLDA. A korábban vizsgált példát most nem érdemes használni, mert könnyen látható, hogy abban nincs lehetőség a keresés gyorsítására, mivel a nem lehetséges megoldások mind a keresési fa levelein vannak.

Tekintsük ezért a következő, kicsit módosított feladatot. Legyen a tárgyak súlya rendre 4, 3 és 3, a hasznossága pedig -5, 3, -1, míg a megengedett összsúly 2.

Kövessük a közvetett leszámolási algoritmus lépéseit.

1. Írjuk fel az eredeti feladatot:

$$\max \sum_{i=1}^3 c_i y_i = \max -5y_1 + 3y_2 - y_3,$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^3 a_i y_i \leq b, \text{ azaz } 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 2.$$

A kanonikus alakot úgy kapjuk, hogy az  $y_2$  változót  $1 - x_1$ -el helyettesítjük (és  $c_2$  új értéke -3 lesz). Ezzel párhuzamosan a súlyok növekvő sorrendje eléréséhez cseréljük fel a változókat:

$$x_1 = 1 - y_2, \quad x_2 = y_3, \quad x_3 = y_1.$$

Az új feladat ezután:

$$\begin{aligned} \max & -3x_1 - x_2 - 5x_3 + 3, \\ & -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -1. \end{aligned}$$

2. Az indulóvektor  $x^T = (0, 0, 0)$ .

3. A  $(0,0,0)$  vektorra a fenti feltétel nyilvánvalóan nem teljesül, ezért a további keresésből kizárjuk a  $(0,1,0)$ ,  $(0,1,1)$  és  $(0,0,1)$  eseteket is, mivel az utolsó két súly pozitív, tehát ezekre az esetekre sem teljesülhet a feltételünk.

$$\begin{aligned} \max -3x_1 - x_2 - 5x_3 + 3, \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -1. \end{aligned}$$

4. A következő keresési vektor  $x^T = (1, 0, 0)$ .

3. Az  $(1, 0, 0)$  vektor súlya  $-3 \leq -1$ , tehát  $L = \{(1,0,0)\}$ . Az ehhez a vektorhoz tartozó célfüggvényérték 0. Mivel az  $(1,0,0)$  vektor hátsó nullái mindegyikéhez negatív célfüggvény-együttható tartozik, ezért más vektort már nem is kell megvizsgálni: a további lehetséges megoldások célfüggvényértéke kisebb lenne a megtaláltnál.

5. Az átalakított feladat optimális megoldása tehát  $(1,0,0)$ . Az 1. Lépés átalakítása alapján az eredeti feladat optimális megoldása

$$\begin{aligned} y_1 = x_3 = 0, \\ y_2 = 1 - x_1 = 0, \\ y_3 = x_2 = 0. \end{aligned}$$

Az ehhez tartozó célfüggvényérték pedig természetesen 0.

Az eredmény szépen értelmezhető az eredeti

$$\begin{aligned} \max -5y_1 + 3y_2 - y_3, \\ 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 2 \end{aligned}$$

feladatra. Eszerint a célfüggvény optimuma a teljes, feltétellel nem korlátozott tartományon a  $(0,1,0)$  pontban lenne. Ez azonban nem lehetséges megoldás, mert a második komponens miatt az előírt feltétel nem teljesül. Az egyenlőtlenséget az  $y_2 = 0$  választással teljesíthetjük, ez pedig épp a kapott megoldást adja. Mivel a célfüggvény együtthatók és a súlyok egyike sem nulla, ezért más megoldás nincs is.

## 2.3. Kapcsolódó feladatok

### A hajórakodási feladat

Korlátozott térfogatú szállítóeszköz esetén a hátizsák feladat feltételéhez a térfogatra vonatkozót is meg kell adni. Kövessük a korábbi jelölést:

- $m$  a tárgyak száma,
- $a_{1i}$  az  $i$ . tárgy súlya,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $a_{2i}$  az  $i$ . tárgy térfogata,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $d_i$  az  $i$ . tárgyból rendelkezésre álló mennyiség,
- $c_i$  az  $i$ . tárgy értéke,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $b_1$  a rakomány megengedett maximális összsúlya,
- $b_2$  a rakomány megengedett maximális össztérfogata.

Legyen  $x_i$  értéke ismét 1, ha az  $i$ -edik tárgy bekerült a rakományba, és 0, ha nem ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Ha több  $i$ -edik tárgy is van a rakományban, akkor  $x_i$  értéke legyen a megfelelő egész szám.

A megoldandó feladat ezekkel felírva:

$$\max \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \leq b_j, \quad j = 1, 2,$$

$$x_i \leq d_i \text{ és}$$

$$x_i \text{ egész, } i = 1, 2, \dots, m.$$

Állapítsuk meg, hogy a hajórakodási feladat is megoldható a korábban ismertett implicit leszámolással, de módosítást kell rajta végrehajtani. Bár elvileg a két feltétel egymástól függetlenül is érvényesíthető az ellenőrizendő vektorok számának csökkentésére, de a súlyok és a térfogatok értékei egyszerre nem feltétlenül rendezhetők növekvő sorrendbe. Ennek ellenére a kapott eljárás általában hatékonyabb lesz, mint a teljes leszámolás.

Vegyük észre, hogy hasonló módon további feltételek is érvényesíthetők, pl. a rakomány összhosszára stb.

### A fix költség feladat

A termelő, szolgáltató vállalkozások a költségeik csökkentésére törekszenek. Tekintsük azt a feladatot, amely a fix és termeléssel arányos költségek viszonyát vizsgálja.

Használjuk a következő jelölést:

- $m$  a termékek száma
- $x_i$  az  $i$ . termék gyártandó mennyisége
- $d_i$  az  $i$ . termék gyártási korlátja
- $a_{ij}$  a  $j$ . termék egységnyi mennyiségének gyártásához az  $i$ . erőforrásból felhasznált mennyiség
- $b_i$  az  $i$ . erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség
- $c_i$  az  $i$ . termék fix költsége (vagy nulla)
- $k_i(x_i)$  az  $i$ . termék mennyiségtől függő termelési költsége

A matematikai modell ezek alapján:

$$\min \sum_{i=1}^m f_i(x_i) = \min \sum_{i=1}^m c_i + \sum_{i=1}^m k_i(x_i)$$

feltéve, hogy

$$0 \leq x_i \leq d_i, \text{ és}$$

$$Ax \leq b.$$

A feladat nemlineáris  $k_i(x)$  esetén szeparábilis, lineárisan korlátozott nemlineáris optimalizálási feladat. Amennyiben a gyártandó termékek mennyisége egész, akkor ráadásul egészértékű (vagy vegyes egészértékű) nemlineáris optimalizálási problémával állunk szemben.

Gyakori eset, hogy a nem fix beruházási függvényrész  $x_i^{0.6}$ , vagy hasonló alakú, és így feladatunk a konkáv optimalizálás területére tartozik.

## 2.4. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Mutasson olyan értelmes gyakorlati feladatot, amely olyan hátizsák feladatra vezet, amelyben a célfüggvény együtthatók mind negatívak!
2. Hogyan fogalmazná át a teljes leszámolás módszerét a hátizsák feladat azon esetére, amikor több azonos tárgyat kell elhelyezni?
3. Mutasson példát, amelyre az implicit leszámolási eljárás az első lehetséges megoldással meg is találja az optimális megoldást!
4. Mutasson példát, amelyre az implicit leszámolási eljárás is minden szóbjövő vektort meg kell hogy vizsgáljon ahhoz, hogy megtalálja az optimális megoldást!
5. Keressen gyakorlati példát arra az esetre, amikor a hátizsák feladat célfüggvény együtthatói között vannak pozitív és negatív előjelűek is!
6. Mi adja a lényegi eltérést a hátizsák- és a hajórakodási feladat között?
7. Ha egy 2 Ghz-es PC 10 órajel alatt tudja egy vektorról eldönteni, hogy az lehetséges megoldása-e a hátizsák feladatnak, akkor egy nap alatt milyen méretű feladat megoldására lehet biztosan számítani (tehát a legrosszabb esetben)?
8. Keressen reális alkalmazási feladatot, amely olyan hátizsák feladatra vezet, amelyben negatív és pozitív súlyok is kellenek!
9. Indokolja, hogy a fix költség feladat miért nem vezethető vissza közvetlenül a hátizsák feladatra!
10. Adjon meg egy olyan hátizsák feladat osztályt, amely minden elemére nem negatív az optimális célfüggvény érték!

11. Mit lehet mondani annak a hátizsák feladatnak a megoldásairól, amelyben minden súly és minden célfüggvény együttható is megegyezik?
12. Jellemezze a hajórakodási feladatoknak azt a részhalmazát, amely megfeleltethető a hátizsák feladatnak!
13. Tekintsük a  $\max x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot. Milyen mértékben lehet megváltoztatni a súlykorlátot ahhoz, hogy a megoldás ne változzon? Mi a helyzet a feladat többi paraméterével?
14. Tegyük fel, hogy egy hátizsák feladatban a legnagyobb célfüggvényértékhez tartozó tárgyak összsúlya a megadott korlát alatti. Mit mondhatunk ekkor az optimális megoldásról?
15. Ha a hátizsák feladatban megadott legfontosabb tárgyak összsúlya épp a súlyhatárt adja, akkor mi az optimális megoldás?
16. Mutasson olyan hátizsák feladatot, amelynek optimális megoldásában a legkisebb értékű tárgy is benne van!
17. Igaz az, hogy bármely bináris vektorhoz konstruálható olyan hátizsák feladat, amelynek ez egyetlen optimális megoldása? És olyan, amelynek csak ez nem optimális megoldása?
18. Mi a hátránya a Monte Carlo módszernek (egyenletes eloszlással generálunk vektorokat, és a talált legjobb célfüggvényértékű vektort megjegyezzük) a hátizsák feladat megoldása során?
19. Oldja meg fejben a  $\max x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot! Melyik módszert használta?
20. Érveljen a teljes leszámolás módszere mellett: mikor előnyösebb az, mint az implicit leszámolás?
21. Mennyi a műveletigénye az implicit leszámolás első, előkészítő lépésének?
22. Mi a megoldása annak a hátizsák feladatosztálynak, amelyben minden súly, érték és súlyhatár megegyezik?
23. Miért nincs értelme a hátizsák feladatnak  $m = 1$  esetén?
24. Mutassa meg, hogy a fix költség feladat speciális eseteként előáll a hátizsák feladat!
25. A levezetett számolási példára növelje a súlykorlátot, és tárgyalja annak hatását a lehetséges megoldások halmazára!





### 3. fejezet

## Az utazó ügynök feladat

Az operációkutatás egy nevezetes, központi feladata az utazó ügynök problémája. Legyenek adottak meglátogatandó városok, ismerjük a köztük lévő távolságokat. A feladat egy olyan minimális hosszúságú útvonal megtalálása, amely minden várost érint, mindegyiken csak egyszer halad át, és a körút végén visszatér a kiindulási városba.

A matematikai modell megfogalmazásában legyen a korábbiaknak megfelelően a meghatározandó változók halmaza  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , ahol  $n$  a városok száma,  $x_{ij}$  pedig azt adja meg, hogy az  $i$ . és a  $j$ . város között áthalad-e az aktuális körút. A feladatot a következők szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus Q} x_{ij} \geq 1 \quad Q \subset \{1, \dots, n\}, Q \neq \emptyset,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = 1, \dots, n.$$

A célfüggvény a megtett útszakaszok költségét összegzi. Az első feltétel azt követeli meg, hogy az ügynök minden városból kimegy, a második pedig azt, hogy mindegyikbe bejut, mindkét esetben pontosan egyszer. E két feltétel teljesülése esetén még előfordulhat, hogy a kapott útvonal különálló körutakból áll, ami a feladat eredeti megfogalmazásának nem felel meg.

Ezt a problémát rendezzi a következő feltétel. Ha lenne olyan zárt körút, amely nem tartalmazza az összes várost, akkor az ehhez tartozó városok alkotta  $Q$  halmazra ez a feltétel nem teljesülne, hiszen ekkor a baloldali összeg nullának adódna.

Állapítsuk meg, hogy a megfogalmazott operációkutatási feladat egy lineáris egyenlőség és egyenlőtlenség korlátokkal ellátott nulla-egy lineáris programozási feladat.

Az utazó ügynök feladat számos alkalmazásban fordul elő kisebb-nagyobb módosítással:

Az egyik legkézenfekvőbb a tömegközlekedés *járatütemezési problémája*. Adjuk meg azt az útvonalat, amelyet egy busznak meg kell tennie ahhoz, hogy bizonyos járatok útvonalán a megfelelő szolgáltatást nyújtsa, ehhez a lehető legrövidebb útvonalat keressük, és a járatok teljesítése után térjen vissza az indulási állomására.

Hasonló eset a fémmegmunkálásban a szerszámgépek olyan vezérlése, hogy a befogott munkadarab lehető legkisebb mozgatása révén minden részművelet helyét érintse a fúró, szegecselő stb. fej, majd térjen vissza a kiindulási helyzetébe.

Tekintsük azt a problémát, amikor a feladat egy gyár által termelt termékek sorrendjének meghatározása – tekintettel arra, hogy az egyik termék gyártásáról egy másiknak a termelésére való átállásnak időben, vagy direkt költségben eltérő ára van. Természetesen minden terméket le kell gyártani, és a teljes termelési ciklus után ugyanabba a helyzetbe tér vissza a gyártási sorrend.

Bonyolultabb a helyzet, ha repülőgépek és azok személyzete útitervét kell optimálisan meghatározni úgy, hogy megadott városokat érintsenek, a hatékonyság a lehető legjobb legyen, de a szervizelési, pihenési stb. előírásokat betartsák.

Közvetve idetartozik az írógépek, számítógépes billentyűzetek tervezése is. Ekkor adott nyelvi környezetben megmérjük, hogy két betű egymás utáni előfordulása milyen gyakori. Ennek megfelelően a cél olyan billentyűzetet megadni, amelyre a tipikus szövegek gépelése során a lehető legkevesebbet kell mozgatni a kezünket.

Utazó ügynök feladatot old meg a mentős diszpécser is, amikor meghatározza, hogy a mentő az aznapi betegeket milyen sorrendben vegye fel a lakásukban, szállítsa a dialízis kezelésre, majd vissza otthonukba. Ebben a feladatban a kórháznak kiemelt helye van, nyilván nem lehet azt utolsóként érinteni...

Az utazó ügynök feladata interpretálható úgy is, hogy minimális hosszúságú, minden csúcsot érintő irányított körutat kell meghatározni egy adott gráfban.

Az utazó ügynök feladat korábban ismertetett modellje  $2^n$  darab feletti feltételt tartalmazott, ez valódi feladatok esetén elviselhetetlenül nagy szám. A. Tucker 1960-ban kevesebb feltétellel fogalmazta újra a feladatot:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2 \quad 2 \leq i \neq j \leq n,$$

$$x_{ii} = 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, \quad u_i \text{ egész}, \quad i = 2, \dots, n.$$

A részkör mentességet a 3., új feltétel hivatott biztosítani. Az új feladatnak  $n^2$  nagyságrendű feltétele van. A konstrukció lényege, hogy az  $u_i$  számokkal alkalmasan sorszámozott körút elemekre a 3. feltétel csak akkor teljesülhet, ha az teljes körút (vö. a következő bizonyítás vége).

ÁLLÍTÁS. Az utazó ügynök feladat két modellje ekvivalens.

BIZONYÍTÁS. A két feladat célfüggvénye megegyezik, tehát a lehetséges megoldások halmazának megegyezését kell igazolni.

Tekintsük először azt az esetet, hogy az eredeti feladatnak az  $X$  mátrix egy lehetséges megoldása:

$$x_{1,i_2} = x_{i_2,i_3} = \cdots = x_{i_n,1} = 1, \text{ és} \\ x_{ij} = 0 \text{ különben.}$$

Ehhez megkonstruáljuk azt az  $(X, u)$  párt, amely lehetséges megoldása lesz a második feladatnak. Mivel  $X$  lehetséges megoldása az első feladatnak, ezért ehhez tartozik egy körút, amely az  $(1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, 1)$  éleket tartalmazza. Definiáljuk most  $u$  értékét a következők szerint:

$$u_{i_t} = t, \quad t = 2, \dots, n.$$

Csak a harmadik feltételrendszert kell igazolni, a többi teljesülése nyilvánvaló. Tekintsünk egy tetszőleges ide való indexpárt:  $2 \leq i \neq j \leq n$ . Az  $u$  definíciójából adódik, hogy  $u_i - u_j \leq n - 2$ . Másrészt  $x_{ij} = 1$  pontosan akkor teljesül, ha  $i$  és  $j$  a körútban közvetlenül egymás utáni indexek: ha  $i = i_r$ , akkor  $j = i_{r+1}$ . Innen erre az esetre

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} = r - (r + 1) + (n - 1) = n - 2,$$

tehát a harmadik csoport feltétel is teljesül, így  $X$  lehetséges megoldása az első feladatnak.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a második feladatnak az  $(X, u)$  pár egy lehetséges megoldása, de van egy diszjunkt részkörút, tehát  $x_{i_1,i_2} = x_{i_2,i_3} = \cdots = x_{i_k,i_1} = 1$ , és  $1 < k < n$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Mivel  $(X, u)$  egy lehetséges megoldása a második feladatnak, ezért

$$u_{i_1} - u_{i_2} + (n - 1)x_{i_1,i_2} \leq n - 2, \\ u_{i_2} - u_{i_3} + (n - 1)x_{i_2,i_3} \leq n - 2, \\ \vdots \\ u_{i_k} - u_{i_1} + (n - 1)x_{i_k,i_1} \leq n - 2$$

teljesül. Az egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy  $k(n - 1) \leq k(n - 2)$ , ami  $1 < k < n$  esetén ellentmondás.  $\square$

Mivel az utazó ügynök feladat feltételrendszere csak az  $n$  számtól függ, ezért a feladatot egyértelműen meghatározza az  $n$  szám, és a  $C$  költségmátrix.

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy a  $C$  mátrix ekvivalens a  $D$  mátrixszal (jelölése:  $C \sim D$ ), ha vannak olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  és  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  számok, hogy igaz  $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$  minden indexpárra.

SEGÉDTÉTEL. Ha  $C \sim D$ , akkor a  $C$  mátrix által meghatározott  $TSP(C)$  utazó ügynök feladat optimális megoldása megegyezik a  $TSP(D)$  feladatával.

BIZONYÍTÁS. Mivel mindkét feladatnak létezik optimális megoldása, ezért a segédtétel állítása korrekt. A két feladat lehetséges megoldásai halmaza megegyezik, legyen ez  $L$ , a két célfüggvény pedig  $z_C$  és  $z_D$ .

Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan  $\gamma$  konstans, hogy  $z_C(x) = z_D(x) + \gamma$  teljesül minden  $x$  lehetséges megoldásra. Mivel  $C \sim D$ , ezért vannak olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  és  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  konstansok, hogy  $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$  minden  $1 \leq i, j \leq n$  indexpárra.

Ekkor

$$\begin{aligned} z_C(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \alpha_i + \beta_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n x_{ij}. \end{aligned}$$

Mivel  $x$  lehetséges megoldás, ezért mindkét utóbbi második szumma egy:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1.$$

Ezért aztán  $\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$  megfelelő választás:  $z_C(X) = Z_D(X) + \gamma$ . Ez épp a segédtétel állítását igazolja.  $\square$

KÖVETKEZMÉNY. Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő olyan utazó ügynök feladatokat vizsgálni, amelyekre  $C \geq 0$  teljesül.

Vegyük észre, hogy a harmadik feltételcsoporttól eltekintve az utazó ügynök feladat a hozzárendelési feladatot adja. Emiatt az utazó ügynök feladat  $L$  lehetséges megoldásai halmaza része a megfelelő hozzárendelési feladat  $S$  lehetséges megoldásai halmazának:  $L \subset S$ . Mivel

$$\min\{z(X) : X \in S\} \leq \min\{z(X) : X \in L\},$$

ezért

- i, ha  $X$  optimális megoldása a  $H(C)$  hozzárendelési feladatnak és  $X$  teljes körút, akkor  $X$  egyben optimális megoldása a  $TSP(C)$  utazó ügynök feladatnak is, és
- ii, Ha  $X$  optimális megoldása a  $H(C)$  hozzárendelési feladatnak, akkor  $z(X)$  egy alsó korlátja a  $TSP(C)$  utazó ügynök feladat optimumértékének.

Az 1 - 2 - 3 - 4 - 5 teljes körúthoz tartozó egy hozzárendelési feladat költségmátrixa (M az adott számítógépes környezetben ábrázolható legnagyobb szám):

$$\begin{bmatrix} M & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & M & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & M & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & M & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & M \end{bmatrix}$$

A következő költségmátrixhoz tartozó hozzárendelési feladat optimális megoldása (1 - 2 - 3, 4 - 5) nem ad lehetséges megoldást a kapcsolódó utazó ügynök feladatra:

$$\begin{bmatrix} M & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & M & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & M & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & M & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & M \end{bmatrix}$$

Az utazó ügynök feladat tulajdonságai miatt számos esetben ésszerű azt feltételezni, hogy a költségmátrix *szimmetrikus*. E szabály alól azonban vannak természetes kivételek. Még városok közti távolság esetén is lehet eltérés az oda és a visszaút között, de még gyakoribb a termékek gyártási sorrendje megválasztása esetén, hogy az A termék gyártásáról a B-re pl. gyorsabban lehet áttérni, mint fordítva.

Az utazó ügynök feladat nagyszámú feltételére, és a leszámolási eljárás reménytelenül nagy műveletigényére tekintettel a feladatot szokás egyrészt *korlátozás és szétválasztás módszerrel* megoldani, másrészt gyors, *heurisztikus közelítő eljárásokat* alkalmazni.

A korlátozás és szétválasztás módszerét gyorsítani lehet akkor, ha jó korlátokat tudunk megadni az optimum értékére. Ennek eszköze lehet a korábban ismertetett áttérés a megfelelő hozzárendelési feladatra.

Egon Balas és Paolo Toth számítógépes kísérleteket végzett, amelynek során 400 problémát generáltak véletlenszerűen. Egyenletes eloszlással határozták meg a feladat méretét az  $50 \leq n \leq 250$  határok között, és a célfüggvény együtthatókat is az 1 és 100, illetve más esetben az 1 és 1000 közötti egészek közül.

Az így előálló feladatokat megoldották mint TSP feladatot, és mint hozzárendelési feladatot is. Azt kapták, hogy a hozzárendelési feladatok optimumértékei átlaga 99.2 %-a volt az utazó ügynök feladat optimumai átlagának. Az eredményekből kitűnt, hogy  $n$  növekedésével a relatív eltérés csökkent.

Ezzel együtt az utazó ügynök feladat az ún. NP nehéz feladatok közé tartozik, tehát nem ismeretesek azt az  $n$  feladatméret polinom függvényével korlátozott idő alatt megoldó eljárások. Emiatt előtérbe kerültek a közelítő módszerek, amelyek csaknem optimális megoldást adnak viszonylag rövid idő alatt.

### 3.1. Az utazó ügynök feladat heurisztikus algoritmusai

A heurisztikus algoritmusok lényege, hogy ezek az eljárások gyorsan, kevés műveletigény árán javítják a közelítő megoldásokat – de arra nem mindig van remény, hogy ezek minden esetre konvergálnának az optimális megoldáshoz.

*Legközelebbi város beillesztése:* az eddigi részkörutat bővítsük egy olyan újabb várossal, hogy a részkörút városain kívüli városok között megkeressük azt a  $k$ -t, amelynek távolsága a legkisebb a részkörút valamely városához. Ezután ezzel bővítjük a részkörutat: Ha  $c_{ik}$  volt a kiválasztásban talált minimális távolság, akkor az új részkörútban az  $i$ . város után a  $k$ . következik, majd ezután az  $i$  várost eddig követő  $i'$ .

PÉLDA. Tekintsük a legutóbb vizsgált feladatot, amelynek  $C$  költségmátrixa

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | M | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | M | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | M | 1 |
| 5 | 5 | 5 | 1 | M |

Kiinduláshoz vegyük az  $\{1, 1\}$  körutat. A többi város ettől mért távolsága rendre 1, 5, 5 és 5. Ez alapján a 2. várossal bővül a részkörút: 1 - 2 - 1.

A következő lépésben tekintsük a 3., 4. és 5. városok távolságait az 1. és 2. városoktól. Ezek a  $C$  mátrix főátlója feletti elemek, az első és második sorban ( $c_{12}$  kivételével). A minimumot a  $c_{23} = 1$  távolság adja, ezzel a kibővített részkörút:  
1 - 2 - 3 - 1.

A harmadik lépésben a minimalizálandó távolságok  $c_{14}$ ,  $c_{24}$ ,  $c_{34}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{25}$  és  $c_{35}$ . Ezek mindegyike 5, válasszuk a 4. várost a bővítéshez. Ezzel az új részkörút: 1 - 2 - 3 - 4 - 1.

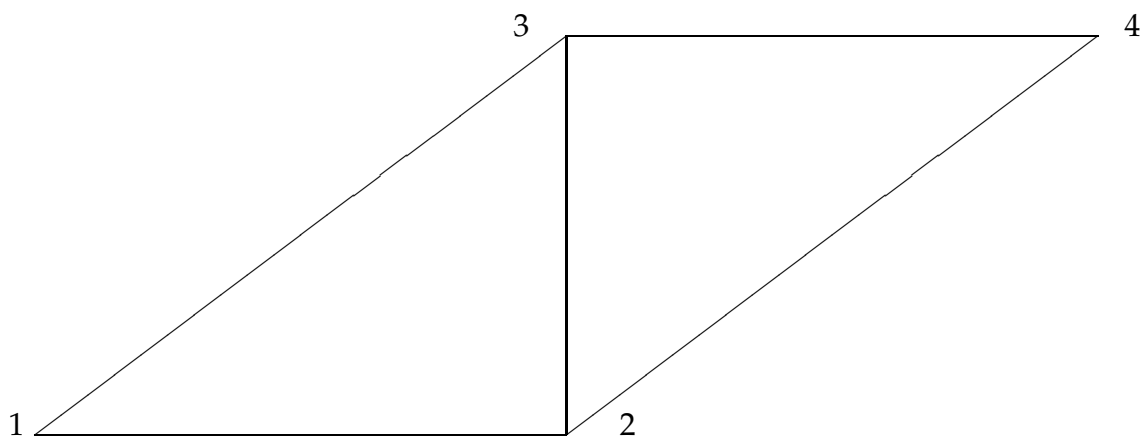
Az utolsó lépésben már csak egy városból választhatunk, és ezt a 4. városhoz kell kötni: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 lesz a heurisztika által talált teljes körút. Ez nyilván lehetséges megoldás, a hozzá tartozó össztávolság 13. Ez egyben optimális megoldás is – bár ez nem jellemző a heurisztikák esetén. □

*A legközelebbi város hozzáadása:* Az előzőnél egyszerűbb heurisztika: az aktuális útvonalat mohó módon bővíti a meglévő útvonal végpontjához legközelebbi várossal. Ha minden város szerepel már az útvonalban, akkor az utolsót összeköti az elsővel, és így képez teljes körutat.

PÉLDA. Mutassunk most egy olyan példát, amely szuboptimális megoldást eredményez. 3 város esetén ez nem lehetséges, ahogy könnyen belátható. Tekintsük akkor a következő távolságmátrixot:

|             |   |   |             |
|-------------|---|---|-------------|
| M           | 4 | 5 | $\sqrt{73}$ |
| 4           | M | 3 | 5           |
| 5           | 3 | M | 4           |
| $\sqrt{73}$ | 5 | 4 | M           |

Ez két, a rövidebb oldalával összefordított Pitagorasz-háromszöget tartalmaz. Az így kapott paralelogramma természetes módon ad egy körüljárást, amely 18 hosszú. Ez a körút az 1 - 2 - 4 - 3 - 1.



Kövessük végig a legközelebbi város hozzáadása heurisztikát az 1. városból indulva. Az elsőhöz a második város a legközelebbi (lásd a távolságmátrix első sorát). A 2. városból (az első kivéve a keresésből) a 3. város van a legközelebb. A harmadikból már csak a 4.-be mehetünk. Ezután zárjuk a körutat, ami így 1 - 2 - 3 - 4 - 1. Az ehhez tartozó teljes megtett út  $4 + 3 + 4 + \sqrt{73} \approx 19.544$ .  $\square$

### 3.1.1. A távolságvektor szerepe a heurisztikákban

A legközelebbi város beillesztése heurisztika  $\mathcal{O}(n^2)$  műveletigényű, ha az ún. *távolságvektorokat* használjuk: az iteráció minden lépésében ez a vektor tartalmazza az eddigi részkörútbeli, és az azon kívüli városok távolságát.

Kiindulásként ez a vektor az 1. várostól való távolságokat tartalmazza. Ez később, a  $k$ . városnak a részkörútba való bevonása után úgy módosul, hogy a  $k$ . városnak a részkörúton kívüli városoktól mért távolságai és az adott városokra vonatkozó, a távolságvektorban meglévő értékek minimumát kell képezni.

A távolságvektor használatával minden iterációs lépésben  $n$ -nél kisebb számú összehasonlítást végzünk, míg enélkül a távolságmátrix  $n^2$ -tel arányos számú elemét kellene megvizsgálni, és ez nyilvánvalóan lényegesen rontaná a heurisztika műveletigényét.

PÉLDA. Tekintsük ismét a korábban vizsgált utazó ügynök feladatot, amelynek költségmátrixa

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | M | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | M | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | M | 1 |
| 5 | 5 | 5 | 1 | M |

A legközelebbi város beillesztése heurisztika első lépésében az 1 - 1 részkörúthoz a távolságvektor az (1, 5, 5, 5) elemeket tartalmazza (ez a mátrix első sora, a főátlóbeli elem kivételével).

A következő lépésben a részkörutat a 2. várossal bővítjük. A távolságvektorban a 2. városra vonatkozó elemet törölhetjük. A következő vektorelem  $\min(5, 1) = 1$  lesz. A többi komponens nem változik: az új távolságvektor (-,1,5,5).

Az eljárást tovább folytatva az utolsó két képzett távolságvektor rendre (-,-,5,5), illetve (-,-,-,1) lesz.  $\square$



### 3.1.2. A heurisztikus algoritmusok hatásossága vizsgálata

A heurisztikus algoritmusok eredményessége minősítésére három vizsgálati módszerosztály használatos:

- a legrosszabb esetek vizsgálata (worst case analysis),
- a valószínűségi analízis (probabilistic analysis), és
- az empirikus analízis (empirical analysis).

1. Az első megközelítés azt vizsgálja, hogy a legrosszabb lehetséges esetben milyen eltérést kaphatunk a heurisztika által adott közelítő megoldás és a valódi optimum között. Ezt fejezi ki lényegében a *heurisztika aszimptotikus hányadosa*. Legyen  $A$  egy a tekintett  $\mathcal{C}$  problémaosztály feladatai megoldását megközelítő heurisztika,  $A(P)$  a  $P$  feladaton a heurisztika által adott közelítés lehetséges megoldásának célfüggvény értéke, és  $OPT(P)$  a  $P$  feladat optimuma. Ekkor amennyiben

$$M_A = \limsup \left\{ \frac{A(P)}{OPT(P)} \mid P \in \mathcal{C} \right\}$$

létezik, akkor az a heurisztika aszimptotikus hányadosa. Az aszimptotikus hányados értelmezéséhez tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

$$A(P) \leq (M_A + \varepsilon) OPT(P).$$

Ez az összefüggés véges sok eset kivételével érvényes minden  $\mathcal{C}$ -beli feladatra. Mivel minden feladatnak van egy bizonyos (véges) mérete, ezért elegendően nagy feladatméret esetén a fenti feltétel már mindig érvényes, tehát ekkor már minden ekkora feladatra tudjuk, hogy a kapott közelítő megoldás legfeljebb hányszor rosszabb eredményt ad.

Nagyon jó, 1 és 2 közé eső aszimptotikus hányadosok érvényesek egyes *ládapakolási, szabási feladatokra*. Másrészt 1976-ban S. Sahni és T. Gonzalez igazolták, hogy ha létezik aszimptotikus hányados valamely polinomkorlátos TSP heurisztikára, akkor  $P = NP$ .

Ez utóbbi megállapítás alapján arra lehetne következtetni, hogy akkor nem érdemes polinomkorlátos TSP heurisztikákat keresni. Mégis (vö. a lineáris programozás esetét a  $3n$  átlagos, és  $2^n$  legrosszabb esetre vonatkozó iterációszámmal) *speciális* utazó ügynök feladatok esetén számíthatunk jó aszimptotikus hányadosra, és a gyakorlatban előforduló feladatok esetén is lehetnek egyes heurisztikák gyorsak.

2. A valószínűségi analízis (probabilistic analysis) módszere alkalmazása során azonos méretű feladatok paramétereit (együtthatóit) független valószínűségi változóknak tekintjük. Ezek eloszlására alkalmas feltételek teljesülését feltételezzük (gyakran azt, hogy az eloszlások egyenletesek).

Ebben az esetben  $A(P)$ ,  $OPT(P)$ , és ezek hányadosa is valószínűségi változó. Az utóbbi várható értékéből az átlagos eltérésre lehet következtetni. Ezzel a módszerrel szemben az a gyakori kifogás, hogy az eloszlásokra vonatkozó feltételek nem feltétlenül helyesek, márpedig ezek a kapott eredményt döntően befolyásolhatják.

3. Az empirikus vizsgálat konkrét feladatmegoldásból kapott eredményekből képez mutatókat. Az eljárás lényege, hogy nagy számú feladatot generálunk úgy, hogy a feladat együtthatóit valamely adott (általában egyenletes) eloszlással egy rögzített számtartományból választjuk.

Ezekre a problémákra mind a heurisztika által adott közelítést, mind a pontos megoldást meghatározzuk.

Ezután kiszámoljuk a hányadosokat és azok átlagát képezzük. Ha elegendően sok feladatot vizsgáltunk meg, akkor az eredmény, az empirikus hányados jellemezni fogja a vizsgált feladatosztályon a heurisztika közelítéseinek jóságát. Másrészt a számtartománynak a gyakorlati problémák halmazához való viszonya, és a feltételezett eloszlás általában kérdéses.

Összefoglalva az eddigieket, a heurisztikus algoritmusok közelítő megoldásai minőségének jellemzésére érdemes mindhárom tárgyalt módszert használni, hogy így kiegyensúlyozottabb képet kaphassunk.

Az elsőként ismertetett legközelebbi város beillesztése (nearest addition) heurisztika polinomkorlátos, a műveletigénye  $\mathcal{O}(n^2)$ . Nincs rá aszimptotikus hányados.

Ehhez a heurisztikához hasonló, de annál jobb megoldást ad a *legközelebbi város beszúrása* (nearest insertion) nevű eljárás. Ez is egy részkörúttal indul, majd az aktuális részkörutat olyan várossal bővíti, amelynek távolsága a részkörút egyik városához minimális.

Az eltérés abban van, hogy az új várost oda fogjuk beszúrni a részkörútba, ahol a beillesztés a legkisebb össztávolság növekedést okozza. Ez a heurisztika is  $\mathcal{O}(n^2)$  műveletigényű. Másrészt olyan utazó ügynök feladatokra, amelyek költségmátrixa szimmetrikus, és érvényes rá a háromszög egyenlőtlenség, a legközelebbi város beszúrása heurisztika aszimptotikus hányadosa 2. Más szóval véges sok esettől eltekintve legfeljebb kétszer nagyobb lesz a heurisztikával kapott célfüggvény, mint az optimális.

Érdekes, hogy nem mohó algoritmus, de van értelme a *legtávolabbi város beszúrásának* (farthest insertion). Az eljárás beszúrása az előző heurisztika módszerével történik, itt is a lehető legkisebb költség-növekedést jelentő helyre történik a hozzáadás. Az empirikus vizsgálatok szerint ez a jobb, mint az előbbi három.

A *legolcsóbb beszúrás* (cheapest insertion) módszer az eddigiek bizonyos értelmű kiteljesítése: azt a várost választjuk a meglévő részkörút bővítésére, amelyik alkalmas helyre való beszúrása a lehető legkisebb költség-növekedést jelenti. Az eljárás műveletigénye  $\mathcal{O}(n^3)$ , és a korábban már említett szimmetrikus költségmátrixú, a háromszög-egyenlőtlenséget teljesítő költségmátrixú TSP feladatokra az eljárás aszimptotikus hányadosa 2.

Mivel az említett heurisztikák mind viszonylag gyorsak, és ezek eredménye függ az induló város megválasztásától, ezért szokásos a heurisztikus algoritmusokat többször is végrehajtani, eltérő városokból indulva. Ha minden városra lefuttattunk egy heurisztikát, akkor az összevont eljárást szokás *all cities* változatnak nevezni.

Az említetteken kívül használatosak heurisztikák a hozzárendelési feladat megoldásából kapott két vagy több részkörút összekapcsolására is.

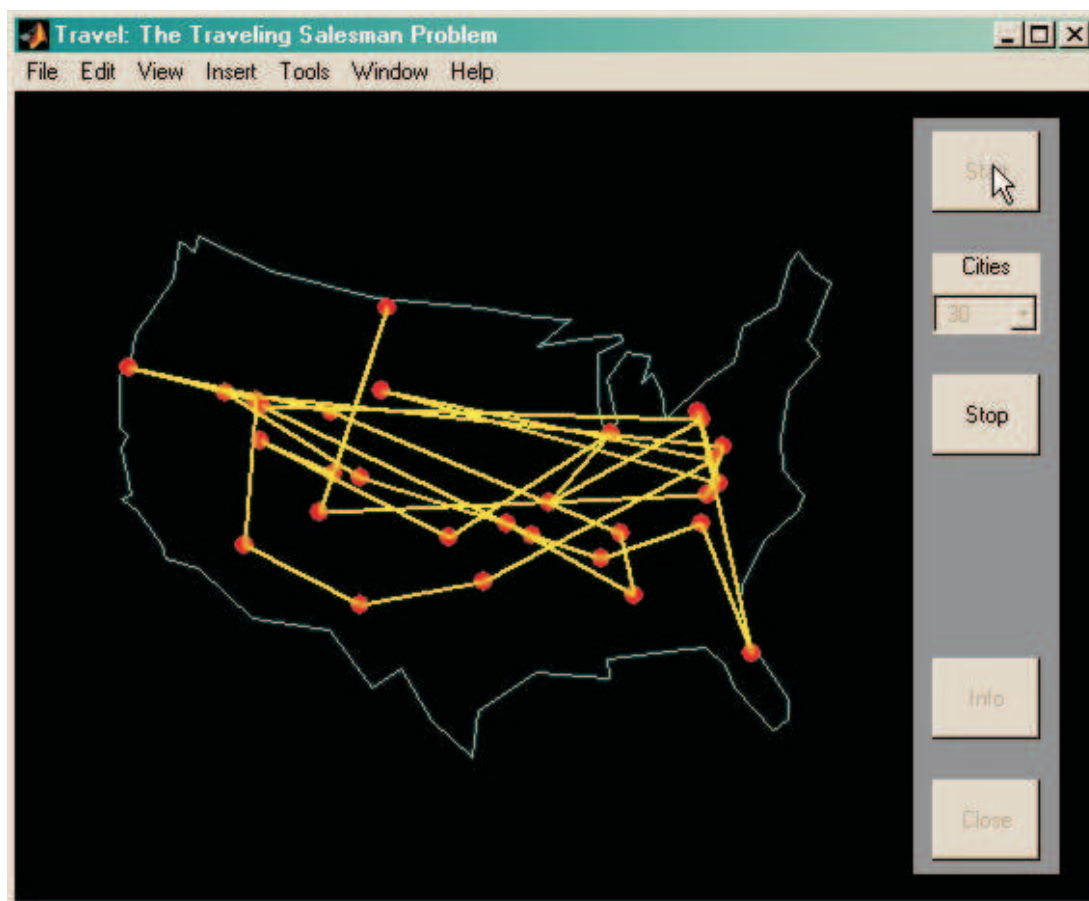
### 3.2. Az utazó ügynök feladat megoldása Matlabbal

Az ábrán az utazó ügynök feladat egy esetének kezdő helyzetét lehet látni. Az Amerikai Egyesült Államok véletlenül generált 30 városa van kiemelve, és a köztük keresett körút kezdeti változata. Figyeljük meg, hogy a jelen helyzet még nagyon távol van az optimális megoldástól, több helyen még az is kérdéses, hogy egyáltalán körút-e a megadott.

A Matlab Help menüsorában a Demos utasítás kiadása után kapott párbeszédés ablakban kérjük a Matlab bemutató programokat, azután a More demos fület válasszuk, majd a kapott listából a Travelling Salesman programot.

A jelen ábra a Corel Draw Capture programjával készült, és a kapott postscript ábra 30-szor nagyobb, mint a következő, amit a Matlab saját export utasítása adott.

A második ábra a feladat közel stabilizálódott közelítő megoldását mutatja. Az ehhez szükséges számítási idő pár másodperc volt.



Az alábbi programrészlet a Matlab utazó ügynök feladatra írt bemutató programjából való. Az eljárás célja nem a gyors megoldás, hanem a feladat nehézségének, és a megoldás menetének illusztrálása volt. A teljes Matlab program kb. 300 soros.

Figyeljük meg a viszonylag könnyen olvasható algoritmust, amely az eddigi közelítő megoldáson azt kísérli meg, hogy egy véletlenül generált körút szakaszon a bejárás sorrendjét az ellenkezőjére változtatja. Amennyiben a beavatkozás sikeres volt, akkor a javított útvonal lesz a továbbiakban a jelölt a megoldásra.

```
% Try a point for point swap
% =====
swpt1=floor(npts*rand)+1;
swpt2=floor(npts*rand)+1;

swptlo=min(swpt1,swpt2);
swpthi=max(swpt1,swpt2);
```

```

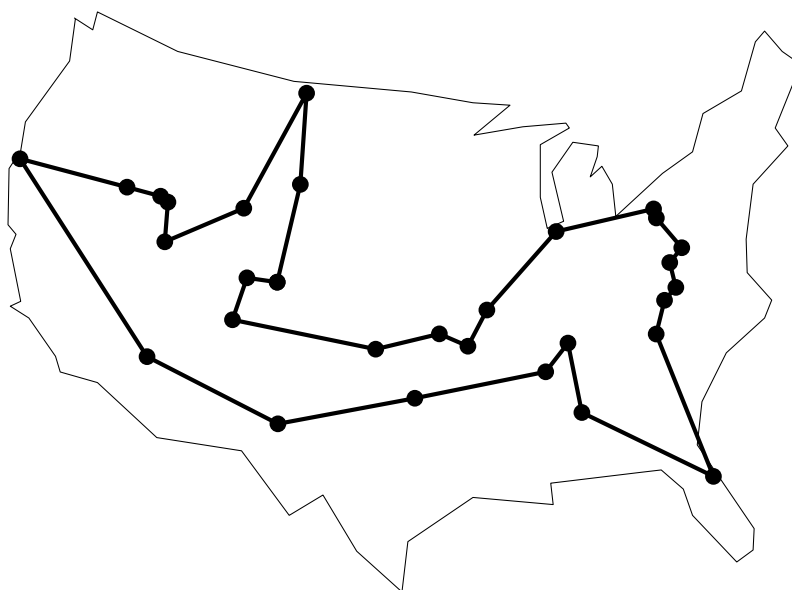
order=1:npts;
order(swptlo:swpthi)=order(swpthi:-1:swptlo);
pnew = p(order);

lennew=LocalPathLength(pnew,distmatrix);
if lennew<len,
    p=pnew;
    len=lennew;
    drawFlag=1;
end;
% =====

```

Érdekes és hatékony a tömbök címzési módja, pl.

```
order(swpthi:-1:swptlo).
```



### 3.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Mutasson olyan feladatot a hétköznapi problémái közül, amely átalakítással megfeleltethető az utazó ügynök feladatnak, vagy tartalmazza azt!
2. Adjon meg olyan egyszerű hozzárendelési feladatot, amelynek optimális megoldása egyben az azonos költségmátrixú utazóügynök feladat megoldása is.

3. Adjon meg olyan egyszerű hozzárendelési feladatot, amelynek optimális megoldása nem megoldása az azonos költségmátrixú utazóügynök feladatnak.

## 4. fejezet

### A szabási feladat

Adott méretű rudak, egyéb munkadarabok leszabása során gyakran felmerül az a feladat, hogy adott hosszúságú nyersanyagból hogyan vágjuk le az előírt összetételű végtermék halmazát úgy, hogy a lehető legkevesebb veszteség maradjon. Ezt a problémát egydimenziós szabási, vagy ládapakolási feladatnak (bin packing) nevezik.

A gyakorlati feladatok közül ide tartozik az, amikor egy építőipari vállalat adott profilú, rögzített hosszúságú fémrudakból a könnyűszerkezetes építkezéshez nagyszámú rövidebb rudat, oszlopot akar levágni, de figyelembe kell venni, hogy a lehető legkevesebb teljes rudat kezdünk meg, vagy az a cél, hogy az eldobandó nyersanyag mennyisége legyen minimális.

Ilyen feladatra vezet az is, ha egy síküveggyárban adott szélességű, hosszú üvegtáblákból kell megadott összetételű (az eredeti tábla szélességét megtartó) üveglapokat kivágni.

A hátzszak feladathoz hasonló megfogalmazást is lehet adni: adottak különböző súlyú tárgyak, ezek mindegyikét el kell helyezni minimális számú hátzszakban úgy, hogy azok közös súlykorlátját ne lépjük túl.

A számítástechnikából azt a problémát idézhetjük, amikor rögzített méretű tárhelyekre (pl. partíciókra) kell különböző méretű adatállományokat úgy elhelyezni, hogy ehhez a minimális számú tárhelyet használjuk fel.

A logisztikában az a feladat, hogy adott teherbírású járművekből mennyit kell minimálisan alkalmazni ahhoz, hogy adott, különböző súlyú tárgyakból álló rakomány elszállítható legyen,...

Többdimenziós szabási feladatot kapunk, ha az elhelyezendő tárgyak több kiterjedését is korlátozzuk, pl. a hosszát és a szélességét. Felmerülhet, hogy ebben az esetben mindenféle vágást megengedünk-e, vagy csak az anyag szélétől széléig menő, ún. guillotine-vágásokat.

Tekintsük először az egydimenziós szabási feladatot L.V. Kantorovicstól származó modelljét. Legyenek adva korlátlan mennyiségben  $K$  hosszúságú félkész termékek, ahol  $K$  pozitív egész. Az egyes végtermékek hossza legyen  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Ezek egyike sem nagyobb  $K$ -nál. A végtermékekből rendre  $r_1, r_2, \dots, r_n$  darabot kell levágni.

A modellben az  $a_j$  vektort lehetséges szabásnak nevezzük, ha

$$a_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{t=1}^n k_t a_{t,j} \leq K.$$

Ezek után jelölje  $A = (a_1, \dots, a_p)$  az összes lehetséges szabásokról előállított mátrixot. Legyen  $r$  az  $r_1, \dots, r_n$  komponensekből álló oszlopvektor, és  $c$  az a sorvektor, amelynek minden eleme egyenlő, egy félkész termék költsége.

Az egydimenziós szabási feladat optimumszámítási modellje ezekkel a paraméterekkel:

$$\min z(x) = cx,$$

feltéve, hogy

$$Ax = r,$$

$$x \geq 0, \quad x \text{ egész}, \quad (r \geq 0).$$

A modell használatának nehézségét az mutatja, hogy már a lehetséges szabások  $A$  mátrixának az összeállítása is komoly problémát jelent.

A célfüggvény konstans együtthatóit az magyarázza, hogy így a célfüggvény a lehetséges szabásokból a minimális darabszámúhoz tartozó megoldást fogja kiválasztani.

Vegyük észre, hogy a megadott modell egy egészértékű lineáris programozási feladat, amely a felírt formában a standard feladatnak felel meg.

PÉLDA. Tekintsünk egy nagyon egyszerű szabási feladatot: a félkész termékek hossza legyen 1, az egyes végtermékeké pedig 0.25 és 0.5. Írjuk elő, hogy összesen 4 darabot kell levágni az első termékből és kettőt a másodikból.

Ahogy könnyen ellenőrizhető, a lehetséges szabások ezek alapján:

$$(0, 0)^T, (0, 1)^T, (0, 2)^T, (1, 0)^T, (1, 1)^T, (2, 0)^T, (2, 1)^T, (3, 0)^T \text{ és } (4, 0)^T.$$

Ezek segítségével felírhatjuk az optimalizálási feladatot:

$$\min z(x) = cx = \sum_{i=1}^9 x_i,$$

feltéve, hogy

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

és

$$x \geq 0, \quad x \text{ egész}, \quad (r \geq 0).$$

A feladat spekulatív megoldása során vegyük észre, hogy  $x_1$  értéke nulla kell hogy legyen az optimális megoldásban, hiszen ez a teljesítendő termékszámhoz nem járul hozzá, de növeli a költséget.

A másik végletet  $x_9$  képviseli, mert egy ilyen felosztású félkész termék felhasználása adja a legtöbb teljesített készterméket. Ilyen szabásokból viszont nem áll össze a teljes szabási előírás.

Másrészt megállapíthatjuk, hogy a jobboldali  $r$  vektor arányait pontosan adja az  $x_7$  változóhoz tartozó szabás. Ebből két darab kell ahhoz, hogy teljesüljön az egyenlőség feltételünk. Ehhez a 2 célfüggvényérték tartozik.

Látható, hogy ennél jobbat nem lehet elérni, mert nincs olyan lehetséges szabás, amelyből egy adná a jobboldali  $r$  vektort. Van viszont még egy optimális megoldás, az  $x_3 = 1, x_9 = 1$  (és minden további  $x_i = 0$ ): ez is kettős célfüggvény értéket ad – és ezzel ki is merítettük az optimális megoldások halmazát.  $\square$

### 4.1. Az oszlopgenerálás módszere a szabási feladatra

A szabási feladat ismertett modellje nehezen használható, elsősorban a lehetséges szabások nagy száma miatt. P.C. Gilmore és R.E. Gomory egyszerűsítették a modellt. Első lépésben elhagyták az egészértékűségi feltételt. Az ezt támogató érvelés szerint az ipari alkalmazásokban a nem egész optimális megoldás egész értékre való valamilyen átalakítása elfogadható. Az oszlopgenerálás módszere ezután a módosított szimplex algoritmust használja, így nem szükséges a teljes  $A$  mátrix ismerete, elegendő annak az oszlopnak az előállítását, amelyben generáló elemet keresünk.

Ahhoz, hogy a módosított szimplex algoritmust használni lehessen, az eddigi

$$\min z(x) = cx,$$

feltéve, hogy

$$Ax = r,$$

$$x \geq 0, \quad (r \geq 0).$$

standard alakú feladatunkat lehetséges kanonikus alakra kell hozni. A bázisváltások legyenek azokhoz a lehetséges szabásokhoz tartozók, amelyek épp az egységmátrixot adják:  $a'_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, a'_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ . Tekintsük ezeket az  $A$  mátrix első  $n$  oszlopának. Ezután már csak annyit kell tenni, hogy minden sornak a  $-c$ -szeresét hozzáadjuk a célfüggvényhez. Ez a művelet épp a bázisváltásokhoz tartozó célfüggvény-együtthatókat fogja nullázni.

Legyen  $d$  egy olyan  $n$  dimenziós vektor, amelynek minden komponense  $c$ . Ezzel a feladatunk a következő lehetséges kanonikus alakban írható:

$$\min z(x) = dr + (c - dA)x,$$

feltéve, hogy

$$Ax = r,$$

$$x \geq 0, \quad (r \geq 0).$$

A következő feladat a legkisebb célfüggvény-együttható meghatározása. Legyen az  $A$  mátrix egy tetszőleges oszlopvektora  $(v_1, \dots, v_n)^T$ . Ez alapján a  $c - \sum_{t=1}^n d_t v_t$  összeg minimumát keressük, ahol a  $d$  vektor  $n$ -dimenziós, és minden komponense  $c$ . Ezt a szélsőértéket ott kapjuk, ahol a  $\sum_{t=1}^n d_t v_t$  összeg maximális. Mivel  $v$  egy lehetséges szabás, ezért  $\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K$ .

A legkisebb célfüggvény-együttható meghatározásához eszerint a következő speciális egészértékű lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\max w(v) = \sum_{t=1}^n d_t v_t,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K,$$

$$v_t \geq 0, \quad \text{egész, } t = 1, \dots, n.$$

Ez a feladat a korábban megismert hátizsák feladat a  $K$  súlykorláttal,  $k_t$  súlyokkal és  $d_t$  értékekkel. Ennek megoldásával tudjuk meghatározni a szabási feladat generáló eleme oszlopát.



A szabási feladat legkisebb célfüggvény-együtthatója és a generálóelem ismeretében végre tudjuk hajtani a módosított szimplex algoritmus egy lépését. Ezután az eddigi lépéseket ismételjük. Az egész eljárás akkor fejeződik be, ha az aktuális hátizsák feladat optimuma nem nagyobb, mint  $c$ . Ekkor az eredeti feladat minden célfüggvény együtthatója nemnegatív.

PÉLDA. Tekintsük ismét az előző nagyon egyszerű szabási feladatot: a félkész termékek hossza 1, az egyes végtermékeké pedig 0.25 és 0.5. Összesen 4 darabot kell levágni az első termékből és kettőt a másodikból. Az optimalizálási feladat átrendezve úgy, hogy az egységmátrix legyen a baloldalon ( $x_1 - x_4$  csere):

$$\min z(x) = cx = \sum_{i=1}^7 x_i,$$

feltéve, hogy

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad (r \geq 0).$$

Az ehhez tartozó táblázat  $c = 1$  értékkel

| $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4 |
| 0     | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0 |

A szimplex táblázat az új,  $c - \sum_{t=1}^n d_t v_t$  célfüggvénnyel:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1    | -1    | -2    | -2    | -3    | -6 |

A leolvasható bázismegoldás azt jelenti, hogy az  $(1, 0)$  szabásból kellene 4 darab, és a  $(0, 1)$  szabásból 2 darab. Ez összesen 6 félkész terméket jelent, ami nyilván még javítható. Oldjuk meg először a feladatot a szimplex algoritmussal.

Itt a második oszlop alapján nem lehetne javítani a célfüggvény értékét (de nem is találnánk benne generáló elemet). A legkisebb negatív célfüggvény együttható az utolsó oszlopot jelöli ki, és ebben az első mátrixelem (a négyes) lesz a generálóelem. A transzformált, következő szimplex táblázat:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1/4  | 1/2   | -1/2  | 1/4   | 3/4   | -3 |

Az előző szimplex táblázat:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1/4  | 1/2   | -1/2  | 1/4   | 3/4   | -3 |

A legkisebb célfüggvény-együttható az  $x_3$  változónak a bázisba lépését jelenti.

|       | $x_2$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_3$ | 1/2   | 0     | 1/2   | 0     | 1/2   | 0     | 0     | 1  |
|       | 1/2   | 1     | 1/4   | 1/2   | 0     | 1/4   | 3/4   | -2 |

Erről a szimplex táblázatról már le lehet olvasni a végeredményt: a 3. és a 9. szabásból kell egyet-egyet venni. Ez lehetséges megoldás lesz, és az ezzel adódó optimális célfüggvény érték 2. Az  $x_7$ -es szabásból kettő is optimális, és ez összhangban is van az eredményünkkel.

Tekintsük most a feladatunkat a Gilmore-Gomory-féle oszlopgenerálásnak megfelelően. A módosított szimplex algoritmusról tanultak miatt az ugyanezen bázismegoldásokon keresztül jut azonos eredményhez. Az eltérés a módosított szimplex algoritmus kivitelezésében, és főleg a legkisebb célfüggvény-együttható előállításában van. Ennek illusztrálásához lépünk vissza a

| $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4 |
| 0     | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0 |

feladathoz. Írjuk fel erre az új bázisváltozó meghatározásához a megfelelő hátizsák feladatot:

$$\max w(v) = \sum_{t=1}^n d_t v_t = \sum_{t=1}^n c v_t = \sum_{t=1}^n v_t,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K, \quad v_t \geq 0, \quad \text{egész, } t = 1, \dots, n.$$

Ez a feladat lényegében azt a lehetséges szabást keresi, amely a végtermékekből a legtöbbet állítja elő.  $\square$

## 4.2. Heurisztikák a szabási feladatra

Az ismertett egzakt módszerek mind nehezen végrehajthatók nagyobb méretű gyakorlati feladatokra. Az alábbi heurisztikák ezzel szemben gyorsan adnak jó közelítő megoldást.

A *first fit módszer* a végtermékeket felsorolási sorban tekinti, az aktuális munkadarabot az első olyan félkész termékre helyezi el, amelyen az elfér. Ebben az értelemben ez egy mohó algoritmus.

A *best fit algoritmus* olyan rudat ad meg, amelyről az aktuális munkadarabot levágva a legkevesebb maradék képződik.

A *worst fit eljárás* pedig értelemszerűen olyan megkezdett rudat választ az aktuális munkadarab levágásához, amelyiken a vágás után a leghosszabb még felhasználható szakasz marad.

Előnyös a leszabandó végtermékeket előzőleg nagyság szerint rendezni. Ez lényegesen javítja a heurisztika eredményét.

Az említetteken felül további egyszerű heurisztikák léteznek. Érdeemes megemlíteni, hogy az eddig tárgyalt szabási problémát *offline szabási feladat*nak is nevezhetjük, hiszen az összes adat ismeretében kellett megoldanunk, és az összes félkész terméket az eljárás teljes tartalma alatt felhasználhattuk a megoldás javításához.

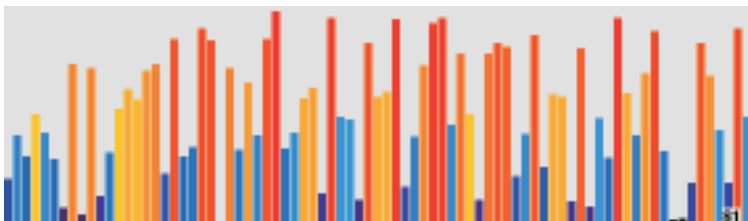
Ezzel szemben online-nak nevezzük a szabási feladatot, ha a leszabandó termékek adatai beérkeztek véglegesen döntenünk kell elhelyezésükről (a többi adat ismerete nélkül), vagy ha egy időben csak adott rögzített számú félkész termékből lehet szabni. Utóbbi esetben ha különben nem tudnánk tovább haladni, akkor valamelyik félkész termék eddigi szabását véglegesnek kell nyilvánítani, és egy újat vonunk be a szabás meghatározásába.

A szabási feladat heurisztikáinak tömör, látványos illusztrációja található a

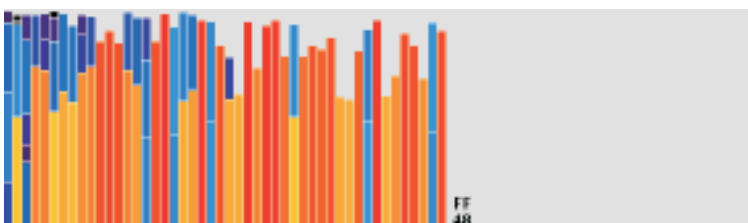
<http://www.cs.arizona.edu/icon/oddsends/bpack/bpack.htm>

címen.

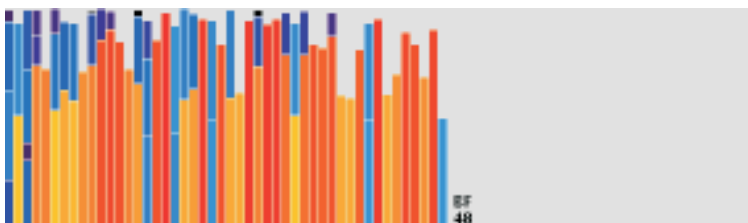
A heurisztikus algoritmusok működését illusztrálja az alábbi öt ábra egy véletlenül generált feladatra:



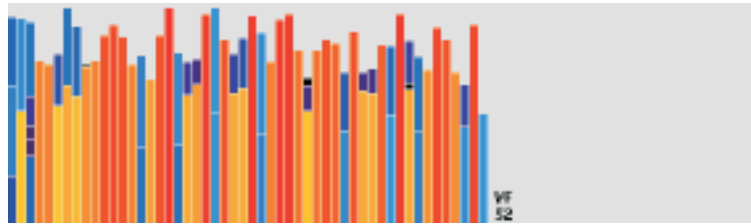
A first fit eredménye:



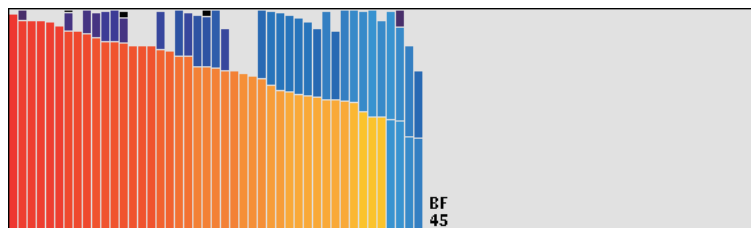
A best fit eredménye:



A worst fit eredménye:



És végül a rendezés utáni best fit adta pakolás:



### 4.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Mutasson olyan egydimenziós szabási feladatot, amelyre minden tanult szabási elhelyezési heurisztika optimális!
2. Mutasson olyan egydimenziós szabási feladatot, amelyre egyik ismertett szabási heurisztika sem optimális!
3. Mit lehet mondani a heurisztikák optimalitásáról olyan feladatokra vonatkozóan, amelyekben minden tárgynak azonos a mérete?



## 5. fejezet

### Hálózati problémák

A hálózati problémákban egy *irányított gráffal* megadott lehetőségek közül az ezekhez köthető optimális folyamatokat akarjuk meghatározni. A hálózati feladatokkal kapcsolatban mindig feltesszük, hogy a hálózat minden élének van hossza. Egy *gráfot*, vagy *hálózatot* két halmazzal adhatunk meg. Az első a *csúcsokat*, a másik az ezekből álló párokat, az *irányított éleket* határozza meg. Egy adott hálózatban megjelölhetünk *kezdőpontot* és *végpontot* is.

#### 5.1. A legrövidebb út probléma

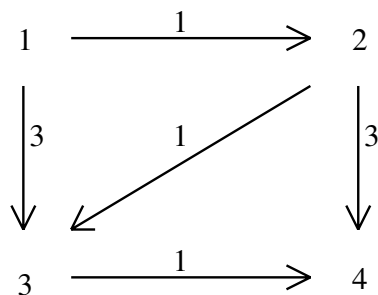
*Láncnak* nevezzük éleknek egy olyan sorozatát, amelyben az egymást követő bármely két élnek egy közös csúcsa van.

Az *út* egy olyan lánc, amelyben az utolsó él kivételével mindegyik él végpontja a sorozatban következő él kezdőpontja. Az  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  és  $(4,3)$  élek láncot adnak, de az nem út. Út és lánc viszont az  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  és  $(3,4)$  élek sorozata.

A legrövidebb út problémája egy hálózatban egy adott csúcsból kiindulva a többi csúcsba vezető legrövidebb út meghatározását jelenti. Ennek megoldására alkalmas *Dijkstra algoritmus* amennyiben minden él hossza nemnegatív:

- Lássuk el az első csúcsot az állandó 0 címkével.
- Minden olyan  $i$  csúcsot lássunk el ideiglenesen az  $(1, i)$  él hosszával mint címkével, amelyhez vezet él az 1 csúcsból. Minden más csúcs (az első kivételével) kapja ideiglenesen a  $\infty$  címkét. A legkisebb ideiglenes címkéhez tartozó egyik csúcs címkéjét állandónak minősítjük.
- Tegyük fel, hogy az  $i$  volt az utolsó, a  $(k + 1)$ . csúcs, amely állandó címkét kapott. Akkor  $i$  a  $k$ -edik legközelebbi csúcs az elsőhöz. Az ideiglenes címkével rendelkező  $j$  csúcsok címkéit módosítsuk az  $(i$  címkéje + az  $(i, j)$  távolsága) értékre, ha ez kisebb, mint  $j$  eddigi ideiglenes címkéje. Ezután ismét adjunk végleges címkét egy olyan csúcsnak, amelynek címkéje a maradék ideiglenes címkék legkisebbike.
- Folytassuk az eljárást amíg minden csúcs állandó címkét nem kap.
- Ha minden csúcsnak végleges címkéje van, akkor az 1. csúcsból egy  $j$  csúcsba vezető legrövidebb utat úgy kapjuk, hogy a  $j$  csúcsból visszafelé haladva olyan csúcsokon keresztül jutunk el az 1. csúcsba, amelyekről a rákövetkezőbe vezető él hossza épp a két címke különbsége.

PÉLDA. Tekintsük azt az egyszerű legrövidebb út feladatot, amelyben négy városunk van: 1, 2, 3 és 4, és a köztük levő távolságot a következő ábra adja:



Ez kb. egy olyan elhelyezésnek felel meg, amikor a városok egy álló téglalap csúcaiban vannak, de az 1 - 4 átló nem járható.

A Dijkstra algoritmus első lépése az 1. városból indulva a következő címkézést adja:

$$[0^*, \infty, \infty, \infty],$$

ahol a  $*$  azt jelzi, hogy az illető címke végleges.

A következő lépésben meghatározzuk az első várostól mért távolságok alapján annak szomszédainak ideiglenes címkéjét:

$$[0^*, 1, 3, \infty].$$

Az új, ideiglenes címkék közül véglegesítjük a legkisebbet:

$$[0^*, 1^*, 3, \infty].$$

Képezzük most a végleges címkéjű városoktól mért távolságok alapján az új, javított címkéket:

$$[0^*, 1^*, 2, 4].$$

Itt a harmadik címke kettes értéke úgy adódott, hogy a kettes város végleges címkéje + a második és a harmadik város távolsága kisebb mint a korábbi ideiglenes címke értéke, a három. Kössük le ismét az ideiglenes címkék közül a legkisebbet:

$$[0^*, 1^*, 2^*, 4].$$

Az utolsó ideiglenes címkét ismét lehet javítani, és az ezután már végleges is lesz:

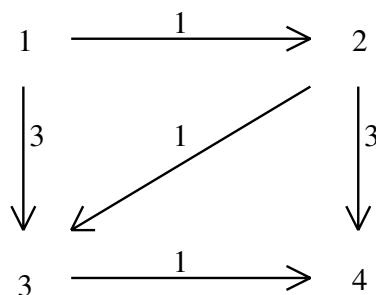
$$[0^*, 1^*, 2^*, 3^*].$$

Ebből az első és negyedik város közti legrövidebb út 3 hosszú: 1 - 2 - 3 - 4.

## 5.2. A maximális folyam probléma

Egyes döntési helyzetekben olyan hálózatot kell vizsgálni, amelyben az éleknek kapacitások feleltethetők meg. A kérdés az, hogy az egyik kitüntetett csúcsból, a forrásból egy másikba, a nyelőbe mi a maximális eljuttatható mennyiség a hálózat és a kapacitások figyelembevételével. Ezt a feladatot nevezik a *maximális folyam problémának*.

Tekintsük a korábbi hálózatot úgy, hogy az élekre írt számok a kapacitásokat jelentik, az egyes csúcs a *forrás* és a négyes a *nyelő*:



A későbbi eljárás kedvéért vezessünk be egy *mesterséges élet* a nyelőtől a forrásig. A feladat lineáris programozási feladatként való megfogalmazásához jelölje az  $x_{ij}$  változó az  $(i, j)$  élen áthaladó anyagmennyiséget.

Egy lehetséges folyamatot kapunk például a következő változó értékekkel:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{23} = 0, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1.$$

Az ehhez tartozó teljes átfolyó mennyiség 2. A lehetséges folyamatoknak eleget kell tenniük a következő két feltételnek:

1. minden élre az élen átmenő folyam nemnegatív és nem nagyobb, mint a megadott élkapacitás, és
2. minden csúcsra igaz az, hogy a bejövő folyam mennyisége megegyezik a kimenő folyaméval.

Az utóbbi feltételt folyammegőrzési feltételnek nevezzük. A probléma lineáris programozási feladatként való megfogalmazásában a fenti feltételek mellett az  $x_0$  célfüggvényt kell maximalizálni, ahol  $x_0$  a nyelől a forrásba vezető mesterséges élen átmenő folyam mértéke.

Az említett példára vonatkozó lineáris programozási feladat ez alapján:

$$\max x_0 = x_{24} + x_{34},$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} x_{12} &\leq 1, \\ x_{23} &\leq 1, \\ x_{13} &\leq 3, \\ x_{24} &\leq 3, \\ x_{34} &\leq 1, \\ x_0 &= x_{24} + x_{34}, \\ x_{13} + x_{23} &= x_{34}, \\ x_{12} &= x_{23} + x_{24}, \\ x_0 &= x_{12} + x_{13}. \end{aligned}$$

Ez egy hatváltozós lineáris programozási feladat 4 egyenlőség és 5 egyenlőtlenség feltétellel. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy a korábban említett

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{23} = 0, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1$$



lehetséges megoldás egyben optimális is. Ez azon múlik, hogy a 4. csúcsba 2-nél nagyobb folyam nem folyhat be (figyelembe véve a 2. csúcsba bemenő folyamot).

Állapítsuk meg, hogy lehetséges megoldást könnyű megadni a maximális folyam problémához: ha minden élen nulla mennyiséget szállítunk, az megfelel a feltételeknek.

Jelöljük  $I$ -vel azon élek halmazát, amelyeken kisebb a jelenleg átmenő folyam az él kapacitásánál. Jelölje  $R$  azon élek halmazát, amelyeken a jelenlegi folyam pozitív, ez csökkenthető. Legyenek  $i(x, y)$ , illetve  $r(x, y)$  a megfelelő változtatási korlátok.

### 5.3. A Ford-Fulkerson eljárás a maximális folyam meghatározására

Tekintsük először a címkézési eljárást:

**1. lépés.** Címkézzük meg a forrást.

**2. lépés.** Címkézzük meg a csúcsokat és az éleket a forrásba vezető mesterséges él kivételével a következő szabályok szerint.

Ha az  $x$  csúcs már kapott címkét, de az  $y$  még nem, és  $(x, y) \in I$ , akkor címkézzük meg az  $y$  csúcsot és az  $(x, y)$  élt. Ekkor az  $(x, y)$  élt *előremenő élnek* hívjuk.

Ha az  $x$  csúcs már kapott címkét, de az  $y$  csúcs még nem, és  $(y, x) \in R$ , akkor címkézzük meg az  $y$  csúcsot és az  $(y, x)$  élt. Az utóbbit *hátramenő élnek* nevezzük.

**3. lépés.** Folytassuk a címkézési eljárást, amíg a nyelő címkét nem kap, vagy már nem lehet további csúcsokat címkével ellátni.

Ha a címkézéssel elérjük a nyelőt, akkor lesz a forrás és a nyelő között egy címkézett élekből álló lánc. Jelölje ezt  $C$ . A  $C$ -beli éleken átmenő folyam alkalmas módosításával egyrészt megőrizhetjük a folyam lehetőségességét, másrészt növelhetjük a folyamot.

A Ford-Fulkerson módszer a fentiek alapján:

**1. lépés.** Keressünk egy lehetséges folyamot (a minden élen 0 értékű folyam mindig lehetséges).

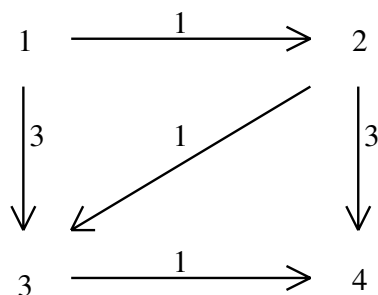
**2. lépés.** A címkézési eljárással kíséreljük meg elérni a nyelőt. Ha nem lehet a nyelőt így megcímkézni, akkor az aktuális lehetséges folyam maximális. Ha elértük a nyelőt, akkor folytassuk az eljárást a 3. lépésnél.

**3. lépés.** Határozzunk meg egy magasabb értékű lehetséges folyamot úgy, hogy a megcímkézett láncan az előremutató élek értékeit növeljük, a hátramutatókat pedig csökkentjük a

$$k = \min \left\{ \min_{(x,y) \in C \cap R} r(x, y), \min_{(x,y) \in C \cap I} i(x, y) \right\}$$

értékkel. Folytassuk az algoritmust a 2. lépéssel.

PÉLDA. Tekintsük ismét a



maximális folyam feladatot.

Az első lépés egy lehetséges folyam meghatározása. Legyen ez az, amelyik minden élhez a nulla folyamot rendeli hozzá.

Ezután kezdünk egy címkézési eljárást. Először a forrás, az 1. csúcs kap címkét, majd ez alapján egy olyan él, ami ebből kivezet. Most ez esetben címkét kap a 2. csúcs, és az  $(1, 2)$  él. Ezt folytatva a nyelőig tartó címkézett láncot (most utat) kapunk:

$$1 - 2 - 3 - 4.$$

Az előző lánc csak előremenő éleket tartalmaz. A lehetséges folyambővítési lehetőségek rendre:

$$i(1, 2) = 1, \quad i(2, 3) = 1 \quad \text{és} \quad i(3, 4) = 1.$$

Ez alapján az eddigi folyam a címkézett láncunk mentén 1-el növelhető. Ez alapján az ehhez tartozó lehetséges folyam értéke 1.

A lehetséges folyam javítása során azokat az éleket kell vizsgálni a címkézés során, amelyek kapacitását még nem merítettük ki. Ezek alapján már csak egy címkézhető láncot lehet képezni, amely eléri a nyelőt, ez az

$$1 - 3 - 2 - 4.$$

Ezen belül a  $3 - 2$  él hátramutató, ennek értékét legfeljebb 1-el lehet csökkenteni. Az eddigi lehetséges folyam ismét 1-el növelhető. Ezután a lehetséges folyam:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1.$$

Ennek a lehetséges folyamnak az értéke 2.

Ezután látható, hogy további címkézett láncot már nem lehet képezni, tehát az előző lehetséges folyam egyben maximális is.  $\square$

Legyen  $V'$  egy hálózat csúcsainak tetszőleges olyan halmaza, amely tartalmazza a nyelőt, de nem tartalmazza a forrást. Ekkor a hálózat olyan  $(i, j)$  éleinek halmazát, amelyek  $i$  kezdőcsúcsa nem  $V'$ -beli, a  $j$  végpont viszont  $V'$ -beli, a hálózat egy vágásának nevezzük. A vágás tehát élek egy olyan halmaza, amelyeket ha elhagyunk a hálózatból, akkor a forrásból a nyelő a továbbiakban már nem lesz elérhető.

A vágás kapacitása a vágást alkotó élekből a forrástól a nyelő felé vezetőinek kapacitásainak összege. A következő két segédétel adja meg a vágások és a maximális folyamok közti összefüggést.

SEGÉDTÉTEL. A forrásból a nyelőbe vezető folyamok erősségét bármelyik vágás kapacitása felülről korlátozza.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük egy hálózat valamely  $V'$  vágását. A hálózat többi csúcsának halmaza legyen  $V$ . Válasszunk egy tetszőleges folyamat, legyen ennek értéke  $f$ , az  $(i, j)$  élen áthaladó mennyiséget pedig  $x_{ij}$ . Összegezzük a  $V$ -beli összes csúcsra a folyammegőrzési feltételeket. Ez azt adja, hogy mivel kiesnek az olyan élekre vonatkozó tagok, amelyek mindkét végpontja  $V$ -ben van, ezért

$$\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij} - \sum_{i \in V', j \in V} x_{ij} = f.$$

Az ebben az egyenletben szereplő első összeg egyenlő a  $V'$ -nek megfelelő vágás kapacitásával. Mivel minden  $x_{ij}$  érték nemnegatív, így a második összeg is nemnegatív. Ebből adódik a segéd-tétel állítása: a folyamatok értéke legfeljebb annyi lehet mint a vágásoké.  $\square$

A segédteletből az is következik, hogy bármely vágás értéke felső korlátja a forrásból a nyelőbe áramló maximális folyam értékének. Tehát ha találunk egy olyan lehetséges folyamat, amelynek értéke egyenlő egy vágás kapacitásával, akkor találtunk egy maximális folyamat. Ez egy fajta gyenge dualitást fejez ki.

Tekintsük most azt az esetet, amikor egy adott lehetséges folyamra vonatkozóan a címkézési eljárás nem tudja elérni a nyelőt. Legyen ekkor a címkézetlen csúcsok halmaza által meghatározott a vizsgált vágás.

SEGÉDTÉTEL. Ha a címkézési eljárás nem tudja elérni a nyelőt, akkor a kimaradó, nem címkézett csúcsok által meghatározott vágás kapacitása megegyezik az aktuális folyam erősségével.

BIZONYÍTÁS. Legyen a korábbi jelöléseknek megfelelően  $V$  az aktuális folyam mellett megcímkézett csúcsok halmaza, és  $V'$  pedig a címkézetleneké. Tekintsünk egy  $(i, j)$  élet a vágásból, úgy, hogy  $i \in V$  és  $j \in V'$ . Ekkor az  $x_{ij}$  értéknek egyenlőnek kell lennie az  $(i, j)$  él kapacitásával, hiszen különben tovább tudtunk volna haladni egy megfelelő előremenő éllel, és akkor  $j$  nem a  $V'$ -be tartozna.

Tekintsünk ezután egy olyan  $(i, j)$  élt, amelyre  $i \in V'$  és  $j \in V$ . Ekkor viszont  $x_{ij} = 0$  kell hogy teljesüljön, hiszen különben a címkézési eljárásban egy hátramenő éllel el tudtuk volna érni az  $i$  csúcsot, és így az nem tartozhatna a  $V'$  halmazba.

Az aktuális lehetséges folyamra tehát az teljesül az előző segédteletben igazolt

$$\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij} - \sum_{i \in V', j \in V} x_{ij} = f$$

egyenlet alapján, hogy a jelen vágás kapacitása egyenlő a  $\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij}$  összeggel, és az adott folyam erősségével.  $\square$

Az eddigi megállapítások szerint tehát amikor a nyelőt nem lehet megcímkézni a forrásból indulva, akkor az aktuális lehetséges folyam egy maximális folyam. Ez összhangban van a Ford-Fulkerson módszerrel.

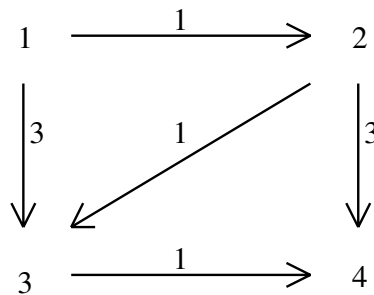
## 5.4. Projektek ütemezése, CPM

Az összetett munkafolyamatok rögzített befejezési időponttal való teljesítése gondos tervezőmunkát igényel. Ennek része az összefüggő események sorrendjének, időzítésének vizsgálata hálózati modellek segítségével.

Erre a célra két eljárást szokás használni. Ha az egyes munkafolyamatok végrehajtási ideje biztosan tudható, akkor a *kritikus út módszer* (Critical Path Method, CPM), míg ha a tevékenységek időtartama bizonytalan, akkor a *program kiértékelési és felülvizsgálati technika* (Program Evaluation and Review Technique, PERT) használatos. Mindkét eljárást az ötvenes években fejlesztették ki. Számos nagy és kritikus projekt tervezésekor használták ezeket a módszereket, pl. nagy szoftver rendszerek határidős kidolgozásánál, űrkutatási projektekben, vagy épp rakétaindítások visszaszámlálási eljárásának kidolgozásában.

Mindkét eljárásához szükség van a projektet alkotó tevékenységek listájára. A projektet akkor tekintjük befejezettnek, ha minden részfeladata befejeződött. Minden tevékenységnek lehetnek *előzményei*, olyan munkafolyamatok, amelyeknek előbb be kell fejeződni ahhoz, hogy az adott tevékenység elkezdődhessen. A munkafolyamat lépéseinek ilyen összefüggését egy projekt-hálózattal adjuk meg.

A tevékenységeket a hálózat gráfjának irányított élei definiálják, a csúcsok pedig a tevékenységek csoportjainak befejezését jelzik. A csúcsokat emiatt *eseménynek* is nevezzük. Az ilyen projekt-hálózatot AOA (Activity On Arc) hálózatnak nevezzük. Ennek illusztrálásához tekintsük ismét a korábbi ábránkat:



Ezen most az 1. csúcs jelzi a projekt kezdetét, a 4. a *befejezés csúcs*. A 2. csúcs az egy hosszú első tevékenység végét, és a 3., illetve 4. csúcsokba vezető munkalépések kezdetét jelzi. Ha egy csúcsba több él is befut (mint pl. a 3. csúcsba), akkor ez azt jelenti, hogy mindkét korábbi tevékenységnek be kell fejeződnie ahhoz, hogy az esemény utáni megkezdődhessen. Az előzmények nélküli tevékenységeket az első csúcsból kiinduló élekkel adjuk meg.

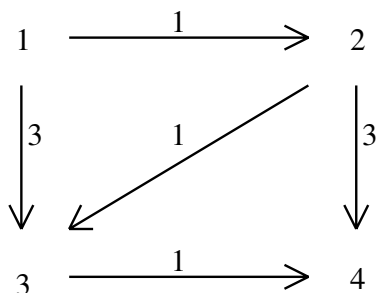
A projekt-hálózatot alakítsuk ki úgy, hogy egy tevékenység végét mutató csúcs sorszáma mindig nagyobb legyen, mint a kezdetét jelzőé. Ennek a szabálynak persze több reprezentáció is megfelel. További feltétel, hogy két adott csúcs között csak egy él mehet. Feltesszük még, hogy egy tevékenységet csak egy él reprezentálhat.

Az utóbbi két feltétel kielégítéséhez szükség lehet az ún. *fiktív tevékenységekre*. Például abban az esetben, amikor az *A* és *B* munkafolyamatok azonos feltétellel hajthatók végre, és mindkettő közvetlen előzménye a *C* tevékenységnek. Ilyen esetben a *B* lépést egy új csúcshoz köthetjük, ahonnan egy nulla időtartamú fiktív tevékenység új *D* éle adja a *C* munkafolyamat megkezdésének feltételét.

Tekintsük most a következő projekt feltételrendszert:

| Tevékenység                 | Előzmények | Időtartam (nap) |
|-----------------------------|------------|-----------------|
| A = anyagbeszerzés          | –          | 1               |
| B = alkalmazottak kiképzése | –          | 3               |
| C = segédanyag termelése    | A          | 1               |
| D = válogatás és csomagolás | A          | 3               |
| E = szakmunka               | B, C       | 1               |

Ennek a projektnek épp a korábbi irányított éleket tartalmazó gráfunk felel meg az egyes csúccsal mint a projekt kezdetével, és a négyes csúccsal mint befejezés csúccsal:



Vegyük észre, hogy bár csak a  $B$  és  $C$  tevékenységeket tüntettük fel, mint az  $E$  munkafázis előfeltételét, de a hálózat összefüggései miatt az  $A$  folyamatnak is be kell fejeződnie az  $E$  megkezdése előtt.

A CPM két kulcsfogalma az esemény *korai időzítése* (Early event Time,  $ET$ ), és a *kései időzítés* (Late event Time,  $LT$ ). Az  $i$  csúcs korai időzítése,  $ET(i)$  az a legkorábbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet. Ennek megfelelően az  $i$  csúcs kései időzítése,  $LT(i)$  az a legkésőbbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet anélkül, hogy a projekt előírt befejezési időpontját késleltetné. Meg lehet mutatni, hogy  $ET(i)$  a kezdőponttól az  $i$  csúcsba vezető leghosszabb út hossza.

A projekt korai időzítésének kiszámolását az egyes csúccsal kezdjük,  $ET(1) = 0$  adódik erre. Ebből kiindulva meghatározzuk a további  $ET(i)$  értékeket az élek adta összefüggéseknek megfelelően. Ha egy csúcsba több él is befut, akkor a csúcs korai időzítése az előző összes részfolyamat teljesülését feltételezi.

Ez alapján az  $ET(i)$  korai időzítés meghatározását a következő lépések adják:

1. lépés Keressük meg az  $i$  csúcsba befutó élek kezdő csúcspontjait. Ezek az események az  $i$  esemény *közvetlen előzményei*.
2. lépés Az  $i$  esemény minden közvetlen előzményének  $ET$  értékéhez adjuk hozzá az  $i$ -be vezető megfelelő élhez tartozó tevékenység időtartamát.
3. lépés  $ET(i)$  egyenlő az előző lépésben számított összegek maximumával.

PÉLDA. Határozzuk meg a fenti projekt-hálózat korai időzítési értékeit! Definíció szerint  $ET(1) = 0$ . Az  $ET(2)$  érték közvetlenül az  $ET(1) + 1$  összegből adódik, mert a 2. csúcsba csak egy él fut be. A következő csúcsra már két tevékenység teljesülését kell vizsgálni:  $ET(3) = \max\{ET(1) + 3, ET(2) + 1\} = \max\{0 + 3, 1 + 1\} = \max\{3, 2\} = 3$ . Az utolsó csúcsra pedig  $ET(4) = \max\{ET(2) + 3, ET(3) + 1\} = \max\{1 + 3, 3 + 1\} = \max\{4, 4\} = 4$ .

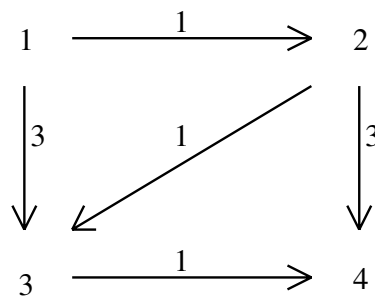
Ez alapján a teljes projekt befejezésének legkorábbi időpontja 4. □

A kései időzítés meghatározását visszafelé, az utolsó, a befejezési csúcsból kiindulva kezdjük. Ebben az eljárásban ha egy  $i$  csúcsot több esemény követ, az utóbbiakra korábban számított  $LT$  értékekből le kell vonni az  $i$  csúcsból ezekhez vezető él hosszát. Az így kapott időpontok közül a legkorábbira teljesülnie kell az  $i$  eseménynek, hiszen csak ebben az esetben tartható a kitűzött határidő a teljes projekt teljesítésére.

Általában a befejezési csúcs kései időzítésének olyan időpontot szokás választani, amely alatt az mindenképpen elérhető az egyes csúcsból. Amennyiben az  $LT(j)$  kései időzítési értékek mind ismertek a  $j > i$  indexekre, az  $LT(i)$  a következő eljárással számítható:

1. lépés Keressük meg azokat a csúcsokat, amelyekbe megy él az  $i$  csúcsból. Ezek az események az  $i$  esemény közvetlen követői, utódai.
2. lépés Az  $i$  esemény minden közvetlen utódának  $LT$  értékéből vonjuk le az  $i$ -ből az utódba vezető élhez tartozó tevékenység időtartamát.
3. lépés  $LT(i)$  egyenlő az előző lépésben számított értékek minimumával.

PÉLDA. Határozzuk meg a kései időzítés értékeket a jól ismert irányított gráfunkra:



Legyen az  $LT(4)$  érték 4, hiszen ekkorra a projekt befejezhető. Innen  $LT(3) = 4 - 1 = 3$ , hiszen a 3. csúcsnak csak a 4. az utódja. Ezután  $LT(2) = \min\{LT(4) - 3, LT(3) - 1\} = \min\{4 - 3, 3 - 1\} = \min\{1, 2\} = 1$ . Hasonlóan  $LT(1) = \min\{LT(3) - 3, LT(2) - 1\} = \min\{3 - 3, 1 - 1\} = \min\{0, 0\} = 0$ . Eszerint legkésőbb 4 időegységgel kell a projektet kezdeni a tervezett teljes készülségi esemény előtt.  $\square$

Amennyiben egy  $i$  csúcsra  $ET(i) = LT(i)$ , akkor az illető csúcsban való minden késedelem a projekt határidejének lekésését jelenti. Esetünkben a  $(2, 4)$  él 2-re változtatása azt eredményezné, hogy a 2. esemény 1 egységgel később kezdődne a projekt befejezésének késedelme nélkül: ekkor  $ET(2) = 1$ , és  $LT(2) = 2$ .

A projekt tervezésekor fontos ismeret az, hogy az egyes tevékenységek mekkora késedelme nem veszélyezteti még a teljes projekt határidőre való befejezését. Egy tevékenység, illetve az ennek megfelelő  $(i, j)$  él *tűrőhatára* az a  $TH(i, j)$  szám, amennyivel a tevékenység kezdete a legkorábbi lehetséges időponttól eltolódhat anélkül, hogy a projekt befejezése elkésne – a többi tevékenység pontos végrehajtását feltételezve.

Legyen  $t_{ij}$  az  $(i, j)$  tevékenység hossza. Az  $(i, j)$  tevékenység késése mellett akkor tartható a projekt eredeti határideje, ha az  $i$ . esemény korai időzítése + az  $(i, j)$  tevékenység hossza + a  $k$  tűrőhatár még mindig a  $j$ . esemény kései időzítésénél nem későbbi időpontot ad. Eszerint

$$ET(i) + t_{ij} + k \leq LT(j),$$

amiből a tűrőhatárra

$$TH(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

adódik.

A példánkra adódó tűréshatárok:

$$TH(1, 2) = LT(2) - ET(1) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0,$$

$$TH(1, 3) = LT(3) - ET(1) - 3 = 3 - 0 - 3 = 0,$$

$$TH(2, 3) = LT(3) - ET(2) - 1 = 3 - 1 - 1 = 1,$$

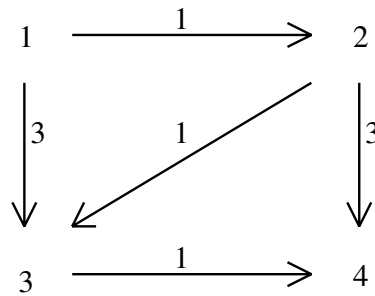
$$TH(2, 4) = LT(4) - ET(2) - 3 = 4 - 1 - 3 = 0,$$

$$TH(3, 4) = LT(4) - ET(3) - 1 = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Ennek megfelelően csak a (2, 3) tevékenység halasztható (egy egységgel) anélkül hogy ez a teljes projekt csúszását okozná.

A nulla tűréshatárú tevékenységek bármilyen elhúzódnása késlelteti a projekt befejezését. Ezért az ilyen éleket *kritikus tevékenység*nek nevezzük. A csak kritikus tevékenységekből álló, a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető utat *kritikus útnak* hívjuk.

A vizsgált példánkon az (1, 2) és (2, 4) tevékenységek például egy kritikus utat adnak meg, mert ezekre a tűréshatár nulla volt.



Természetesen egy projekt grájában több kritikus út is lehet. A tevékenységek flexibilitásának a tűréshatár mellett további mérőszáma a *mozgáshatár*: Egy tevékenység, illetve az ezt reprezentáló  $(i, j)$  él mozgáshatára az az időtartam, amennyivel a tevékenység kezdete (vagy hossza) elhúzódhat anélkül, hogy ezzel bármely későbbi tevékenység kezdési időpontja a korábbi kezdési időpontjánál későbbre tolódna. Ennek jelölése  $MH(i, j)$ .

A mozgáshatár meghatározását a tűréshatárhoz hasonlóan tehetjük meg: tegyük fel, hogy az  $i$ . esemény bekövetkezése, illetve az  $(i, j)$  tevékenység hossza  $k$  időegységnyit tolódik. Ebben az esetben a  $j$  esemény akkor nem csúszik az  $(i, j)$  tevékenység miatt, ha

$$ET(i) + t_{ij} + k \leq ET(j).$$

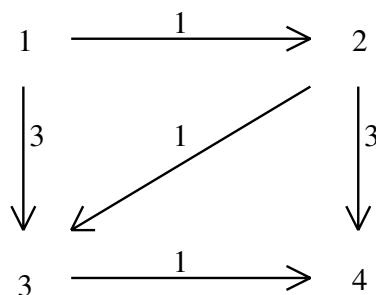
Ebből a mozgáshatár definíciója:

$$MH(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}.$$

Mivel a példánkra az  $ET(i)$  értékek megegyeznek a megfelelő  $LT(i)$  értékekkel, ezért a mozgáshatárok is megegyeznek a korábbi tűréshatárokkal.

A kritikus út meghatározásának egyik lehetséges módja az ismertetett módszer a tűréshatár értékek kiszámításával, majd ezek ismeretében a nulla tűréshatárú élekből álló út megkeresése a kezdés csúcsból a befejezés csúcsig.

Emellett a kritikus út meghatározására lineáris programozási feladatot is fel lehet írni, amely tükrözi az eredeti probléma sajátosságait. Tekintsük példafeladatunkat ismét:



Jelölje  $x_i$  az  $i$ . esemény bekövetkeztének időpontját. Minden  $(i, j)$  tevékenységre érvényes, hogy a  $j$  esemény előtt be kell következnie az  $i$ -nek, és az  $(i, j)$  tevékenységnek is be kell fejeződnie. A kritikus út meghatározása a  $z = x_F - x_1$  függvény minimalizálását jelenti, ahol  $F$  a befejezés csúcs. A példánkra adódó lineáris programozási feladat innen:

$$\min z = x_4 - x_1,$$

feltéve, hogy

$$x_2 \geq x_1 + 1,$$

$$x_3 \geq x_1 + 3,$$

$$x_3 \geq x_2 + 1,$$

$$x_4 \geq x_2 + 3,$$

$$x_4 \geq x_3 + 1.$$

A változókra érdemes nemnegativitási feltételt alkalmazni, sőt,  $x_1 = 0$  természetes választás lehet. Az utóbbi feltételek nélkül az Excel a -2, -1, 1, 2 értékeket adta, és a kritikus út hosszára 4-et kaptunk. Ha  $x_1$  értékét rögzítettük nullára, akkor az optimális megoldás megfelelően a 0, 1, 3, 4 értékekre módosult.

A kritikus út meghatározására felírt lineáris programozási feladatnak általában sok optimális megoldása van (főleg ha több tűréshatár pozitív).

Reális és gyakori feladat az, hogy egy projekt-hálózat ismert kritikus út megoldását módosítani kell úgy, hogy a teljes projekt időtartamát kell csökkenteni minimális költséggel – feltételezve, hogy minden tevékenység hossza csökkenthető egy ismert költség fejében.

Módosítsuk a példánkat annyiban, hogy minden tevékenység hossza csökkenthető féllal a következő költségek megfizetése esetén: 1, 2, 3, 4, 5. Legyenek az új változók, amelyek az egyes tevékenységek lerövidítésének mértékét adják, rendre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  és  $E$ . A cél azt meghatározni, hogy hogyan kell ütemezni a projektet ahhoz, hogy az eredeti 4 hosszú végrehajtás 3.5-re módosuljon, és a tevékenységek gyorsításának összköltsége minimális legyen. Az ennek megfelelő lineáris programozási feladat:

$$\min z = 2A + 4B + 6C + 8D + 10E,$$

feltéve, hogy

$$A \leq 0.5, \quad B \leq 0.5, \quad C \leq 0.5, \quad D \leq 0.5, \quad E \leq 0.5,$$

$$x_2 \geq x_1 + 1 - A,$$

$$x_3 \geq x_1 + 3 - B,$$



$$x_3 \geq x_2 + 1 - C,$$

$$x_4 \geq x_2 + 3 - D,$$

$$x_4 \geq x_3 + 1 - E,$$

$$x_4 - x_1 \leq 3.5.$$

Itt  $x_1 = 0$ , és  $A, B, C, D, E$  nemnegatív. Az optimális megoldás

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 2.5, x_4 = 3.5, \quad A = 0.5, B = 0.5, C = D = E = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az (1, 2) és az (1, 3) tevékenységeket kell postamunkában végezni.

## 5.5. Program kiértékelés és felülvizsgálat, PERT

A CPM, a kritikus út módszere azt feltételezi, hogy a tevékenységek időtartama ismert. A projekt lerövidítési vizsgálat kivételével a munkafolyamatok hossza rögzített. Ezzel szemben a PERT megközelítés a tevékenységek időtartamában a bizonytalanság figyelembevételét is lehetővé teszi.

A PERT egy munkafolyamat időtartamáról három adatot vesz számításba:

- $a$  = a tevékenység legrövidebb lehetséges időtartama,
- $b$  = a tevékenység leghosszabb lehetséges időtartama, és
- $m$  = a tevékenység időtartama legvalószínűbb értéke.

Jelölje a  $T_{ij}$  valószínűségi változó az  $(i, j)$  munkafolyamat időtartamát. A PERT megközelítés felteszi, hogy ezek a valószínűségi változók béta eloszlásúak. Amennyiben a  $T_{ij}$  valószínűségi változó béta eloszlást követ, akkor várható értéke és szórásnégyzete (varianciája):

$$E(T_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6},$$

$$\text{var } T_{ij} = \frac{(b - a)^2}{36}.$$

A PERT feltételezi azt is, hogy a munkafolyamatok időtartamai egymástól független valószínűségi változók. Ebben az esetben a projekt-hálózat egy útjának időtartama mint valószínűségi változó

$$\sum_{(i,j) \in \text{út}} E(T_{ij}),$$

az út teljes idejének varianciája pedig

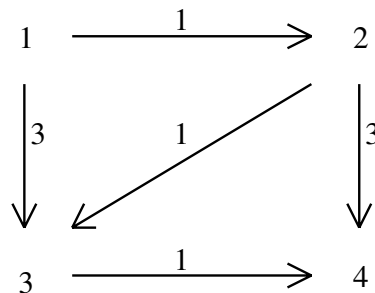
$$\sum_{(i,j) \in \text{út}} \text{var } T_{ij}.$$

Jelölje most a  $CP$  valószínűségi változó a CPM által meghatározott kritikus út tevékenységeinek teljes időtartamát. A PERT feltételezi, hogy a kritikus útban elegendően sok tevékenység szerepel ahhoz, hogy alkalmazni lehessen a centrális határeloszlás tételt, és így megállapíthatjuk, hogy a

$$CP = \sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} T_{ij}$$

valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlású.

PÉLDA. Tekintsük ismét a korábbi projekt-hálózatunkat :



Ehhez most meg kell adni az egyes munkafolyamatok időtartamának eloszlás-paramétereit:

| Tevékenység | $a$ | $b$ | $m$ |
|-------------|-----|-----|-----|
| (1,2)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |
| (1,3)       | 2.0 | 4.0 | 3.0 |
| (2,3)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |
| (2,4)       | 2.0 | 4.0 | 3.0 |
| (3,4)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |

Vegyük észre, hogy a legvalószínűbb végrehajtási időknél minden élre a korábbi rögzített értékeket választottuk. Ezekkel a számokkal meghatározhatjuk az egyes tevékenységek várható időtartamát és varianciáját:

$$E(T_{12}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{12} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028,$$

$$E(T_{13}) = \frac{2 + 4 * 3 + 4}{6} = 3, \quad \text{var } T_{13} = \frac{(4 - 2)^2}{36} = \frac{4}{36} = 0.111,$$

$$E(T_{23}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{23} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028,$$

$$E(T_{24}) = \frac{2 + 4 * 3 + 4}{6} = 3, \quad \text{var } T_{24} = \frac{(4 - 2)^2}{36} = \frac{4}{36} = 0.111,$$

$$E(T_{34}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{34} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028.$$

Vegyük észre, hogy paraméterezésünk mellett a kapott várható értékek megegyeznek a korábbi rögzített időtartamokkal. A fiktív élekre a várható érték és a variancia is nulla lenne.

Mivel a feltételezés szerint az egyes projekt szakaszok hosszai független valószínűségi változók, ezért a kritikus út teljes ideje várható értéke és annak szórásnégyzete a kritikus út szakaszaira kapott értékek összege lesz. Tekintsük az (1,2) és (2,4) szakaszokból álló kritikus utat:

$$\sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} E(T_{ij}) = E(T_{1,2}) + E(T_{2,4}) = 1 + 3 = 4,$$

a teljes idő variáciája pedig

$$\sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} \text{var } T_{ij} = \text{var } T_{12} + \text{var } T_{24} = 0.028 + 0.111 = 0.139.$$

Ugyanezeket az értékeket kapjuk a másik, (1,3), (3,4) kritikus útra is. A varianciából a megfelelő szórás  $\sqrt{0.139} = 0.373$ . Eszerint a kritikus utakon a várható értéktől való eltérés várható értéke ez a 0.373.

Feltételezve, hogy a teljes kritikus út megtételéhez szükséges idő normális eloszlású (ez példánkra aligha teljesülhet), meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy a teljes projekt befejeződik adott idő, mondjuk 5 nap alatt.

Ez a valószínűség  $P(CP \leq 5)$ . Standardizáljuk a normális eloszlású valószínűségi változónkat:

$$P(CP \leq 5) = P\left(\frac{CP - 4}{0.373} \leq \frac{5 - 4}{0.373}\right) = P(Z \leq 2.681) = 0.996.$$

Itt az  $F(2.681) = 0.996$  értéket a standard normális eloszlás táblázatából olvastuk ki. Itt  $F(x)$  a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A PERT szerint tehát a megadott feltevések mellett annak a valószínűsége, hogy a teljes projekt 5 nap alatt befejeződik, 99.6%.

A standard normális eloszlás megfelelő értékét a táblázat használata helyett megtudhatjuk:

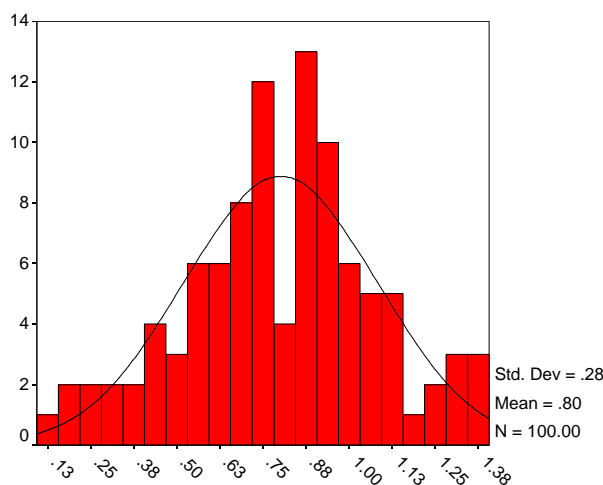
- az Excel `NORM.ELOSZL` függvényét használva,
- az SPSS nevű statisztikai program `CDF.NORMAL(2.681, 0, 1)` utasításával,
- a Matlab `0.5*erfc(-2.681/1.414)` parancsával (ehelyett persze a Matlab statisztikai csomagja `normcdf` utasítása a jobb megoldás — már ha az elérhető),
- a Maple pedig a `stats[statevalf, cdf, normald](2.681)`; utasítással adja a kért valószínűségi értéket.

A PERT alkalmazása során tett feltevések nehezen teljesíthetők.

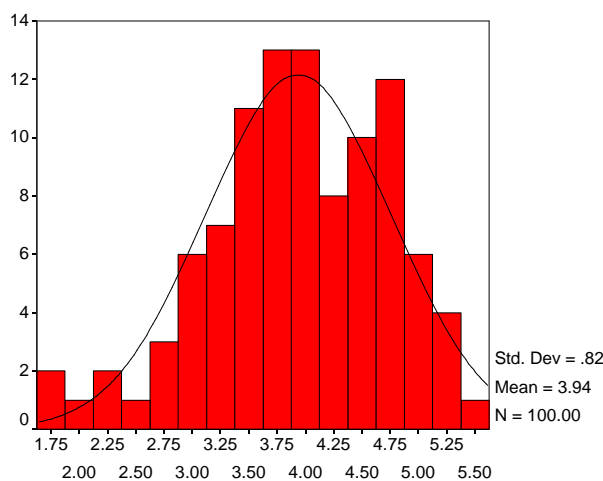
- Így nem könnyű igazolni, hogy az egyes tevékenységek időtartamai egymástól függetlenek.
- Sokszor a munkafolyamatok ideje nem béta eloszlást követ.
- A centrális határeloszlás tétel feltételei teljesüléséhez lehet, hogy nincs elegendő tevékenység a vizsgált útban.
- Gyakran előfordul, hogy a várható időtartamokra alkalmazott CPM eljárás eredménye nem marad kritikus út a véletlen események hatására.

Az utolsó probléma megoldására alkalmazhatunk Monte Carlo szimulációt annak meghatározására, hogy az egyes tevékenységek milyen valószínűséggel kritikusak, illetve hogy mennyi lehet a teljes projekt teljesülése idejének várható értéke és szórása.

A béta eloszlású valószínűségi változók összege:



KETTO



TIZ

Itt az első ábra mutatja két béta eloszlással generált (RV.BETA(2,3)) véletlen szám összegének eloszlását az SPSS nevű program hisztogram rajzoló utasítása eredményeként. Be van rajzolva az illeszkedő normális eloszlás sűrűségfüggvénye is. A következő ábra tíz béta eloszlású véletlen szám összegének eloszlását mutatja. Mindkét megjelenített eloszlás eltér a normálistól.

## 5.6. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Mutasson olyan legrövidebb út feladatot, amelyben minden ideiglenes címke változatlanul véglegessé válik!
2. Tesztelje, hány béta eloszlású valószínűségi változót kell ahhoz összeadnia, hogy az összeg szemre megkülönböztethetetlen legyen egy normális eloszlású változótól!

3. Keressen olyan gyakorlati feladatot, amelyben az egyes tevékenységek végrehajtási idejei valóban független valószínűségi változók!

## 6. fejezet

### Sztochasztikus programozás

Ahogy az újságárus probléma példáján is látszani fog, egy *sztochasztikus programozási probléma* szokás szerint egy alapul szolgáló *determinisztikus feladatra* épül. Miután kiderült, hogy valamely változó valójában egy valószínűségi változóval adható meg, egy újabb, *sztochasztikus optimalizálási modellt* fogalmazunk meg.

A *modell* és *feladat* szavakat szinonimaként használhatjuk. Szigorúbb értelemben a modell adja meg a feladatra vonatkozó feltételezéseket, és határozza meg azokat a matematikai objektumokat, amik a rendszerünk paramétereinek megfelelnek. Ez alapján aztán felírhatjuk a konkrét megoldandó feladatot, majd az eredményt alkalmazhatjuk leírasi vagy működtetési céljainkra.

Abban az esetben, amikor a modellre vonatkozó döntést a véletlen esemény előtt kell meghozni, *statikus modellről* beszélünk. Ide tartozik az újságárus probléma is. Ezzel szemben *dinamikus modellnek* nevezünk olyan modelleket, amelyek olyan rendszerekre vonatkoznak, amelyek állapotaikat időben változtatják. Amennyiben a rendszer viselkedését nem befolyásolják véletlen folyamatok, akkor az *optimális vezérlést* a rendszer indulása előtt meg lehet határozni.

A *sztochasztikus dinamikus rendszer* esetén az optimális működtetéshez szükség van a valószínűségi változók aktuális értékeinek megfigyelésére, és a rendszer működésére való hatásuk megállapítására.

Az alapul vett determinisztikus feladatokra a következő két példa szolgál kiindulási pontként:

Meghatározandó olyan  $x$ , hogy

$$g_1(x, \xi) \geq 0, \quad g_2(x, \xi) \geq 0, \quad \dots, \quad g_r(x, \xi) \geq 0,$$

$$x \in D,$$

ahol  $D$  egy adott, nem véletlen halmaz, amit gyakran véges sok  $x$ -re vonatkozó egyenlőtlenség határoz meg. A  $\xi$  szimbólum olyan vektort jelöl, amelynek komponensei majd valószínűségi változók lesznek.

A második determinisztikus feladat egy szélsőérték keresés:

$$\min h(x, \xi)$$

feltéve, hogy

$$g_1(x, \xi) \geq 0, \quad g_2(x, \xi) \geq 0, \quad \dots, \quad g_r(x, \xi) \geq 0,$$

$$x \in D,$$

ahol  $D$  ismét egy adott, nem véletlen halmaz, amit gyakran véges sok  $x$ -re vonatkozó egyenlőtlenség határoz meg. A  $\xi$  szimbólum itt is olyan vektort jelöl, amelynek komponensei majd valószínűségi változók lesznek.

Ezeknek a feladatoknak fontos speciális esetei az alábbi problémák:

Meghatározandó olyan  $x$ , hogy

$$Tx \geq \xi, \quad (\text{vagy } Tx = \xi),$$

$$Ax = b \quad \text{és} \quad x \geq 0,$$

illetve az, hogy

$$\min h(x, \xi)$$

feltéve, hogy

$$Ax = b \quad \text{és} \quad x \geq 0,$$

ahol esetleg nem csak  $\xi$ , de a  $T$  mátrixok egyes elemei is véletlen valószínűségi változók.

A legelső determinisztikus problémának felel meg például a következő *valószínűség maximalizálási feladat*:

$$\max P(g_1(x, \xi) \geq 0, g_2(x, \xi) \geq 0, \dots, g_r(x, \xi) \geq 0),$$

úgy, hogy  $x \in D$ .

## 6.1. Az újságárus probléma

Számos közgazdasági probléma fogalmazható meg, vagy vezethető vissza arra a feladatra, amikor azt szeretnénk meghatározni, hogy mekkora raktárkészletet tartunk fenn, illetve rendeljük meg, ha mind a raktáron tartásnak, mind a túl kicsi készletnek ismert költsége van. A döntéshozó célja nyilván a lehetséges legnagyobb nyereség elérése, illetve a költségei minimalizálása.

Az *újságárus problémának* azokat a feladatokat nevezzük amelyek elegettesznek a következő feltételeknek:

- Arról kell dönteni, hogy mennyi árut rendeljük. Legyen ennek mennyisége  $q$ .
- A  $d$  egységnyi kereslet a beszerzett árura egy ismert,  $p(d)$  valószínűséggel fordulhat elő. Itt  $d$  nemnegatív szám, és a  $D$  valószínűségi változó reprezentálja a keresletet.
- A  $d$  és  $q$  értékekre vonatkozóan egy  $c(d, q)$  költség merül fel.

Egy újságárus valóban a fenti problémával szembesül. Ha az adott napi forgalmat alulbecsli, akkor egyes vevőket nem tud kiszolgálni, így lehetséges nyereségtől esik el. Másrészt ha túl sokat rendel, akkor annak a költségeit fizetnie kell, és az el nem adott példányok alapján nyilván nem jut nyereséghez. Ha a kereslet diszkrét valószínűségi változó, akkor a *diszkrét keresletű újságárus problémáról* van szó.

A költségfüggvény alakja arra az esetre, amikor a készlet nem kisebb, mint az igény ( $d \leq q$ ):

$$c(d, q) = c_o q + a,$$

ahol  $c_o$  az *egységnyi túlkészletezés pozitív költsége*. Itt tehát  $c_o$  az a költség, amivel számolni kell akkor, ha a már így is túlzott készletet még egy egységgel növeljük.  $a$  a  $q$ -tól nem függő tagokat jelzi. A később bemutatott eljárás miatt ennek részletezése nem szükséges.

Abban az esetben, amikor a megrendelt áru mennyisége kisebb, mint az igény ( $d \geq q + 1$ ), akkor a költségfüggvény:

$$c(d, q) = -c_u q + b,$$

ahol  $c_u$  a pozitív *egységnyi alulkészletezési költség*. Ez az az összeg, amivel a költségeinket csökkenteni tudjuk, ha egy egységgel több a készletünk. Itt  $b$  a  $q$ -tól nem függő tagokat jelzi.

Az újságáros probléma elemzése során tekintsük most a költségfüggvény változását. Ha  $E(q)$  a költségfüggvény várható értéke abban az esetben, ha  $q$  egységnyiit rendeltünk az áruból, akkor a feladat olyan  $q^*$  optimális rendelés meghatározása, amely minimalizálja  $E$  értékét.

Amennyiben az  $E(q)$  konvex függvény, akkor elegendő az  $E(q + 1) - E(q)$  értékeket meghatározni. Konvex függvény esetén ugyanis a feladatunk annak a legkisebb  $q$ -nak a megkeresésére egyszerűsödik, amelyre  $E(q + 1) - E(q)$  pozitív. Azt az eljárást, amely ez alapján az  $E(q + 1) - E(q)$  ismételt kiértékelésével határozza meg a keresett optimális megrendelést, *határelemzésnek* nevezik. Alkalmazásának feltétele, hogy a célfüggvény konvex legyen, és hogy az említett különbség könnyen számítható legyen.

Az  $E(q + 1) - E(q)$  különbség meghatározásához két esetet kell megvizsgálni:

1. Amikor  $d \leq q$ . Ekkor egy újabb egység megrendelése további túlkészletezést okoz. Ez  $c_o$ -al növeli a költséget. Ennek az esetnek a bekövetkezési valószínűsége  $P(D \leq q)$ , ahol  $D$  a kereslet valószínűségi változója.

2. A másik eset az, amikor  $d \geq q + 1$ . Ekkor egy további egység megrendelése csökkenti a hiányt, és így csökkenti a költséget is  $c_u$ -val. A második eset bekövetkeztének valószínűsége  $P(D \geq q + 1) = 1 - P(D \leq q)$ .

A fentiek alapján tehát az összes eset  $100 \cdot P(D \leq q)$  százalékában a  $q + 1$  egység megrendelése  $c_o$ -val kerül többbe, mint  $q$  egység rendelése, és az esetek  $100 \cdot (1 - P(D \leq q))$  százalékában a  $q + 1$  egységnyi készlet költsége  $c_u$ -val kevesebbe kerül, mint  $q$  egységnyié. Ezek alapján átlagosan a  $q + 1$  áruegység megrendelése

$$E(q + 1) - E(q) = c_o P(D \leq q) - c_u (1 - P(D \leq q)) = (c_o + c_u) P(D \leq q) - c_u$$

költséggel kerül többbe, mint a  $q$  egység rendelése. Mivel a  $P(D \leq q)$  valószínűség  $q$  növekedésével nő, ezért ha  $c_o + c_u$  nemnegatív (ez az esetek többségében reális feltételezés), akkor a fenti különbség monoton nőni fog, így teljesül a határelemzés feltétele.

Ha  $E(q + 1) - E(q) \geq 0$ , akkor  $(c_o + c_u) P(D \leq q) - c_u \geq 0$ -ból  $P(D \leq q) \geq c_u / (c_o + c_u)$  adódik. Ha  $F(q) = P(D \leq q)$  a kereslet eloszlásfüggvénye, akkor azt a minimális  $q$  értéket keressük, amire még teljesül

$$F(q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u}.$$

PÉLDA. Tekintsük azt a feladatot, amikor egy jegyzet kiadásakor a nyomtatott példányszámról kell dönteni. A hallgatóság létszáma ismeretében a várható igényeket többé-kevésbé jól lehet becsülni. A kérdés nyilván az, hogy hány példányban készüljön a jegyzet ahhoz, hogy pl. a három éven belüli teljes költség minimális legyen.



A konkrét szám adatok legyenek a következők: az előállítási költség 900 Ft, az eladási ár 1500 Ft. A harmadik év végén a teljes maradék készletől megszabadulunk féláron: eladjuk őket egy nagykereskedőnek (750 Ft). A három éven belül eladható példányok valószínűsége:

| eladott jegyzet | valószínűség |
|-----------------|--------------|
| 50              | 0.30         |
| 100             | 0.20         |
| 150             | 0.20         |
| 200             | 0.10         |
| 250             | 0.10         |
| 300             | 0.10         |

A jelölésünk kövesse a bevezetőt: legyen  $q$  a megrendelt jegyzetek száma,  $d$  pedig a három éven belül ténylegesen eladottak száma. Amennyiben az eladott példányok száma kevesebb, mint a megrendeltké ( $d < q$ ), akkor a teljes költség a következők szerint alakul:

| tevékenység                     | költség         |
|---------------------------------|-----------------|
| $q$ darab jegyzet vásárlása     | $900 q$         |
| $d$ darab jegyzet eladása       | $-1500 d$       |
| $q - d$ jegyzet eladása féláron | $-750 (q - d)$  |
| teljes költség                  | $150 q - 750 d$ |

A további vizsgálatunk szempontjából ebből az a fontos, hogy a  $q$  egységnyi növelése 150 Ft-nyi költségnövekedést jelent (hiszen 900-ért állítják elő a jegyzetet, és a fölös példányoktól csak 750-ért tudunk megszabadulni). Vegyük észre, hogy a jegyzet előállításának a példányszámtól nem függő költségei az optimális példányszámot nem befolyásolják, hiszen ezeket minden  $q$ -ra azonos módon kell megfizetni.

Amennyiben az igényelt példányok száma legalább annyi, mint a megrendeltké ( $d \geq q$ ), akkor a teljes költség a következők szerint alakul (a negatív költséget nyereségként értelmezzük):

| tevékenység                 | költség   |
|-----------------------------|-----------|
| $q$ darab jegyzet vásárlása | $900 q$   |
| $q$ darab jegyzet eladása   | $-1500 q$ |
| teljes költség              | $-600 q$  |

Ebben az esetben a  $q$  egységnyi növelése a költségeket 600 forinttal csökkenti (a nyereséget 600 Ft-al növeli). Az eddigi költségelemzés alapján a túlkészletezési költség  $c_o = 150$ , az alulkészletezési költség pedig  $c_u = 600$ .

Alkalmazzuk most az optimális megrendelésre vonatkozó levezetett feltételt:

$$F(q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{600}{150 + 600} = \frac{600}{750} = 0.8.$$

A megadott valószínűségek alapján példánkban 200 darab jegyzet megrendelése az optimális, mert erre adódik először a kapott  $0.3+0.2+0.2+0.1 = 0.8$  eloszlásfüggvény érték.

A kapott eredmény illusztrálásaként határozzuk meg az egyes költség eltéréseket

$$E(q+1) - E(q) = (c_o + c_u)P(D \leq q) - c_u$$

alapján az egymásra következő eltérések rendre:

$$E(51) - E(50) = (150 + 600) \cdot 0.3 - 600 = 225 - 600 = -375,$$

$$E(101) - E(100) = 750 \cdot 0.5 - 600 = 375 - 600 = -225,$$

$$E(151) - E(150) = 750 \cdot 0.7 - 600 = 525 - 600 = -75,$$

$$E(201) - E(200) = 750 \cdot 0.8 - 600 = 600 - 600 = 0,$$

$$E(251) - E(250) = 750 \cdot 0.9 - 600 = 675 - 600 = 75,$$

$$E(301) - E(300) = 750 \cdot 1.0 - 600 = 750 - 600 = 150.$$

## 6.2. A folytonos keresletű újságáros probléma

Bizonyos értelemben az előző példában is feltételeztük a kereslet finomabb felbontását, mint az épp definiáltat. Mégis, az az eset külön tárgyalandó, amikor a  $D$  keresletet egy folytonos valószínűségi változóval reprezentáljuk. Az előző modellre használt határelemzési eljárást ennek megfelelően módosítani kell.

Eszerint a döntéshozó várható költségét az a  $q^*$  megrendelés minimalizálja várható értékben, ahol  $q^*$  az a legkisebb megrendelési érték, amelyre teljesül

$$P(D \leq q) = \frac{c_u}{c_o + c_u}.$$

A feltételben az egyenlőséget az tette lehetővé, hogy a kereslet most folytonos valószínűségi változó. Egyszerűen belátható, hogy a fenti feltétel ekvivalens az

$$P(D \geq q) = \frac{c_o}{c_o + c_u}$$

egyenlettel.

PÉLDA. A légitársaságok nemrég még bevett gyakorlata volt, hogy a legnagyobb lehetséges nyereség elérése érdekében több jegyet adtak el, mint ahány utas az adott gépre felfér – arra számítva, hogy nem minden utas fog ténylegesen utazni, egyesek lemondják az utat különböző okok miatt. Vizsgáljuk meg az újságáros probléma modelljével, hogy egy adott esetben hogyan határozható meg az optimális *túlfoglalás*.

A Fokker F70 gép 79 utast tud szállítani. Tegyük fel, hogy egy járatra a jegy ára 40 eFt, a túlfoglalás miatt a gépről lemaradó utas kárpótlás és egy másik járat drágább ára miatt 20 eFt többletköltséget jelent (és visszatérítik a teljes jegyárat). A tapasztalatok szerint a jeggyel rendelkező, de meg nem jelent utasok száma közel normális eloszlást követ 10 várható értékkel és 3 szórással.

Legyen most  $q$  a légitársaság által az adott járatra eladott jegyek száma,  $d$  pedig a meg nem jelent utasok száma (ez eltér a korábban szokásos jelentéstől). Ekkor  $q - d$  lesz a ténylegesen utazásra jelentkezők száma. Ha  $q - d \leq 79$ , akkor mindenki utazhat, és ekkor a légitársaság költsége  $-40(q - d)$  (ezer Forintban). Ha  $(q - d) > 79$ , akkor 79 utas lesz a gépen (ennek költsége  $-79 \cdot 40$ ), és  $q - d - 79$  utas kap kárpótlást fejenként 20 eFt értékben. Ekkor tehát a légitársaság teljes költsége  $20(q - d - 79) - 40 \cdot 79 = 20q - 20d - 60 \cdot 79 = 20q - 20d - 4740$ .

Amennyiben  $q - 79$  a döntési változónk, akkor egy folytonos keresletű újságáros problémát kell megoldani. A fenti adatok alapján  $c_u = 40$ , és  $c_o = 20$ . Az optimális döntés feltétele:

$$P(D \leq q - 79) = \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{40}{20 + 40} = \frac{2}{3}.$$

Standardizáljuk a  $D$  valószínűségi változónkat a 10 várható érték és a 3 szórás felhasználásával:

$$P\left(\frac{D - 10}{3} \leq \frac{q - 79 - 10}{3}\right) = 0.6.$$

Bevezetve a  $Z = (D - 10)/3$  standard normális eloszlású valószínűségi változót, optimalitási feltételnek azt kapjuk, hogy

$$P\left(Z \leq \frac{q - 79 - 10}{3}\right) = 0.6.$$

A standard normális eloszlás táblázatából megtudhatjuk, hogy  $P(Z \leq 0.43) = 0.6664$  (és a következő értékre, 0.44-re már 0.67 valószínűség adódik). Innen a közelítő optimális megoldás

$$0.43 = \frac{q - 79 - 10}{3},$$

azaz

$$q = (0.43 \cdot 3) + 89 = 90.29.$$

Eszerint a légitársaságnak az adott feltételek mellett a legelőnyösebb 90 vagy 91 jegyet eladnia a 79 tényleges férőhelyre. Természetesen ha az igény ennél kisebb, akkor annyi jegyet érdemes kiadni.  $\square$

### 6.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Keressen olyan gyakorlati problémát, amelyben folytonos a döntési változó az újságáros feladat keretében!
2. Írjon programot valószínűségi változó standardizálására!
3. Milyen tőzsdei kereskedési helyzet felel meg az újságáros feladat feltételeinek?

## 7. fejezet

### Gradiens módszer

A korlátozás nélküli nemlineáris optimalizálási feladatok gyakorlati problémákban gyakran lépnek fel. Általános alakjuk

$$\min f(x),$$

ahol a célfüggvény kétszer folytonosan differenciálható ( $f \in C^2$ ),  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A megoldás egyik módszere az, hogy az eredeti nemlineáris függvényt a megoldáshoz tartó pontokban kvadratikus függvényekkel közelítjük, és a következő iterált a közelítésből kapott megoldás lesz.

A feladat megoldásához helyi kereső eljárásokat szokás használni, amelyek az indulóponthoz tartozó helyi minimumpont megkeresésére vállalkoznak, általában monoton nem növekvő célfüggvényérték mellett.

Amennyiben a második derivált, a  $H_{ij}(x) = \partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$  képlettel adott Hesse mátrix ismeretes, akkor a leghatékonyabb a Newton módszer. Ez az érintőmódszer alapján működik, ami egydimenziós nemlineáris egyenletet old meg az  $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$  iterációs képlettel. A többdimenziós optimalizálási feladatra ennek a következő formula felel meg:

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k),$$

ahol  $\nabla f(x_k)$  az  $f(x)$  függvény gradiense az  $x_k$  pontban.

A korszerű számítógépes megvalósításokban a megadottnál kisebb lépést szokás tenni. Az ilyen Newton módszerre bizonyos feltételek teljesülése esetén kvadratikus konvergencia érvényes, azaz egy megfelelő  $x^*$  helyi minimumpontra

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq C\|x^* - x_k\|^2$$

érvényes egy alkalmas pozitív  $C$  konstansra.

Gyakran a Hesse mátrix nem állítható elő egyszerűen, vagy pedig numerikus differenciálással jól közelíthető. Az erre az esetre módosított Newton módszernek quasi-Newton eljárás a neve. Erre kvadratikus konvergencia már nem érvényes, csak a szuperlineáris konvergencia, azaz teljesül

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^* - x_{k+1}\|}{\|x^* - x_k\|} = 0.$$

Amennyiben csak a gradiensértékre lehet támaszkodni, akkor olyan eljárást is fel lehet építeni, amely az adott iterációs pontból a negatív gradiens irányában lép tovább:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k),$$

ahol  $\lambda$  a lépésköz. Az olyan módszereket, amelyek keresési iránya a negatív gradienssel pozitív belső szorzatot ad, gradiens módszereknek nevezzük.

A gradiens módszernek is vannak olyan változatai, amelyek nem igénylik a célfüggvény deriváltjának ismeretét, ennek megfelelő közelítését maga az eljárás állítja elő. A gradiens módszer-család általában csak lineáris konvergenciát mutat, de a konjugált gradiens módszerrel bizonyos feladatosztályon el lehet érni a szuperlineáris konvergenciát.

PÉLDA. Tekintsük az  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$  függvényt. Ennek a célfüggvénynek a minimuma az  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  pontban van, értéke 0. A gradiens

$$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1) + 2(x_1 + x_2 - 2), 2(x_1 + x_2 - 2))^T,$$

a Hesse mátrix és inverze pedig

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad H(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján a Newton módszer adta iteráció az  $x_0 = (3, 3)^T$  pontból indulva:

$$x_1 = x_0 - H^{-1}(x_0)\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix}.$$

Innen

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ -6 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát ez alkalommal egy lépésben megkaptuk az  $(1, 1)^T$  optimális megoldást. Ez a jelenség a lényegében kvadratikus függvényekre fordulhat elő.

PÉLDA. Tekintsük az előző feladatot, és oldjuk meg a gradiens módszerrel! Minimalizálandó tehát az  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$  függvény. Ennek minimuma az  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$  pontban van, értéke 0. A gradiens

$$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1) + 2(x_1 + x_2 - 2), 2(x_1 + x_2 - 2))^T.$$

Vegyünk egy viszonylag kis lépésközt,  $\lambda = 0.1$ -et, és ismét az  $x_0 = (3, 3)^T$  indulópontot. Az iterációs sorozat első lépései ezzel az

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$$

képlet alapján:

$$x_1 = x_0 - \lambda \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

A következő iterált pontok a Matlab

```
>> x = x - 0.1 * [2 * (x(1) - 1) + 2 * (x(1) + x(2) - 2); 2 * (x(1) + x(2) - 2)]
```

utasításával kiszámítva:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.24 \\ 1.80 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.984 \\ 1.592 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.8720 \\ 1.4768 \end{pmatrix}.$$

A következő néhány kiválasztott közelítő vektor:

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 0.8359 \\ 1.2722 \end{pmatrix}, \quad x_{20} = \begin{pmatrix} 0.9245 \\ 1.1221 \end{pmatrix}, \quad x_{50} = \begin{pmatrix} 0.9930 \\ 1.0113 \end{pmatrix}, \quad x_{100} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 1.0002 \end{pmatrix}.$$

Az iterált vektorok lineáris konvergenciára utalnak.

## 7.1. Konjugált gradiens módszer

A konjugált gradiens módszer optimalizálásra és szimmetrikus pozitív definit mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására is alkalmas. Pontos aritmetikával ugyan véges sok lépésben megtalálná a megoldást, de a kerekítési hibák miatt mégis iterációs eljárásnak kell tekinteni. Számos variánsa ismert.

Legyen  $A$  egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix, akkor a

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

kvadratikus függvénynek egyetlen  $x^*$  minimumpontja van, és erre  $Ax^* = b$  teljesül. Más szóval az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer megoldása ekvivalens a  $q(x)$  kvadratikus függvény minimumpontjának meghatározásával.

A többdimenziós optimalizálási eljárások rendszerint az

$$x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$$

alakban keresik az új közelítő megoldást, ahol  $s_k$  egy keresési irány, és  $\alpha$  a lépésköz. A kvadratikus függvények optimalizálása során a következő észrevételeket tehetjük:

- (i) A negatív gradiens (amelyik irányában a célfüggvény csökken) a reziduális vektor:  $-\nabla q(x) = b - Ax = r$ .
- (ii) Adott keresési irány mentén nem kell adaptív módon meghatározni a lépésközt (mint általános nemlineáris minimalizálás esetén kellene), mert az optimális  $\alpha$  közvetlenül megadható. A keresési irány mentén ott lesz a célfüggvény minimális, ahol az új reziduális vektor merőleges  $s_k$ -ra:

$$0 = \frac{d}{d\alpha} q(x_{k+1}) = \nabla q(x_{k+1})^T \frac{d}{d\alpha} x_{k+1} = (Ax_{k+1} - b)^T \left( \frac{d}{d\alpha} (x_k + \alpha s_k) \right) = -r_{k+1}^T s_k.$$

Az új reziduális vektort ki lehet fejezni a régivel és a keresési iránnyal:

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha s_k) = (b - Ax_k) - \alpha A s_k = r_k - \alpha A s_k.$$

Balról beszorozva  $s_k^T$ -vel, és megoldva ezt az egyenletet  $\alpha$ -ra azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{r_k^T s_k}{s_k^T A s_k}.$$

Ezzel megkaptuk a szimmetrikus, pozitív definit mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló konjugált gradiens módszert. Egy adott  $x_0$  indulópontra legyen  $s_0 = r_0 = b - Ax_0$ , és iteráljuk  $k = 1, 2, \dots$  értékekre az alábbi lépéseket, amíg a megállási feltételek nem teljesülnek:

1.  $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{s_k^T A s_k}$  (a lépéshossz meghatározása)
2.  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$  (iterált közelítő megoldás)
3.  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A s_k$  (az új reziduális vektor)
4.  $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$  (segédváltozó)
5.  $s_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} s_k$  (az új keresési irány)

Vegyük észre, hogy az  $\alpha$  értékét most kicsit más formában határoztuk meg ( $r_k^T s_k$  helyett  $r_k^T r_k$  áll). Érvényes viszont, hogy

$$r_k^T s_k = r_k^T (r_k + \beta_k s_{k-1}) = r_k^T r_k + \beta_k r_k^T s_{k-1} = r_k^T r_k,$$

mivel az  $r_k$  reziduális vektor merőleges az  $s_{k-1}$  keresési irányra.

A korábbi *gradiensmódszerek* egyszerűen a negatív gradienst követték minden iterációs lépésben, de felismerték, hogy ez a meredek falú enyhén lejtő völgyeszerű függvények esetén szükségtelenül sok iterációs lépést követelt a völgy két oldalán való oda-vissza mozgással. A kisebb meredekséggel rendelkező irányban viszont lényegesen gyorsabban lehetett volna haladni a megoldás felé. A konjugált gradiens módszer ezzel szemben a lépésenkénti megfelelő irányváltoztatással kiküszöböli ezt a hátrányt (innen a neve).

A megállási feltétel szokás szerint az, hogy a felhasználó előírja, hogy az utolsó néhány iterált közelítés eltérése és a lineáris egyenletrendszer két oldala különbsége normája ezekben a pontokban adott kis pozitív értékek alatt maradjanak.

A konjugált gradiens módszer nemlineáris optimalizálásra is alkalmas, ha minden iterációs lépésben az eredeti célfüggvény kvadratikus modelljére alkalmazzuk (az adott pontbeli függvényértékre, a gradiensre és a Hesse mátrixra vagy ezek közelítésére támaszkodva).

A konjugált gradiens módszer egy egyszerű megvalósítása a Matlabban:

```
function x = kg(A, b, x);
s = b-A*x;
r = s;
for k=1:20
    a = (r' * r) / (s' * A * s);
    x = x+a*s;
    rr = r-a*A*s;
    s = rr+s*((rr' * rr) / (r' * r));
    r = rr
end
```

Az áttekinthetőség kedvéért a megállási feltételeket elhagytuk a programból, ezek akkor állították meg az iterációt, ha a keresési irány, vagy a reziduális vektor normája, illetve ha a megoldás utolsó két iteráltjának eltérése normája kisebb volt, mint 0.00001. A kiindulási adatok:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a megoldás  $x^* = [1, 1]^T$ . A kapott eredmény két iteráció után:

```
r =
    1.0e-014 *
   -0.1554
   -0.0888
ans =
    1.0000
    1.0000
```

Tehát a lineáris egyenletrendszer bal- és jobb oldalának eltérése már a számábrázolás határán volt, és az eredmény is nagyon közeli az elméleti megoldáshoz. Ez teljes összhangban van a módszer (pontos aritmetika használata esetén érvényes) véges számú lépésben való konvergenciájával, de látszik a kerekítési hibák hatása is.

A lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló iterációs Matlab eljárásokat összegeztük az alábbi táblázatban:

| függvény | mátrix típus         | módszer                                  |
|----------|----------------------|--|
| bicg     | általános            | bikonjugált gradiens módszer             |
| bicgstab | általános            | stabilizált bikonjugált gradiens módszer |
| cgs      | általános            | négyzetes konjugált gradiens módszer     |
| gmres    | általános            | általánosított minimum-reziduál módszer  |
| minres   | Hermite-szimmetrikus | minimum-reziduál módszer                 |
| lsqr     | általános            | konjugált gradiens normális egyenletekre |
| pcg      | Herm. poz. def.      | prekondicionált konjugált gradiens       |
| qmr      | általános            | kvázi-minimál reziduál módszer           |
| symmlq   | Hermite-szimmetrikus | szimmetrikus LQ módszer                  |

Ezek a függvények (a gmres kivételével) azonos hívási formátumot használnak. A legegyszerűbb hívási mód az

$$x = \text{solver}(A, b),$$

ahol solver a táblázatban szereplő egyik eljárás neve. Ha a megállási feltételben a toleranciát módosítani szeretnénk, akkor a hívási forma

$$x = \text{solver}(A, b, \text{tol}),$$

ahol a tol érték az a szám, amellyel a  $\text{norm}(b - A \cdot x) \leq \text{tol} \cdot \text{norm}(b)$  feltétel teljesülését követeljük meg. A tolerancia alapbeállítása  $1e-6$ .



Egy adott  $n \times n$ -es  $A$  mátrix nemnulla elemei százalékos arányát a következő Matlab utasítás adja:

```
>> nnz(A)/n^2
```

A gyakrabban használatos, érdekes mátrixok, vektorok közvetlenül is elérhetők a Matlabban:

```
>> b = ones(n,1);
```

az egyesekből álló  $n$  hosszú oszlopvektort adja.

```
>> A = gallery('wathen',12,12); n = length(A)
```

```
N =
```

```
481
```

```
>> nnz(A)/n^2
```

```
ans =
```

```
0.0301
```

a  $481 \times 481$ -es Whaten mátrixot generálja, amelynek rögzített ritkasági szerkezete van véletlen elemekkel. A nemnulla elemek aránya kb. 3%. A prekondicionált konjugált gradiens módszer a következő eredményt adja a fentiekben definiált lineáris egyenletrendszerre.

```
>>x = pcg(A,b);
```

```
pcg stopped at iteration 20 without converging to the desired
tolerance 1e-006 because the maximum number of iterations was
reached.
```

```
The iterate returned has relative residual 0.063
```

Ez azt jelenti, hogy az előírt megállási feltétel nem teljesült még a reziduálra, több iteráció végrehajtását kell ehhez engedélyezni.

```
x = pcg(A,b,1e-6,100);
```

```
pcg converged at iteration 86 to a solution with relative
residual 8.8e-007
```

Nagyon tanulságos a 12 helyett nagyobb paraméterrel futtatni a fenti utasításokat. 40 esetén az  $n$  már közel 5000, a nem nulla mátrixelemek aránya 3 ezrelék. Erre a feladatra a pcg eljárás kb. 6 másodpercig futott, míg az  $x = b \setminus A$  hétszer tovább. Érdekes, hogy ha a futtatást megismételtük, akkor már közel azonos időre volt szükség. Ennek az lehet a magyarázata, hogy az ismételt futtatás esetén már a memóriában volt a több száz megabyte-nyi adat.

Az iteratív eljárások a hatékony működéshez általában prekondicionálást igényelnek, az eredeti

$$Ax = b$$

egyenlet helyett az  $M_1$  és  $M_2$  mátrixokkal, illetve az  $M = M_1 M_2$  mátrixszal a következő egyenleteket fogják használni:

$$M_1^{-1} A M_2^{-1} \cdot M_2 x = M_1^{-1} b,$$

vagy pedig

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b.$$

Az átalakítás célja az, hogy az eredménymátrix bizonyos értelemben közel legyen az egységmátrixhoz. A jó prekondicionáló mátrixok meghatározása nehéz feladat, és általában az adott alkalmazás ismeretét kívánja meg, amiből a lineáris egyenletrendszer származik.

Az általunk vizsgált  $A$  mátrixnak egy jó prekondicionálója az  $M = \text{diag}(\text{diag}(A))$  mátrix, az  $A$  mátrix főátlója elemeiből álló diagonális mátrix. Ezzel mint ötödik argumentummal felhívva a `pcg` eljárást, lényegesebben gyorsabban kapunk a megállási feltételnek megfelelő megoldást:

```
>> [x, flag, relres, iter] = pcg(A, b, 1e-6, 100, diag(diag(A)));  
>> flag, relres, iter  
flag =  
    0  
relres =  
    9.0568e-007  
iter =  
    28
```

Vegyük észre, hogy amikor egynél több eredmény-argumentumot kérünk, akkor nem jönnek üzenetek. A `flag` nulla értéke azt mutatja, hogy a megoldás teljesíti az előírt megállási feltételt `iter` darab iterációs lépés után.

## 7.2. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok

1. Milyen optimalizálási feladatra ad megoldást a gradiens módszer egy lépésben?
2. Milyen optimalizálási feladatra ad megoldást a Newton módszer egy lépésben?
3. Igaz-e, hogy minden kvadratikus konvergens optimalizálási algoritmus gyorsabb minden lineárisan konvergens eljárásnál?



## 8. fejezet

### A korlátozás és szétválasztás módszere

Olyan optimalizálási feladatok megoldására, amelyeket közvetlenül nem lehet valamely bevett eljárással megoldani, hasznos az eredeti feladat egyszerűbb részfeladatokra való felbontása. Ide tartozik az egészértékű lineáris optimalizálási feladatok köre, és a nemlineáris programozás is.

Az alapötlet az eredeti feladat szisztematikus felosztása olyan kisebb, valamely szempontból kezelhetőbb részfeladatokra, amelyek bizonyos értelemben a teljes leszámolás egy hatékony megvalósítását adják. A megoldott részfeladatok eredményeit természetesen megfelelően összegezni kell. A módszer erejét az adja, hogy minden lépése automatizálható.

Tekintsük azt a feladatot, amelyben

$$\min f(x)$$

az optimalizálási cél, és a lehetséges megoldásokat azonos dimenziójú, egész koordinátájú  $x$  vektorok egy véges és nem üres  $L$  halmaza adja meg.

Ennek a feladatnak nyilvánvalóan van optimális megoldása, hiszen a véges sok lehetséges vektor között nyilván kijelölhető az, amelyiknél kisebb célfüggvényértéket a többi nem ad. Sok esetben a lehetséges megoldások száma nagyon nagy. Így például az  $n \times n$ -es hozzárendelési feladat esetén  $n!$  darab lehetséges megoldást kellene ellenőrizni.

A korlátozás és szétválasztás módszere (angolul branch-and-bound, B&B) két függvényre támaszkodik:

- a  $\phi$  szétválasztási függvény az  $L$  lehetséges megoldási halmaz egy tetszőleges  $L'$  (amire  $|L'| > 1$ ) részhalmazának megadja egy valódi osztályozását.
- a  $g$  korlátozó függvény pedig az  $L$  egy tetszőleges  $L' \neq \emptyset$  részhalmazához hozzárendeli az  $f(x)$ ,  $x \in L'$  célfüggvényértékek egy alsó korlátját. Amennyiben  $L'$  egy  $x$  lehetséges vektorból áll, akkor  $g(x) = f(x)$ .

Erre a két függvényre alapozva már fel lehet építeni a korlátozás és szétválasztás módszer egy változatát. A korlátozás és szétválasztás módszere egy *leszámlálási fát* épít fel a következők szerint:

**0. lépés** Az előkészítés során határozzuk meg a  $g(L)$  értéket, és legyen  $L$  a leszámplálási fa gyökere. Legyen  $k = 1$ . Címkézzük meg a gyökeret a  $g(L)$  értékkel.

**1. lépés** Az aktuális fa levelein határozzuk meg a címkék minimumát, és válasszunk ki egy minimális címkéjű  $L'$  levelet.

- 2. lépés** Amennyiben  $L'$  már csak egy vektorból áll ( $L' = \{\bar{x}\}$ ), akkor vége az eljárásnak,  $\bar{x}$  optimális megoldás.
- 3. lépés** Bővítsük az aktuális fát  $\phi(L')$  elemeivel, legyenek ezek  $L'$  leszármazottjai az épített keresési fában. Az új levelekre határozzuk meg az alsó korlátokat a  $g$  függvény segítségével, és rendeljük őket címkeként a megfelelő levelekhez. Növeljük a  $k$  iterációs számot eggyel, és térjünk rá a következő iterációs lépésre (1. lépés).

Az eljárás *végessége* abból adódik, hogy a  $\phi$  definíciója alapján minden  $L'$  részfeladatnak legfeljebb  $|L'|$  leszármazottja van, és hogy az algoritmus futásának minden fázisában az eredeti  $L$  lehetséges megoldási halmaz egy osztályozását jelentik az aktuális levelek. A szétválasztási függvény tulajdonságán múlik, hogy minden újabb szétválasztás valódi osztályozást ad. Ebből az adódik, hogy a keresési fa maximális mélysége  $|L|$ . A fa végességéből már következik az eljárás végessége is.

Az algoritmus *helyessége* azon múlik, hogy minden iterációs fázisban a lehetséges megoldásoknak az aktuális levelek által meghatározott osztályozása részalmazaira ismert alsó korlátok legkisebbike alsó korlátja lesz az optimális célfüggvényértéknek. A megálláskor tehát  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  adódik az  $\bar{x}$  vektorra. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy  $\bar{x}$  optimális megoldás.

Gyakran hasznos a lehetséges megoldások  $L$  halmazát befoglalni egy könnyebben kezelhető halmazba, és a felosztást azon végigkövetni. Érdemes az alpmódszer indítása során egy lehetséges megoldásra vonatkozó (és ezért pontos) felső korlátot adni az optimum értékére. Ennek segítségével a számontartott részfeladatok számát csökkenteni lehet.

PÉLDA. Tekintsük a következő egyszerű 0-1 értékű lineáris programozási feladatot:

$$\min -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

feltéve hogy a

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5$$

teljesül, és  $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4$ .

Ebben az esetben a lehetséges megoldások halmaza:

$$L = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}.$$

Az  $L$ -en a célfüggvény alsó korlátjának vegyük a célfüggvény együtthatók összegét, amelyekre van egyes valamely vektorban (ennél kisebb érték nem fordulhat elő):  $g(L) = -7$ .

Tegyük fel, hogy a szétválasztási függvény  $L$ -et olyan két halmazra bontja, hogy  $L_1$ -be kerüljenek azok a vektorok, amelyekre  $x_1 = 0$ ,  $L_2$ -be pedig azok, amelyekre  $x_1 = 1$ . Ekkor

$$L_1 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\},$$

és  $g(L_1) = -3$ , illetve

$$L_2 = \{(1, 0, 0, 0)\},$$

és  $g(L_2) = -4$ .

Mivel a következő lépésben az  $L_2$  levelet kellene tovább osztani, és az már csak egy vektort tartalmaz, ezért  $\bar{x} = (1, 0, 0, 0)$  az optimális megoldás.

Vegyük észre, hogy a fenti gyors megoldást csak az tette lehetővé, hogy a lehetséges megoldások halmazából egy lépésben sikerült elkülöníteni egy egyelemű részhalmazt, amelyre a célfüggvény értéke nem volt nagyobb, mint a többi, a lehetséges megoldások közé tartozó vektor célfüggvény értéke.

Gyakorlati feladatokban persze lényegesen nagyobb számú iteráció kell a megoldáshoz – másrészt ezzel együtt is hatásos és hatékony eszköz lehet a korlátozás és szétválasztás módszere.

PÉLDA. Tekintsük a  $\min f(x) = x^2$  feladatot az  $X = [-2, 10]$  intervallumon. A szélsőérték nyilván a 0 pontban van. Az  $f(x)$  függvény befoglaló függvényértéke a kiindulási intervallumon  $[-2, 10] * [-2, 10] = [-20, 100]$ .

A kiindulási intervallumot osszuk fel két egyenlő részre. A kapott intervallumokra adódó korlátok:

$$f([-2, 4]) = [-8, 16], \quad f([4, 10]) = [16, 100].$$

Ebből az adódik, hogy a teljes feladatra vonatkozó alsó korlátunk -20-ról -8-ra javul. Vegyük észre, hogy a második részintervallumon a célfüggvényünk monoton, ezért a befoglaló függvényünk pontos.

A következő iterációs lépésben a legígéretesebb részintervallum a  $[-2, 4]$ . Osszuk fel most ezt. Az ezután meglévő részintervallumokra a korlátok:

$$f([-2, 1]) = [-2, 4], \quad f([1, 4]) = [1, 16], \quad f([4, 10]) = [16, 100].$$

Mivel egy részintervallumon ( $[-2, 1]$ ) kapott felső korlát kisebb, mint egy másik részintervallumra ( $[4, 10]$ ) érvényes alsó korlát, ezért az utóbbi törölhető a keresési tartományból, hiszen nem tartalmazhat optimális megoldást.

A következő néhány iteráció utáni még figyelembe veendő részintervallumok a hozzájuk tartozó korlátokkal:

$$f([-2, -0,5]) = [0, 25, 4], \quad f([-0,5, 1]) = [-0,5, 1], \quad f([1, 4]) = [1, 16],$$

$$f([-2, -0,5]) = [0, 25, 4], \quad f([-0,5, 0,25]) = [-0,125, 0,25], \\ f([0,25, 1]) = [0,0625, 1],$$

$$f([-0,5, -0,125]) = [0,015625, 0,25], \quad f([-0,125, 0,25]) = [-0,03125, 0,0625], \\ f([0,25, 1]) = [0,0625, 1].$$

Az optimális célfüggvényértékre vonatkozó bizonytalanság 5 iterációs lépés alatt 120-ról 0,1 alá csökkent. Az optimum helye bizonytalansága 12-ről 1,5-re alakult.

PÉLDA. Ebben az esetben a feladat egy olyan kellemetlen gyár telepítési helyszín meghatározása volt, amelyre a magyarországi nagyobb városok lakosai számával arányos elutasítás figyelembevételével a lehető legkisebb gondot okozza.

A célfüggvény ennek megfelelően

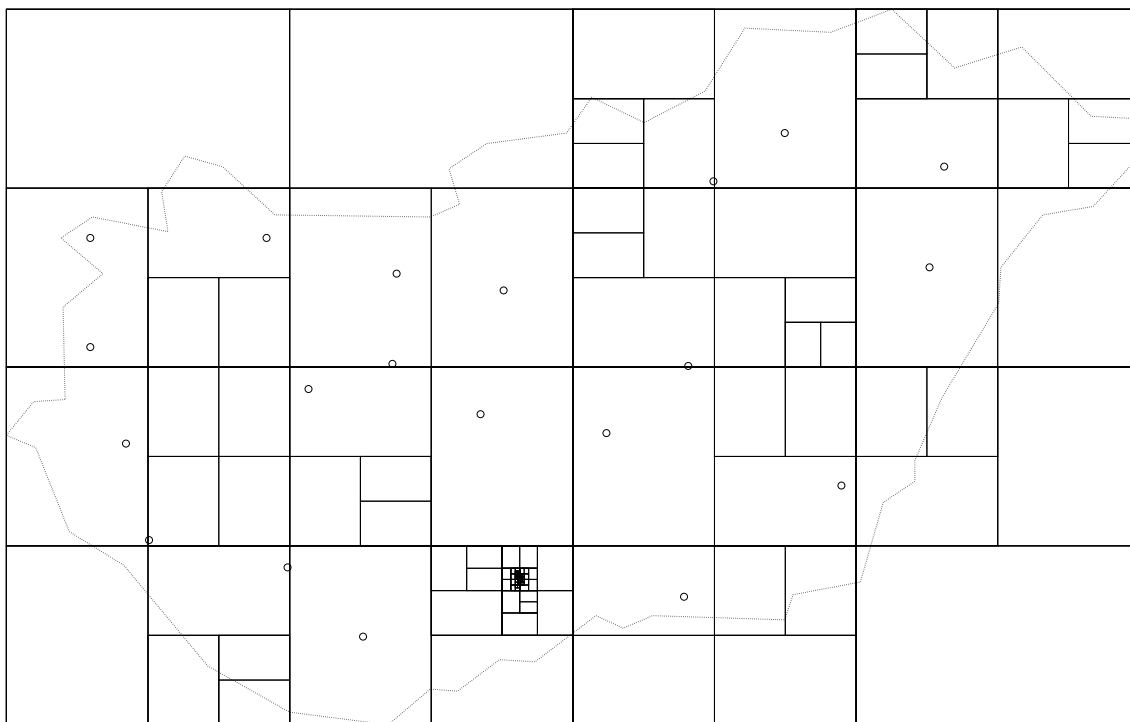
$$f(x) = \sum_i \frac{l_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

ahol  $x$  és  $y$  a telepítés helyszínének koordinátái, az  $i$ -edik város lakosai száma  $l_i$ , koordinátái pedig  $x_i$  és  $y_i$ . Nyilván  $f(x)$  minimalizálása a cél.

Az optimalizálási feladat korlátozását jelentette, hogy

- a gyárnak az országhatárokon belül legalább 50 kilométerre kell lennie,
- a városok 5 kilométeres körzete is kizárt a telepítésből.

A kapott eredményt a következő ábra mutatja – konkrétan a megvizsgált részintervallumok jelölésével:



Érdekes eredmény, hogy ha a határtól való eltérést nem követeltük meg, akkor az optimális pozíció minden esetben a határra adódott, még akkor is, ha figyelembe vettük a határon túli nagyobb városok taszító hatását is.

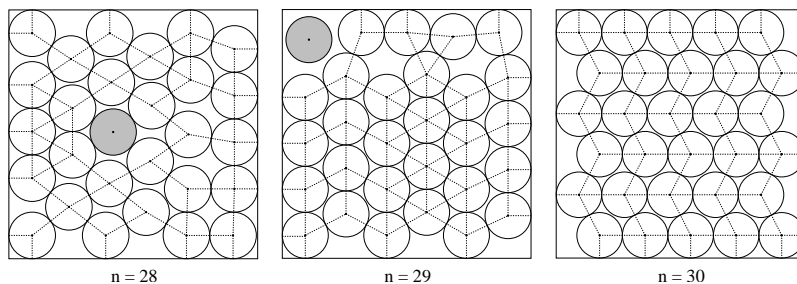
## 8.1. Körpakolási feladatok

Két ekvivalens megfogalmazás:

- Helyezzünk el adott  $n$  darab egybevágó kört átlapolás nélkül, maximális sugárral az egységnyezetben.
- Helyezzünk el adott  $n$  számú pontot az egységnyezetben úgy, hogy a köztük lévő minimális távolság maximális legyen.

$$\max \min_{1 \leq i \neq j \leq n} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

$$\text{ahol } 0 \leq x_i, y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



A satírozott körök kis mértékben mozgathatók az optimalitás megtartása mellett (a globális minimumpontok halmaza *pozitív mértékű*). Két kör érintkezését az összekötő vonalak jelzik.

Hardware: PC, Pentium IV 1800 MHz processor, 1 GB RAM. Software: Linux, GNU C/C++, C-XSC Toolbox, PROFIL/BIAS. A sugár értékére kapott korlátok:

$$F_{28}^* = [0.2305354936426673, 0.2305354936426743], \quad w \approx 7 \cdot 10^{-15},$$

$$F_{29}^* = [0.2268829007442089, 0.2268829007442240], \quad w \approx 2 \cdot 10^{-14},$$

$$F_{30}^* = [0.2245029645310881, 0.2245029645310903], \quad w \approx 2 \cdot 10^{-15}.$$

A teljes futási idők:  $\approx 53, 50$ , illetve 21 óra. A feladatok megoldásához kb. egy millió részintervallum kellett. A verifikált eljárás az optimális pakolás helyére vonatkozó bizonytalanságot több mint 711, 764, illetve 872 nagyságrenddel csökkentette.





## Irodalomjegyzék

- [1] Bajalinov Erik és Imreh Balázs: Operációkutatás. Polygon Jegyzettár, Szeged, 2001.
- [2] Bazaraa, M.S., H.D. Sherali, and C.M. Shetty: Nonlinear Programming – Theory and Algorithms, Wiley, 1993.
- [3] Bomze, I.M., T. Csendes, R. Horst, and P.M. Pardalos (eds.): Developments in Global Optimization. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [4] Csallner András Erik: Intervallum-felosztási eljárások a globális optimalizálásban. PhD disszertáció, Szeged, 1999. Elérhető a <http://www.jgytf.u-szeged.hu/~csallner> internetes címen.
- [5] Csernyák László (szerk.): Operációkutatás II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [6] Dixon, L.C.W., G.P. Szegő (eds.): Towards Global Optimisation. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [7] Dixon, L.C.W., G.P. Szegő (eds.): Towards Global Optimisation 2. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] Forgó Ferenc: Nemkonvex és diszkrét programozás: korszerű ismeretek gazdasági szakemberek számára, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [9] Gáspár László és Temesi József: Lineáris programozási gyakorlatok. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [10] Gáspár László és Temesi József: Matematikai programozási gyakorlatok. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [11] Gerencsér László: Nemlineáris programozási feladatok megoldása szekvenciális módszerekkel, SZTAKI Tanulmányok 49/1976, Budapest.
- [12] Gill, P. E., W. Murray, M.H. Wright: Practical Optimization. Academic Press, London, 1981.
- [13] GNU OCTAVE vendégoldal: [www.che.wisc.edu/octave](http://www.che.wisc.edu/octave)
- [14] Hansen, E.: Global Optimization Using Interval Analysis. Marcel Dekker, New York, 1992.
- [15] Higham, Desmond J. and Nicholas J. Higham: MATLAB Guide. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [16] Hillier, F.S., G.J. Lieberman: Bevezetés az operációkutatásba. LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.

- [17] Horst, R., P.M. Pardalos, and N.V. Thoai: Introduction to Global Optimization, Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [18] Imreh Balázs: Kombinatorikus optimalizálás. Novadat Kiadó, Győr.
- [19] Komlósi Sándor: Az optimalizáláselmélet alapjai. Dialóg Campus Kiadó, Budapest, Pécs, 2001.
- [20] Kósa András: Optimumszámítási modellek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [21] Krekó Béla: Optimumszámítás. Nemlineáris programozás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [22] Martos Béla: Nemlineáris Optimalizálás, Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [23] MATLAB online kézikönyvek:  
[www.mathworks.com/access/helpdesk/help/fulldocset.shtml](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/fulldocset.shtml)
- [24] Neumaier, Arnold globális optimalizálási portálja számos további linkkel, forráskódokkal, tesztfeladatokkal: <http://www.solon.math.univie.ac.at/globopt>
- [25] NETLIB vendégoldal: [www.netlib.org](http://www.netlib.org)
- [26] Pintér, J.D.: Global Optimization in Action, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [27] András Prékopa: Stochastic Programming. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [28] Raffai Mária (szerk.): Döntéselőkészítés – Operációkutatási Módszerek. Novadat Kiadó, Győr, 2000.
- [29] Ratschek, H., J. Rokne: Computer Methods for the Range of Functions. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [30] Ratschek, H., J. Rokne: New Computer Methods for Global Optimization. Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [31] SCILAB vendégoldal: [www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.html](http://www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.html)
- [32] Tóth Irén (szerk.): Operációkutatás I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [33] Törn, A., A. Žilinskas: Global Optimization. (Lecture Notes in Computer Science No. 350, G. Goos and J. Hartmanis, Eds.) Springer, Berlin, 1989.
- [34] Winston, W.L.: Operációkutatás I-II. Módszerek és alkalmazások. Aula Kiadó, Budapest, 2003.

Az irodalomjegyzék persze nem teljes, csak néhány fontosabb, illetve a tananyaghoz közvetlenül kapcsolódó könyvet, jegyzetet adunk meg. Az itt megadott a könyvek, jegyzetek kiegészítésül ajánlhatók jegyzetünkhöz, de a félév anyagához nem feltétlenül szükségesek. Hasznosak lehetnek viszont diákköri dolgozathoz vagy diplomamunkához. A listában szereplő könyvek az SZTE Informatikai Intézete könyvtárában, és a nagyobb könyvtárakban megtalálhatók.

# Tárgymutató

- ET*, 62  
*LT*, 62  
*MH*, 64  
*TH*, 63  
érintőmódszer, 77  
újságárus probléma, 72  
út<sup>9</sup>, 55
- Activity On Arc, 61  
all cities, 43  
alulkészletezés, 73  
AOA hálózatnak, 61  
automatikus differenciálás, 17
- béta eloszlás, 66  
befejezés csúcs, 61  
befoglaló függvény, 9  
best fit algoritmus, 51
- centrális határeloszlás tétel, 67  
CPM, 61  
Critical Path Method, 61
- determinisztikus feladat, 71  
Dijkstra algoritmusa, 55  
dinamikus modell, 71  
diszkrét kereslet, 72
- Early Event Time, 62  
egységnyi alulkészletezés, 73  
egységnyi túlkészletezés, 73  
ekvivalens mátrix, 37  
előremenő él, 58  
előzmény, 61  
esemény, 61  
Excel, 68
- független valószínűségi változó, 66
- feladat, 71  
fiktív tevékenység, 61  
first fit módszer, 51  
folytonos keresletű újságárus probléma, 75  
forrás, 56
- gradiens módszer, 77  
gradiensmódszer, 80
- hálózat egy vágása, 59  
hátramenő él, 58  
határelemzés, 73  
helyesség, 86  
helyi kereső eljárás, 77  
helyi minimumpont, 77  
heurisztika aszimptotikus hányadosa, 42  
heurisztikus közelítő eljárás, 39
- időtartam csökkentés, 65  
intervallum-aritmetika, 8  
irányított gráf, 55
- járatütemezési probléma, 36
- közvetlen előzmény, 62  
közvetlen követő, 63  
kései időzítés, 62  
keresési irány, 79  
konjugált gradiens módszer, 79  
korai időzítés, 62  
korlátozás és szétválasztás módszer, 39  
korlátozás és szétválasztás módszere, 85  
korlátozás nélküli nemlineáris optimalizálási feladat, 77  
korlátozó függvény, 85  
kritikus út, 64  
kritikus út módszer, 61  
kritikus tevékenység, 64  
kvadratus konvergencia, 77
- ládapakolási feladat, 42  
lánc, 55

---

<sup>9</sup>Az abc-sorrend sajnos nem az igazi: az ékezetes betűket és a matematikai jeleket érdekes helyre teszi a  $\LaTeX$ ...

- lépésköz, 79
- Late Event Time, 62
- legközelebbi város beillesztése, 39
- legközelebbi város beszúrása, 43
- legközelebbi város hozzáadása, 40
- legolcsóbb beszúrás, 43
- legtávolabbi város beszúrása, 43
- leszámlálási fa, 85
- Maple, 68
- Matlab, 68
  - |, 111
  - ~=, 111
  - ~, 111
  - ', 108
  - \*, 106
  - +, 106
  - , 106
  - ., 107
  - /, 106
  - 0, 111
  - 1, 111
  - :, 108
  - <=, 111
  - <, 111
  - ==, 111
  - >=, 111
  - >, 111
  - Display, 130
  - MaxGunEvals, 130
  - MaxIter, 130
  - NaN, 106
  - TolFun, 130
  - TolX, 130
  - &, 111
  - ^, 106
  - abs, 106
  - acos, 106
  - bicgstab, 81
  - bicg, 81
  - break, 112
  - cgs, 81
  - computer, 114
  - cosh, 106
  - cos, 106
  - defaultopt, 130
  - diag, 83
  - disp, 112
  - else, 111
  - end, 111
  - eps, 114
  - exit, 105
  - exp, 106
  - ezcontour, 122
  - feval, 107
  - flag, 83
  - floor, 106
  - fminbnd, 123
  - fminsearch , 123
  - format, 106
  - for, 111
  - fplot, 110
  - function, 107
  - fzero, 123
  - gallery, 82
  - gmres, 81
  - if, 111
  - iter, 83
  - i, 106
  - kg, 80
  - log10, 106
  - log, 106
  - lsqr, 81
  - meshgrid, 110
  - mesh, 110
  - minres, 81
  - nnz, 82
  - notify, 130
  - ones, 82, 108
  - pasc, 112
  - pcg, 81
  - plot3, 110
  - plot, 110
  - print, 113
  - qmr, 81
  - quit, 105
  - realmax, 114
  - realmin, 114
  - rem, 112
  - sin, 106
  - spy, 113
  - sqrt, 106
  - symmlq, 81
  - tanh, 106

- tan, 106
- tol, 81
- wathen, 82
- while, 111
- zeros, 108
- maximális folyam probléma, 56
- mesterséges él, 57
- modell, 71
- Monte Carlo szimuláció, 68
- mozgáshatár, 64
- nemlineáris optimalizálási feladat, 77
- Newton módszer, 77
- normális eloszlás, 67
- numerikus differenciálás, 18
- nyelő, 56
- offline szabási feladat, 52
- optimális vezérlés, 71
- PERT, 61, 66
- Program Evaluation and Review Technique, 61
- program kiértékelési és felülvizsgálati technika, 61
- quasi-Newton eljárás, 77
- reziduális vektor, 79
- SPSS, 68
- standard normális eloszlás, 68
- statikus modell, 71
- szétválasztási függvény, 85
- szórás, 66
- szabási feladat, 42
- szimmetrikus költségmátrix, 39
- sztochasztikus optimalizálási modell, 71
- sztochasztikus programozási probléma, 71
- táblázat a standard normális eloszláshoz, 243
- távolságvektor, 41
- túlkészletezés, 73
- tűrőhatár, 63
- utód, 63
- vágás, 59
- vágás kapacitása, 59
- végesség, 86
- valószínűség maximalizálási feladat, 72
- variancia, 66
- worst fit eljárás, 51



## Magyar-angol szószedet

Itt a leggyakoribb szakkifejezéseket gyűjtöttem össze azok angol nyelvű változatával. Ez remélhetőleg segít majd az inkább az angol kifejezéseket ismerőknek, és fordítva, megkönnyíti majd az angol szakszöveg olvasását azoknak, akik nem ismerik az angol szakirodalmat.

|   |   |
|---|---|
| a változókra vonatkozó korlátokkal rendelkező feladat                             | bound constrained problem   |
| befoglalási izotonitás  | inclusion isotonicity   |
| direkt kereső   | direct search method  |
| egészértékű optimalizálási feladat<br>elsőrendű módszer                           | integer optimization problem<br>first order method  |
| feltétel nélküli optimalizálási feladat   | unconstrained optimization problem  |
| globális minimum<br>globális minimumpont<br>gradiens módszer                      | global minimum (többes szám: global minima)<br>global minimizer point<br>gradient method                        |
| helyi minimum<br>helyi minimumpont  | local minimum (többes szám: local minima)<br>local minimizer point  |
| intervallum felosztási módszer  | interval subdivision method   |
| konkáv függvény<br>konvex függvény<br>korlátozott feladat<br>kvadratikus függvény | concave function<br>convex function<br>bounded problem<br>quadratic function                                    |
| legmeredekebb lejtő módszere<br>Lipschitz-folytonos függvény                      | steepest descent method<br>Lipschitzian function  |
| maximum<br>másodrendű módszerek<br>minimum<br>művelet kiterjesztése               | maximum (többes szám: maxima)<br>second order methods<br>minimum (többes szám: minima)<br>operation overloading |



|                               |  |
|-------------------------------|--|
| nemdifferentiálható függvény  | non-differentiable function            |
| négyzetösszeg típusú függvény | sum-of-squares type objective function |
| nyeregpon                     | saddle point                           |
| optimalizálási feltétel       | constraint                             |
| regresszió                    | regression                             |
| regressziós egyenlet          | regression equation                    |
| sima függvény                 | smooth function                        |
| stacionárius pon              | stationary point, critical point       |
| szeparált célfüggvény         | separable objective function           |
| szeparált helyi minimumpon    | separable local minimizer              |
| szigorú globális minimumpon   | strict global minimizer                |
| szigorú helyi minimumpon      | strict local minimizer                 |
| véletlen keresés              | random search                          |
| vonzáskörzet                  | region of attraction                   |

# A függelék

## Tematika

Az Optimalizálás Alkalmazásai című tárgy felvételének feltétele: az Operációkutatás I. tárgy teljesítése. A tárgy bevezetést ad az optimalizálási modellezésbe, módszerekbe és alkalmazásukba.

Előadás: Kötelező, 2 óra/5 kredit. Teljesítési módja: Kollokvium.

Gyakorlat: Kötelező, 1 óra/0 kredit. Teljesítési módja: Aláírás.

### Tematika

- A hátizsák feladat
- Utazó ügynök feladat
- A szabási feladat
- A maximális folyam probléma
- Sztochasztikus programozás
- Újságárus probléma
- A kritikus út és a PERT módszer
- Gradiens módszer
- A korlátozás és szétválasztás módszere

### Ajánlott irodalom

1. Bajalinov Erik és Imreh Balázs: Operációkutatás, Polygon, Szeged, 2001.
2. Az anyagot tartalmazó jegyzet előzetesen elérhető lesz a következő internetes címen:  
<http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/optalk.ps.gz>
3. R.B. Kearfott: Rigorous Global Search: Continuous Problems, Kluwer, 1996.

Összehasonlításul, a jelen tárgy elődje, az Operációkutatás II. tárgy tematikája röviden:

- Dualitás
- Egészértékű programozás
- Hozzárendelési feladat megoldása magyar módszerrel
- Szállítási feladat megoldása magyar módszerrel
- Hiperbolikus programozási feladat
- Konvex programozási feladat
- Gradiens módszer

Ugyanezen tárgy tételjegyzéke:

Egészértékű programozási feladat, LP relaxáció, kerekítés; Gomory-féle metsző síkok módszere; Dual all integer eljárás; Hozzárendelési feladat (ekvivalens költségmátrixokra vonatkozó segédteétel, a magyar módszer, a mátrixsorozat tulajdonságai), ezek alapján az optimális megoldás konstrukciója; Hozzárendelési feladat, a magyar módszer helyességének igazolása; tiltásos hozzárendelési feladat; Szállítási feladat (modell, megoldhatóság szükséges és elegendő feltétele, ekvivalens költségmátrixokra vonatkozó segédteétel); Szállítási feladat (magyar módszer, az előálló mátrixsorozat tulajdonságai, ezek alapján az optimális megoldás meghatározása); Szállítási feladat (magyar módszer, helyessége bizonyítása); Nyitott, tiltásos és korlátos szállítási feladatok; Hiperbolikus programozási feladat; Konvex programozási feladat; Általános gradiens módszer; Frank-Wolfe eljárás.

## B függelék

### Mintafeladatok a dolgozatokhoz

#### Feladatok röpdolgozatokhoz

Példa dolgozatfeladatok az évközi kis felmérő dolgozatokhoz:

1. Definiálja a hátizsák feladatot!
2. Adjon meg egy alkalmazási példát, amelyhez olyan hátizsák feladat tartozik, amelyben a mind a súlyok, mind a célfüggvény együtthatók pozitívak!
3. Definiálja a hátizsák feladatot!
4. Oldja meg a  $\max 2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot!
5. Mi a lényegi eltérés a hátizsák- és a hajórakodási feladat között?
6. A fix költség feladatot melyik optimalizálási feladatosztályba sorolja?
7. Mutasson egy gyakorlati problémát, amely utazó ügynök feladatra vezet!
8. Definiálja a fix költség feladatot!
9. Oldja meg a  $\max x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot!
10. Mi a lényege az implicit leszámolási algoritmusnak?
11. Melyik optimalizálási feladatosztályba sorolja a hajórakodási feladatot?
12. Mi a megoldása az olyan utazó ügynök feladatnak, amelyben minden városok közti távolság egyenlő?
13. Mennyi a legolcsóbb beszúrás aszimptotikus hányadosa szimmetrikus, és a háromszög egyenlőtlenséget kielégítő távolság mátrixra?
  - 2
  - 3
  - 30 000
  - 300 000

## Feladatok a tudásfelmérő dolgozathoz

Példaként álljon itt néhány feladat a félév végi tudásfelmérő dolgozatra való felkészüléshez, iránymutatásul. A felmérés célja az, hogy a hallgatók bemutassák, hogy az előadáson megismert fogalmak összefüggéseivel tisztában vannak, értik az ismertetett algoritmusokat, és az elhangzott információk lényegét elsajátították. A dolgozatban tíz feladat lesz, mindegyikkel 4 pontot lehet elérni. A kredit megszerzésének szükséges feltétele legalább 20 pont elérése.

1. Indokolja, hogy miért hasznos a hátizsák feladat implicit leszámolási eljárásához az, hogy a célfüggvény-együtthatók nem pozitívok, és hogy a súlyok növekvő sorrendben vannak az első lépés után!
2. Ha egy 2 Ghz-es PC 10 órajel alatt tudja egy vektorról eldönteni, hogy az lehetséges megoldása-e a hátizsák feladatnak, akkor egy nap alatt milyen méretű feladat megoldására lehet biztosan számítani (tehát a legrosszabb esetben)?
3. Írja le a hátizsák feladatot részletesen!
4. Mi a lényege a hátizsák feladat implicit leszámolással való megoldásának?
5. Milyen esetben előnyös a hátizsák feladat megoldására az implicit leszámolás módszere?
6. Mi a lényegi eltérés a hátizsák- és a hajórakodási feladat között?
7. Ismertesse részletesen az utazó ügynök feladatot!
8. Soroljon fel legalább 4 olyan gyakorlati feladatot, amelyek az utazó ügynök feladatra vezethetők vissza!
9. Adja meg az utazó ügynök feladat rövidebb alakját! Miért előnyös ez?
10. Mondja ki az utazó ügynök feladat két alakjának ekvivalenciájára vonatkozó tételt! Vázzolja a bizonyítást!
11. Mit lehet mondani ekvivalens mátrixokhoz tartozó utazó ügynök feladatokról? Hogyan lehet bizonyítani?
12. Mi a viszonya az utazó ügynök feladatnak a hozzárendelési feladathoz?
13. Mi az oszlopgenerálás módszerének szerepe? Miért előnyös?
14. Ismertessen néhány heurisztikát az utazó ügynök feladatra!
15. Mi a szerepe a távolságvektornak az utazó ügynök feladat heurisztikáiban?
16. Milyen módszerek használatosak heurisztikus algoritmusok hatásosságának jellemzésére?
17. Tárgyalja részletesen az aszimptotikus hányados definícióját és jelentését!
18. Mit tud az utazó ügynök feladat heurisztikáinak aszimptotikus hányados értékeiről?
19. Fogalmazzza meg a szabási feladat modelljét!

20. Adjon meg olyan gyakorlati feladatokat, amelyek a szabási feladatra vezetnek!
21. Definiálja a szabási feladat 4 heurisztikáját!
22. Definiálja a legrövidebb út feladatot részletesen!
23. Adja meg Dijkstra algoritmusát!
24. Adja meg a maximális folyam feladat alapfogalmait!
25. Adja meg a Ford-Fulkerson algoritmust és a címkézési eljárást!
26. Mondja ki a maximális folyam probléma címkézési eljárására vonatkozó állítást, és igazolja röviden!
27. Mondja ki és igazolja a folyamok erősségét korlátozó vágás kapacitásokra vonatkozó tételt!
28. Ismertesse a kritikus út módszerét a kapcsolódó fogalmakkal együtt!
29. Mutasson olyan példát, amelyben a CPM módszer korai és kései időzítése minden csúcsra megegyezik!
30. Magyarozza el a lényegi különbséget a tőrés határ és a mozgáshatár között!
31. Hogyan lehet a CPM módszert a projekt lerövidítése optimális változatának meghatározására használni?
32. Ismertesse a PERT módszert!
33. Mit tud az újságárus problémáról?!
34. Mi az eltérés a diszkrét- és a folytonos keresletű újságárus probléma megoldási módszere között?
35. Adjon meg egy olyan konkrét, részletes gyakorlati feladatot, amely az újságárus problémára vezethető vissza!
36. Mit tud a sztochasztikus programozási modellekről?
37. Ismertesse a nemlineáris optimalizálási feladatot és a megoldására szolgáló Newton módszert!
38. Ismertesse a konjugált gradiens módszert!
39. Adjon példát a nemlineáris optimalizálás témaköréből olyan algoritmusra, amely véges számú lépésben konvergál, amelyre lineáris-, szuperlineáris-, illetve olyanra is, amely kvadratus konvergencia érvényes!
40. Adjon példát az automatikus differenciálásra és az intervallum aritmetikára!
41. Mi mindenre jó a Newton módszer? Hogyan jellemezhető a konvergenciája?
42. Definiálja a korlátozás és szétválasztás módszerét! Mikor érdemes alkalmazni?

## 2.1. A tudásfelmérő dolgozat feltételei

- Először is, írja fel a nevét a dolgozatra, és írja alá a megfelelő helyen!
- Készítsék ki a diákigazolványukat, vagy más fényképes igazolványt az asztalra.
- Minden feladat 4 pontot ér, összesen tehát 40 pontot lehet elérni.
- A megoldásra 60 perc áll rendelkezésre, kezdje a neve megadásával, és az aláírással.
- A feladatokat önállóan kell megoldani.
- A mobiltelefonokat kérem kikapcsolni.
- A megadott hely elegendő a helyes válasz megadásához, ne kérjenek újabb papírlapot.
- A dolgozat megírásához semmilyen segédeszközt (kalkulátor, jegyzet, könyv, a szomszéd tanácsa, ...) sem szabad használni.
- A fenti szabályokat megszegőtől a dolgozatát elveszük, és a tudásfelmérés sikertelennek minősül.
- Ha nem szeretné, hogy a dolgozat eredményének közzétételekor a neve megjelenjen, akkor adja meg a hallgatói azonosítóját.
- Ha valami nem világos, kérem, kézfelemeléssel jelezze. A jelenlevő oktatók válaszolnak.

Jó munkát!

## C függelék

### Bevezetés a MATLAB használatába

A MATLAB egy numerikus programkönyvtár, amely elsősorban mátrixműveletek hatékony alkalmazására készült (innen a neve is). Mindazok, akiknek van tapasztalata magasszintű programozási nyelvekkel, és dolgoztak már ciklusokkal, feltételes utasításokkal, szubrutinhívással, és logikai relációkkal, azok ezt a tudást közvetlenül használhatják a MATLAB alkalmazása során.

A programcsomag számos numerikus eljárást tartalmaz, könnyen használható két- és háromdimenziós megjelenítést, és magas szintű programozhatóságot. A MATLAB elsősorban azért alkalmas a közelítő számítások oktatására, mert könnyen lehet a segítségével ilyen programokat írni és módosítani.

A következő rövid bevezetés a MATLAB használatába inkább csak támogatást nyújt, de a programcsomag teljes körű megismeréséhez valamely felhasználói kézikönyvet érdemes elolvasni (pl. [15]).

A MATLAB programot a Linux és a Windows operációs rendszerekben a szokásos módon, a megfelelő ikonra való dupla kattintással lehet elindítani. Az ezután kapott párbeszédéses ablakban a felhasználó által begépelte utasításokat a `>>` prompt után lehet megadni. A programból való kilépéshez egyszerűen írjuk be a `quit` vagy az `exit` utasítást a prompt után.

A tárgyalandó további nagyobb témák:

- Programozás m-fájlokkal: szkriptek
- Adattípusok (osztályok) a MATLAB-ban
- Hogyan lehet hatékony programokat írni MATLAB-ban?
- Adatállományok olvasása és írása
- Ritka mátrixok kezelése
- A MATLAB sűgó rendszere
- Polinomok a MATLAB-ban

### Aritmetikai műveletek és függvények

Itt és a továbbiakban is a MATLAB utasításokat `typewriter` betűtípussal írjuk. Az alapvető műveletek írásmódja nem nagyon meglepő:



|       |                                    |
|-------|------------------------------------|
| +     | összeadás                          |
| -     | kivonás                            |
| *     | szorzás                            |
| /     | osztás                             |
| ^     | hatványozás                        |
| i, pi | a megfelelő konstansok             |
| NaN   | Not-a-Number, nem ábrázolható szám |
| Inf   | végtelen                           |

A programozási nyelvekben megszokott standard függvények itt is elérhetők, és nevük is közel van a szokásoshoz, pl.:

```
abs(#)   cos(#)   exp(#)   log(#)   log10(#)   cosh(#)   sin(#)
tan(#)   sqrt(#)   floor(#)   acos(#)   tanh(#)
```

A # persze az adott függvény argumentumát jelöli, és további információt más függvényekről a MATLAB online súgója ad.

PÉLDA. Tekintsük a következő egyszerű képletet, amely a  $\pi$  egy közelítésének pontos decimális jegyei számát adja meg:

$$-\log_{10} \left( \frac{3.141626 - \pi}{\pi} \right).$$

Ennek MATLAB kódja, amit tehát a >> jelű prompt után kell begépelni:

```
>> -log10 ((3.141626 - pi) / pi)
```

Az ENTER megnyomása után a következő választ (answer) kapjuk:

```
ans =
    4.9741
```

Ennek eléréséhez tehát nem kellett semmit se írni a sor végére. Ha visszaírt válasz nélkül kérjük, akkor pontosvesszőt kell írni a sor végére, mint hasonló rendszerekben.

Alapértelmezésben tehát 5 jegyet kapunk. Ha pontosabb megjelenítésre van szükség, akkor a `format long` utasítás kb. 15 decimális jegyet eredményez:

```
>> format long
3*cos(sqrt(4.7))
ans =
-1.68686892236893
```

A felhasználók saját függvényeiket ún. M-file-okban adhatják meg. Ezek az adatállományok a MATLAB saját formátumát követik, .m kiterjesztésűek, és a MATLAB támogatja a szerkesztésüket. A fentiek szerint definiált új függvényeket ugyanúgy lehet a MATLAB-on belül használni, mint a rendszer saját függvényeit. Ha elsőre nem találja a frissen írt .m állományt, akkor ellenőrizzük a Set Path utasítást a File menüsorban, és ha kell, adjuk az új könyvtárat az eddigiekhez.

PÉLDA. Definiáljuk a  $\text{fun}(x) = 1 + x - x^2/4$  függvényt a MATLAB Editor/Debugger ablakában, és mentjük el a fun.m állományba. Ehhez a következő formátumot kell követni:

```
function y=fun(x)
y=1+x-x.^2/4;
```

A „.” használatát hamarosan megmagyarázzuk. A változók és a függvények nevében használhatunk kis és nagybetűket, a lényeg az, hogy a hivatkozások során következetesen járjunk el. Ezután a MATLAB parancsablakában (Command Window) a következő módon használhatjuk a definiált függvényt:

```
>> cos(fun(3))
ans=
    -0.1782
```

A függvény kiértékelésére használhatjuk a feval utasítást is:

```
>> feval('fun',4)
ans=
     1
```

Vegyük észre, hogy ebben az esetben a függvény nevét karaktársorozatként kell megadni.

## Műveletek mátrixokkal

A mátrixok kezelése érthető módon az erőssége a MATLAB-nak. Lényegében minden változót mátrixként kezel:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
A=
     1  2  3
     4  5  6
     7  8  9
```

Ahogy látható, a mátrixok definiálásában a sorokat pontosvesszővel választjuk el, az egyes mátrixelemeket pedig szóközzel. A mátrixokat soronként begépelve is be lehet vinni:

```
>> A=[1 2 3
     4 5 6
     7 8 9]
A=
     1  2  3
     4  5  6
     7  8  9
```

A mátrixokat beépített függvények segítségével is generálhatjuk:

```
>>Z=zeros(3,5);          egy 3-szor 5-ös, csupa nullából álló mátrixot ad,
>>X=ones(3,5);          egy 3-szor 5-ös, csupa egyesből álló mátrixot kapunk,
>>Y=0:0.5:2             egy 1-szer 5-ös mátrixot generál:
Y=
  0  0.5000  1.0000  1.5000  2.0000
```

A definiált mátrixokon elemenként függvényeket lehet végrehajtani:

```
>>cos(Y)                egy megfelelő 1 × 5-ös mátrixot ad:
ans=
  1.0000  0.8776  0.5403  0.0707 -0.4161
```

A mátrixok komponenseit ügyesen lehet kezelni a MATLAB-ban, tekintsük például a következő utasításokat:

```
>>A(2,3)                az A mátrix egy elemét választja ki,
ans=
  6
A(1:2,2:3)              az A mátrix egy részmatrixát adja,
ans=
  2  3
  5  6
A([1 3],[1 3])          az A mátrix egy részmatrixa kiválasztásának egy másik módja:
ans=
  1  3
  7  9
>>A(1,1)=sin(3.14);    értékadás egy mátrixelemnek.
```

A mátrixokra a következő műveleteket alkalmazhatjuk:

```
+      összeadás,
-      kivonás,
*      szorzás,
^      hatványozás, és
'      konjugált transzponálás.
```

PÉLDA. A mátrixműveletek illusztrálásaként tekintsük a következő egyszerű utasítást:

```
>>B=[1 2;3 4];
>>C=B'
```

```

C=
     1     3
     2     4
>>3*(B*C)^3
ans=
    13080    29568
    29568    66840

```

Itt tehát  $C$  a  $B$  transzponáltja, és az utolsó mátrix a  $3(B * C)^3$ .

A felsoroltakon túl természetesen számos egyéb utasítás érhető el mátrixok manipulálására. Ezekkel kapcsolatban érdemes az online súgót, a felhasználói kézikönyvet, vagy más leírást (pl. [15]) tanulmányozni.

A MATLAB erőssége azon függvények széles köre, amelyek mátrixok elemein hajthatók végre. Korábban erre láttunk példát, amikor egy  $1 \times 5$ -ös mátrix elemeinek koszinuszát határoztuk meg. A mátrixokra vonatkozó összeadás, kivonás és skaláris szorzás természetesen mátrix elemenként történik, de a szorzás, osztás és a hatványozás már nem. Ahhoz, hogy ezeket a műveleteket a mátrixelemeken hajthassuk végre, a műveleti jelek elé egy pontot kell írni: `.*`, `./` és `.^`. A mátrixokra és azok elemeire vonatkozó műveleteket nem szabad összekeverni:

```

>>A=[1 2;3 4];
>>A^2           ez az AA mátrixszorzatot adja:
ans=
     7    10
    15    22
>>A.^2         ezzel az A mátrix elemei négyzetét kapjuk:
ans=
     1     4
     9    16
>>cos(A./2)    ezzel pedig az A mátrix elemei felének koszinuszát határozzuk meg:
ans=
    0.8776    0.5403
    0.0707   -0.4161

```

## Megjelenítés

A MATLAB görbék és felületek két-, vagy háromdimenziós ábráit tudja megjeleníteni. Az itt röviden bemutatott lehetőségeken túliakat az online súgó, szakkönyv ([15]), vagy a felhasználói leírás segítségével kereshetjük meg.

A kétdimenziós görbék megjelenítésére a `plot` utasítást lehet használni. A következő példa az  $y = \cos(x)$  és az  $y = \cos^2(x)$  függvényeket ábrázolja a  $[0, \pi]$  intervallumon:

```

>>x=0:0.1:pi;
>>y=cos(x);
>>z=cos(x).^2;

```

```
>>plot(x,y,x,z,'o')
```

Az első sor adja meg a megjelenítési tartományt, 0.1 lépésközzel. A következő kettő definiálja a két függvényt. Vegyük észre, hogy az első három sor mindegyike pontosvesszővel végződik. Ez megakadályozza, hogy az ezekben definiált mátrixok megjelenjenek a párbeszédés ablakban. A negyedik sor tartalmazza a plot utasítást, és jeleníti meg a grafikont. Az első két argumentum eredményezi az  $y = \cos(x)$  függvény ábrázolását, az utolsó három pedig a  $z = \cos^2(x)$  megjelenítését, éspedig úgy, hogy az egyes  $(x_k, z_k)$  pontokat 'o' jelöli.

A plot utasításnak egy hasznos alternatívája az fplot. Általános alakja a következő:

```
fplot('name',[a,b],n).
```

Ennek hatására a program veszi a name.m adatállományból a függvényt, és az  $[a, b]$  intervallumból vett  $n$  darab alappontban meghatározott érték alapján elkészül az ábra. Az  $n$  alapértelmezése 25.

```
>>fplot('tanh',[-2,2])
```

a  $\tanh(x)$  függvényt jeleníti meg a  $[-2, 2]$  intervallumon.

A plot és a plot3 utasítások alkalmasak paraméteres függvények két-, illetve háromdimenziós ábrázolására. Ezek különösen differenciálegyenletek megoldásának megjelenítésére alkalmasak. Például a  $c(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t))$  ellipszist a  $0 \leq t \leq 2\pi$  tartományon a következő utasítással lehet ábrázolni:

```
>>t=0:0.2:2*pi;
>>plot(2*cos(t),3*sin(t))
```

A  $c(t) = (2 \cos(t), t^2, 1/t)$  3-dimenziós görbe képét a  $0.1 \leq t \leq 4\pi$  paraméter-tartományon pedig a következő utasítással lehet ábrázolni:

```
>>t=0.1:0.1:4*pi;
>>plot3(2*cos(t),t.^2,1./t)
```

A háromdimenziós felületek ábrázolásához egy téglatestet kell megadni a felület értelmezési tartományán, amelyet a meshgrid paranccsal lehet definiálni. Ezután a mesh vagy a surf parancsokkal kapjuk az ábrát, mint a következő példában is:

```
>>x=-pi:0.1:pi;
>>y=x;
>>[x,y]=meshgrid(x,y);
>>z=sin(cos(x+y));
>>mesh(z)
```

(Vegyük észre, hogy az utolsó sorban egyik példában sincs pontosvessző a sor végén.)

## Programok, ciklusok, vezérlés

A logikai és relációs jelek, műveletek a MATLAB-ban is hasonlóak a magasszintű programozási nyelvekben megszokottakhoz:

Relációjelek:

|    |                      |
|----|----------------------|
| == | egyenlő              |
| ~= | nem egyenlő          |
| <  | kisebb               |
| >  | nagyobb              |
| <= | kisebb vagy egyenlő  |
| >= | nagyobb vagy egyenlő |

Logikai műveletek és konstansok:

|   |         |
|---|---------|
| ~ | negáció |
| & | és      |
|   | vagy    |
| 1 | igaz    |
| 0 | hamis   |

A `for`, `if` és `while` utasítások a MATLAB-ban is úgy működnek, mint a hasonló programozási nyelvekben. Ezeknek az alapvető formája:

```
for (ciklusváltozó = kifejezés)
    utasítások
end
```

```
if (logikai kifejezés)
    utasítások
else
    utasítások
end
```

```
while (kifejezés)
    utasítások
end
```

A következő példa azt mutatja, hogyan lehet egymásba ágyazott ciklusokkal egy mátrixot generálni. Ha a példaprogramot `nest.m` néven mentjük el, akkor a MATLAB promptjához `nest`-et írva az `A` mátrixot eredményezi. Vegyük észre, hogy a mátrix bal felső sarkából kiindulva a Pascal háromszöget kapjuk.

```

for i=1:5
    A(i,1)=1;A(1,i)=1;
end
for i=2:5
    for j=2:5
        A(i,j)=A(i,j-1)+A(i-1,j);
    end
end
A

```

A `break` parancs hatására befejeződik egy ciklus:

```

for k=1:100
    x=sqrt(k);
    if (k>10) & (x-floor(x)==0)
        break
    end
end
k

```

A `disp` utasítás szöveg, vagy egy mátrix kiíratására használható:

```

n=10;
k=0;
while k<=n
    x=k/3;
    disp([x x^2 x^3])
    k=k+1;
end

```

A MATLAB programírás hatékony módja a felhasználó által definiált függvények összeállítása. Ezek input és output paramétereiket is használhatnak, és más programokból szubrutinként hívhatók. Ennek bemutatására tekintünk a következő egyszerű programot, amit a MATLAB File / New menüpontban elérhető Editor / Debugger segítségével szerkesztünk meg, és mentjük el `pasc.m` néven.

```

function P=pasc(n,m)
%Input    - n a sorok száma
%         - m a prímszám
%Output   - P a Pascal háromszög

for j=1:n
    P(j,1)=1;P(1,j)=1;
end
for k=2:n
    for j=2:n
        P(k,j)=rem(P(k,j-1),m)+rem(P(k-1,j),m);
    end
end

```

```
end
end
```

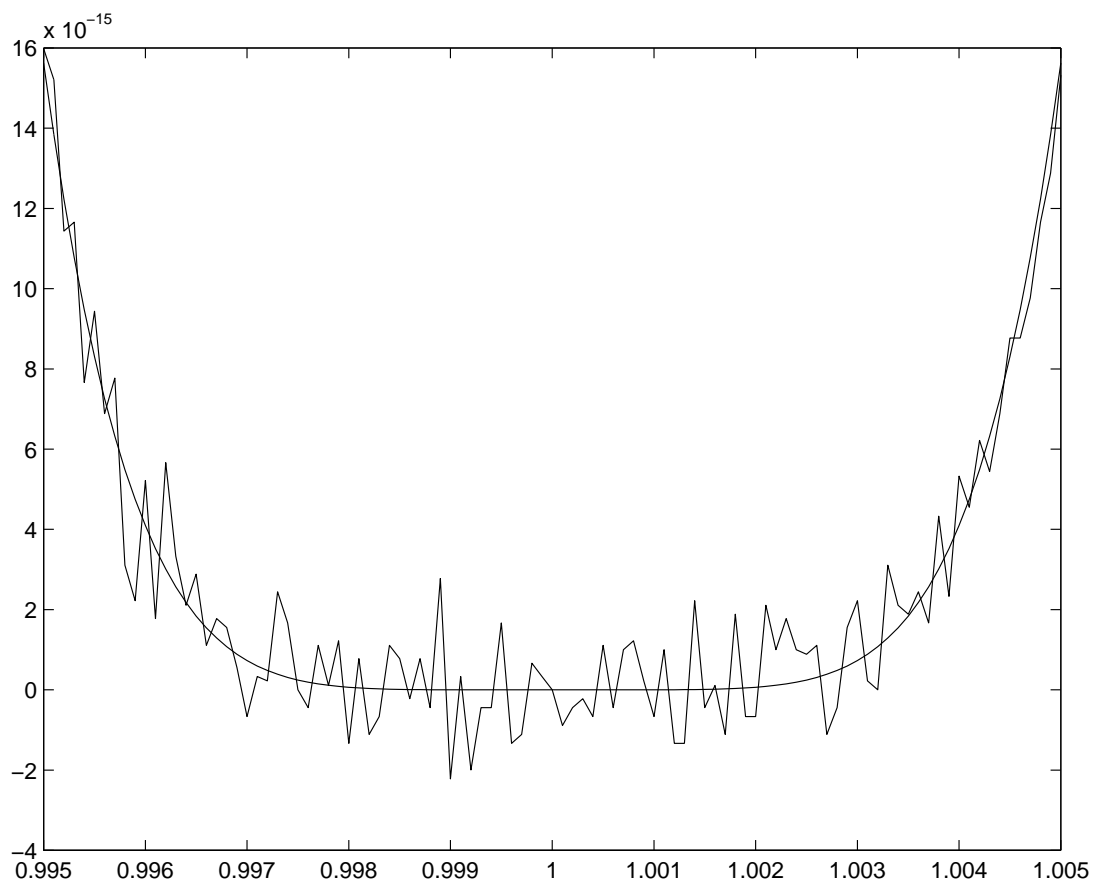
Ezután a MATLAB parancssorába írjuk be azt, hogy  $P = \text{pasc}(5, 3)$ , és láthatjuk a mod 3 Pascal háromszög első 5 sorát. A másik érdekes teszt  $P = \text{pasc}(175, 3)$ ; (most fontos a pontosvessző), és aztán gépeljük be azt, hogy  $\text{spy}(P)$ , ami ritka mátrixot generál nagy  $n$  esetén.

PÉLDA. Az alábbi rövid Matlab program megjeleníti az  $y = (1 - x)^6$  függvényt, és ennek Horner-elrendezés szerint átrendezett, de ekvivalens alakját, ahol

$$z = ((((((x - 6) * x + 15) * x - 20) * x + 15) * x - 6) * x + 1).$$

```
>> x = (9950:10050)/10000; % definialja a pontsorozatot
>> y = (1-x).^6;
>> z = ((((((x-6).*x+15).*x-20).*x+15).*x-6).*x+1);
>> plot(x,[y;z]); % egy grafikont jelenit meg
>> print -deps hornerdemo.ps % kiirja egy fajlba
```

A kapott ábra a két nagyon eltérő görbével (a sima az  $(1 - x)^6$ ):



Néhány olyan Matlab utasítás, amely az adott számítógép, illetve a szoftver környezet megismerését szolgálja:



az `eps` a gépi pontosság aktuális értékét adja,  
a `computer` azonosítja a használt számítógép típusát,  
a `realmax` a legnagyobb pozitív gépi szám,  
a `realmin` a legkisebb pozitív gépi szám.

Végül, meglepetésként gépeljük be `spy` utasítást, és a sorvégi pontosvessző nélkül nyomjuk meg az Enter gombot.

## D függelék

### Az esszé, illetve kötelező program követelményei, témák

A félévi munka egyik legfontosabb eleme a megírandó esszé vagy kötelező program. Azt, hogy az adott félévben esszét vagy kötelező programot kell-e írni, a félév elején a gyakorlatvezető szabja meg. Ez a kapható összpontszám komoly részét adja, és ez lesz az eredménye a hallgatók önállóan végzett munkájának.

#### Az esszé

Az esszé egy a kötelező program megírásáról és teszteléséről beszámoló olyan rövid (15-20 oldalas) jelentés, amelynek a következő főbb részeket kell tartalmaznia:

1. A kitűzött feladat pontos, részletes megfogalmazása, a szakirodalom megismerése alapján a feladat alapos leírása, kitérve annak nehézségeire, és eltéréseire a szomszédos területektől. Fontos tárgyalni az alkalmazási területeket. Érdeemes itt kis méretű, áttekinthető példákat használni.

2. A megoldására megírt, felhasznált (ha lehet, Matlab, Scilab, Netlib, esetleg Octave) programok részletes megadása, leírása. Ki kell térni az alkalmazott számítógépes megoldások okaira, előnyeire is (mint pl. a választott adattípus, számformátum, algoritmus változat, stb.). A programok tetszőleges programozási nyelven készülhetnek, de az előbb említettek mellett a JAVA is preferált, mert a hordozhatósága (?) miatt jó lehet az algoritmusok bemutatására.

3. A bemutatott algoritmusok hatékonyságát, sebességét, műveletigényét, pontosságát és egyéb említésre méltó tulajdonságát alkalmas teszteléssel kell demonstrálni. Fontos azt is jelezni, hogy milyen méretű feladatok megoldását lehet a tárgyalt módszerekkel elérni. Ennek eredményét táblázatos vagy grafikonos formában kifejező módon kell megadni.

4. Az esszé foglalja össze a szűkebb szakterület mélyebb vagy szélesebb körű megismeréséhez ajánlható irodalmat is, legyen az nyomtatott vagy elektronikus formájú.

Az esszét nyomtatott vagy elektronikus formában kell a gyakorlatvezetőnek benyújtani (a konkrét feltételeket a gyakorlatvezető adja meg). A használt szövegszerkesztő lehetőleg L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X vagy Word legyen. A program futtatható változata és a forráskód is kell ehhez.

Világos, hogy a heti egy órányi gyakorlat nem elegendő az új tantárgy olyan szintű megismerésére, amelyre támaszkodva az eddigiekben leírt szintű esszé minden további nélkül megírható lenne. A tárgy célja viszont az is, hogy az önálló munkát serkentse, hozzászoktassa a

hallgatóságot ahhoz, hogy egy kapott feladat megoldásához a szükséges részletesebb ismereteket maga szerezzze meg. Ehhez érdemes támaszkodni a hálózaton keresztül elérhető előzetes jegyzet irodalomjegyzékére, az interneten elérhető adatokra, és az évfolyamtársak segítségére is. Korlátozott mértékben a gyakorlatvezetővel való konzultáció is segíthet.

Az esszé *önálló munkát* kell hogy tükrözzön. Az esszével kapcsolatos kérdésekre a hallgatónak kimerítő, teljes választ kell tudnia adni. Az azonos témájú esszéket összehasonlítják a gyakorlatvezetők. Az esszé értékelésének alapja épp a végzett önálló munka lesz.

Az esszé értékét növeli, ha az a Matlab, Scilab, Netlib vagy Octave programjait tárgyalja. A Matlab elérhető az intézeti kabinet gépein, de a gyakorlatvezetők egy hónapig használható bemutató változatot is tudnak adni otthoni implementálásra. A hallgató javasolhat is esszé formában feldolgozandó témát, ezt azonban csak a gyakorlatvezető előzetes egyetértése esetén lehet elfogadni. Ez a lehetőség például szakdolgozat, diplomamunka, diákköri munka során már megismert témák bevonása révén előnyös lehet.

## A kötelező program

A kötelező program olyan házfeladat, amelyet Java nyelven kell írni, és a célja az, hogy a hallgatók bemutassák jártasságukat optimalizálási eljárások implementálásában, és az érintett algoritmusok működésének áttekinthető, könnyen érthető formában való megjelenítésében.

Az esszével szemben a kötelező program dokumentálása más szempontokra helyezi a hangsúlyt:

1. meg kell adni az algoritmus folyamatábráját vagy pszeudokódját,
2. a program teljes forrásszövegét, de legyen elérhető a program a hálózaton, és telepíthető is más gépekre,
3. meg kell adni a felhasználói útmutatót, amely alapján a program teljesértékűen használható, és végül
4. részletesen leírni egy jellemző futtatási példát, amely az algoritmus használhatóságát mutatja.

Tehát nem kell: az adott feladatkört ismertetni, részletesen megadni a kapcsolódó szakirodalmat, nem szükséges a megírt program hatékonyságát és hatásosságát teszteléssel igazolni. Minyaként érdemes megnézni a

<http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes>

vendégoldalon a körpakolási illusztráló Java programot. Fontos az önálló munka. Az értékelés alapja az lesz, hogy milyen látványos, ügyes illusztrációt ad a program az adott algoritmushoz.

## Esszé- és kötelező program témák

Itt vegyesen adtunk meg témákat esszéíráshoz, illetve kötelező programhoz. ezeken felül is lehet témát választani a gyakorlatvezetővel való egyeztetés alapján. A \*-al jelölt feladatok nehezebbeknek számítanak, ezért sikeres megoldásukért többletpont jár. Néhány esszétéma (ettől

a gyakorlatvezető nyilván eltérhet, és előzetes egyeztetés alapján a hallgató maga választotta témát is kidolgozhat):

1. *Kalkulátor.* Írjon egy eljárást programozható kalkulátorra egyszerű globális optimalizálási feladatok megoldására, úgy hogy szerény méretű feladatokra reális időben lehessen közelítő megoldást kapni. Tesztelje az algoritmust polinomokkal.
2. *Rácsmenti keresés.* A feladat egy olyan algoritmust kódolni, amely valamely célfüggvény értékeit határozza meg egy  $n$ -dimenziós intervallumban úgy, hogy a rács finomsága a program input paramétere.
3. *Véletlen keresés – Monte Carlo módszer.* A feladat olyan programot írni, amely egy célfüggvény minimumának megkeresésére vállalkozik úgy, hogy az inputban meghatározott többdimenziós intervallumba a felhasználó által megadott számú véletlen pontot generál egyenletes eloszlással, ezeken kiértékeli a célfüggvényt, majd visszaadja ezek közül a legjobbat.
4. *Excel Solver.* Oldjon meg egy kifejező globális optimalizálási feladatot az Excel Solver nevű eszközzel (ezt néha külön implementálni kell a bővítménykezelővel). Dokumentálja az indítópont szerepét, a megbízhatóságot.
5. *Maple.* A Maple (vagy a Mathematica, esetleg a Derive, vagy a Mupad) programra építve adjon meg egy olyan optimalizálási algoritmust, amely azon alapul, hogy a korlátozás nélküli optimalizálási feladat célfüggvényének gradiense zérushelyeit határozza meg.
6. *SPSS.* Egy statisztikai programcsomag (pl. a felsőoktatásban ingyenes SPSS) nemlineáris regressziós eljárását használja egy globális optimalizálási feladat megoldására: mutasson példát, amikor több, lényegesen eltérő helyi minimum létezik.
7. *Rétegelt mintáztatás.* Implementálja a rétegelt mintáztatás módszerét (dobjon  $N$  db. pontot egyenletes eloszlással egy  $n$ -dimenziós intervallumba, tartsa meg a célfüggvény szerinti legjobb 10%-ot, rajzoljon ezek köré intervallumot stb.), és oldjon meg vele globális optimalizálási feladatokat.
8. *Nemlineáris szimplex.* Implementáljuk a nemlineáris szimplex módszert (az  $n$ -dimenziós térben  $n+1$  pontból álló szimplex minden csúcsában határozzuk meg a célfüggvény értékét, majd billentsük úgy, hogy a legrosszabbat változtatjuk meg), és teszteljük nem triviális feladatokon.
9. *Evolúciós módszer.* Valósítsa meg az evolúciós módszer egy változatát (válasszon  $N$  darab pontot egyenletes eloszlással egy  $n$ -dimenziós intervallumban, tartsa meg ezek legjobb 50%-át, minden ilyen pontból képezzen egy utódot úgy, hogy a szülőből mint várható értékből kiindulva normális eloszlással kicsit eltérő pontot generál, vegye a teljes populáció legjobb 50%-át stb.), és oldjon meg vele ehhez a módszerhez igazodó globális optimalizálási feladatokat.
10. *Egy-dimenziós Lipschitz-optimalizálás.* Implementálja az egy-dimenziós, az  $L$  Lipschitz konstans ismeretén alapuló módszert (képezze a végpontokból az  $L$  meredekséggel rajzolt alulról korlátozó lineáris törtfüggvényt, és ezt javítsa fokozatosan annak minimum-pontjában való függvénykiértékelés, és a törtvonal megfelelő javítása segítségével), és mutassa be a működését áttekinthető feladatokon.

11. *Több-dimenziós Lipschitz-optimalizálás.* Implementálja a több-dimenziós, az  $L$  Lipschitz konstans ismeretén alapuló módszert (vegye a lehetséges megoldások halmazának egy befoglaló intervallumát, és ezen hajtson végre egy korlátozás és szétválasztás eljárást az intervallum végpontokban kiértékelt célfüggvény és a Lipschitz konstans felhasználásával meghatározott alsó- és felső korlátokra támaszkodva), és mutassa be a működését áttekinthető feladatokon.
12. *Szimulált hőkezelés.* Implementálja a simulated annealing módszer egy egyszerű változatát (dobjon egyenletes eloszlással  $N$  véletlen pontot az  $n$ -dimenziós keresési intervallumban, majd minden pontból lépjen egy nem rosszabb célfüggvényértékű pontba csökkenő szórású normális eloszlás alapján stb.), és tesztelje néhány feladaton.
13. *Multistart.* Valósítsa meg a többszörös indítás módszerét (válasszon ki egyenletes eloszlással néhány ígéretes indulópontot, és hajtson végre helyi keresést ezekből startolva...) egy egyszerű formában, és illusztrálja a működését egy alkalmas feladaton.
14. *GLOBAL.* Töltse le a GLOBAL programot a következő internetes címről és oldjon meg vele globális optimalizálási feladatokat.  
`ftp://ftp.jate.u-szeged.hu/pub/math/optimization/index.html`
15. *Intervallumos B&B\*.* Az alapl műveletek intervallumos kiterjesztését írja meg szubrutinként (vagy terjessze ki azokat a megfelelő műveletek túltöltésével), majd erre alapozva adjon meg egy egyszerű korlátozás és szétválasztás típusú optimalizáló eljárást. Tesztelje egy kiismerhető polinomon.
16. *Körpakolás négyzetben\*.* A feladat az egységnyezetben meghatározni adott  $n$ -re azt az  $n$  darab pontot, amelyek közötti minimális távolság a lehető legnagyobb. A feladathoz tetszőleges alkalmas algoritmus használható.
17. *Fekete-pontok meghatározása\*.* A feladat egy gömb felületén adott számú pont meghatározása úgy, hogy az azok távolságának reciprok összege minimális legyen. A megoldásra tetszőleges módszer bevethető.
18. *Kissing number\*.* Határozza meg (közelítő módszerrel), hogy egy magas dimenziós térben az origó körüli egység sugarú gömbhöz hány azonos sugarú gömb illeszthető átfedés nélkül.
19. *A legrövidebb\*.* Adjon meg egy olyan, minimális hosszúságú globális optimalizálási algoritmust, amely a Shekel-10 feladatot 1 másodpercen belül képes megoldani legalább 5 jegy pontossággal.
20. *Az utazó ügynök feladat Magyarország legnagyobb  $n$  településére\*.*
21. *Hova helyezzünk el egy kellemetlen üzemet Magyarországon úgy, hogy a környező települések lakosai számával egyenesen, a távolsággal fordítottan arányos összútalat minimális legyen?\**
22. *Legkisebb négyzetek módszerének használata*
23. *Egyváltozós feltétel nélküli szélsőérték feladatok*
24. *Egyváltozós feltételes szélsőérték-feladatok*

25. Többváltozós feltétel nélküli szélsőérték feladatok
26. Többváltozós feltételes szélsőérték feladatok
27. A NEOS optimalizálási szerver\*
28. A GAMS modellezési nyelv, formalizálási rendszer\*
29. A CPLEX optimalizálási rendszer\*
30. A MINOS optimalizálási rendszer\*
31. Milyen segítséget kaphatunk optimalizálási feladatok megoldásához a Maple szimbolikus algebrarendszertől?
32. Milyen segítséget kaphatunk optimalizálási feladatok megoldásához a Mathematica szimbolikus algebrarendszertől?
33. Milyen segítséget kaphatunk optimalizálási feladatok megoldásához a Derive szimbolikus algebrarendszertől?
34. Milyen segítséget kaphatunk optimalizálási feladatok megoldásához a Mu-pad szimbolikus algebrarendszertől?
35. Nemlineáris függvény minimumának megkeresése (több változós eset) a Matlab numerikus programrendszerben
36. Az automatikus differenciálás szerepe a nemlineáris optimalizálásban \*
37. Az intervallum-aritmetika szerepe a nemlineáris optimalizálásban \*
38. A mesterséges neuronhálók az optimalizálásban
39. Az ún. hangyakolóniák módszere minimalizálásban
40. Genetikus algoritmusok az optimalizálásban
41. Szimulált megeresztés (simulated annealing) az optimalizálásban
42. A nemlineáris szimplex módszer (Nelder-Mead)
43. Pakolási feladatok\*
44. Geometriai alakzatok lefedési problémái \*
45. Mit tud az Excel Solver az optimalizálás terén?
46. A Matlab INTLAB nevű kiegészítő csomagja az intervallumos műveletek támogatására
47. A perceptron használata az optimalizálásban
48. DC optimalizálás\*
49. Az órarend összeállítása mint optimalizálási feladat\*

120 *D FÜGGELÉK, AZ ESSZÉ, ILLETVE KÖTELEZŐ PROGRAM KÖVETELMÉNYEI, TÉMÁK*

50. A hátizsák feladat
51. A hajórakodási feladat
52. A fix költség probléma
53. Az utazó ügynök feladat
54. A kínai postás feladat
55. A legrövidebb út probléma
56. A maximális folyam feladat
57. Projektek ütemezése
58. Program kiértékelés és felülvizsgálat (PERT)
59. Az újságáros probléma
60. A folytonos keresletű újságáros probléma
61. Ütemezés

## E függelék

### Egy minta esszé

Itt egy olyan esszét adunk meg, amely mintaként szolgál a hallgatóknak. Az itt megadott esszé kb. a kettes szintet jelenti. Ehhez képest a jobb jegyet érdemlő esszé alaposabb áttekintését nyújtja a kiírt témának, részletesebb tesztelést és kifejezőbb illusztrációt tartalmaz.

### Nemlineáris optimalizálás a Matlabban

1. A nemlineáris optimalizálás alapfeladatát a következő formában szokás megadni:

$$\min f(x)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1,$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2,$$

ahol  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  egy általában kétszer folytonosan differenciálható függvény,  $m_1$  darab egyenlőtlenség és  $m_2$  darab egyenlőségfeltétel határozza meg a lehetséges megoldások halmazát. Itt a  $g_i$  és a  $h_j$  függvények hasonlóan általában kétszer folytonosan differenciálható függvények. Az  $n$  számot a feladat dimenziójának hívjuk. A feladat a nevét arról kapta, hogy az említett függvények nemlineárisak lehetnek.

Ezzel szemben az operációkutatás című tárgyban megismert lineáris programozási feladat leírásában szereplő minden függvény lineáris. Ez az eltérés lényegi, a lineáris programozásra használatos algoritmusok esetünkben haszontalanok. Amíg a lineáris programozási feladathoz létezik polinomiális műveletigényű megoldó algoritmus, addig a nemlineáris optimalizálási feladat több nagyon egyszerű részproblémája is NP-teljes. Részben emiatt is a legtöbbször megelégszünk közelítő megoldással.

A feladat nehézségét jelzi, hogy általános esetben több lényegesen különböző helyi minimum-pont van (aminek van olyan környezete, amelyben nincs nálánál kisebb célfüggvényértékű pont), és ezek teljes körű megismerése, összevetése nehéz. Maga a nemlineáris optimalizálás emiatt az esetek túlnyomó többségében megelégszik egy helyi minimumpont megtalálásával.

Az alkalmazási terület meglehetősen széles. A közkeletű felfogás szerint lényegében minden érdekes gyakorlati probléma nemlineáris. Eszerint a lineáris optimalizálási feladatok a legtöbbször egyszerűsítés után jönnek képbe. Az e felfogással ellentétes vélemény szerint pedig minden, amit a számítógépen megoldunk, az lineáris feladat... A való helyzet valószínűleg a két álláspont között van.



A nemlineáris feladatosztály egyik sokszor idézett példánya a Rosenbrock feladat:

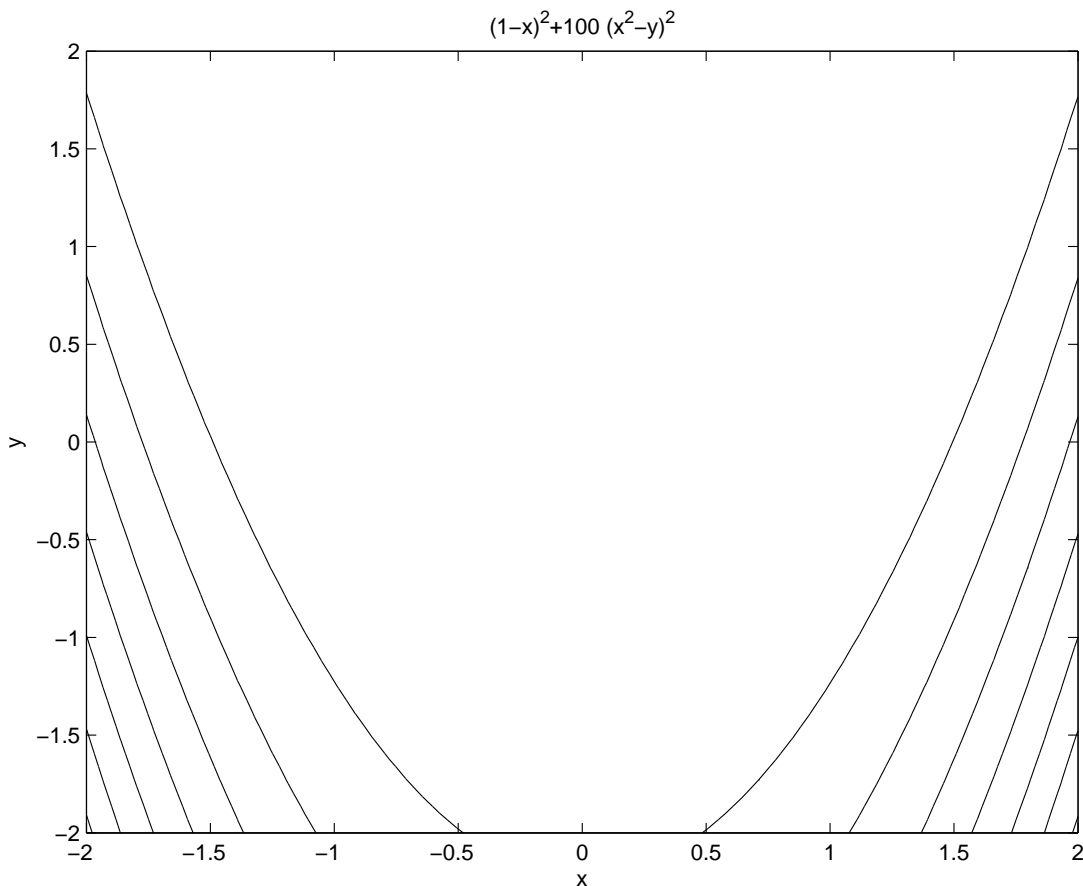
$$\min(1 - x_1)^2 + 100(x_1^2 - x_2)^2$$

$$-2 \leq x_1, x_2 \leq 2.$$

Az érdekességét az adja, hogy egyrészt szemléletesen azonnal látszik, hogy mi a megoldás, mégis a hagyományos nemlineáris optimalizáló algoritmusoknak meggyűlik a bajuk vele.

Ha papíron ceruzával kell megoldani, akkor a következő érvelést lehet használni. A célfüggvény két nemnegatív szám összege, ennek lehető legkisebb értéke így nulla. Világos, hogy az első tag akkor lesz nulla, ha  $x_1 = 1$ . Ha ezt beírjuk a második tagba, akkor azt kapjuk, hogy  $x_2$ -nek is egynek kell lennie ahhoz, hogy a célfüggvény optimumát megkapjuk. Ezután már csak az van hátra, hogy ellenőrizzük, hogy ez a pont benne van-e a lehetséges megoldások halmazában. Mivel a korlátozó feltételek most csak egyszerű alsó- és felső korlátok az argumentumokra, ezt könnyű ellenőrizni.

Ez könnyen ment, nehéz elképzelni, hogy mi miatt jelent ez gondot a számítógépes algoritmusoknak. A magyarázathoz nézzük meg a célfüggvény szintvonalait (azon görbéket, amelyek mentén a célfüggvény értéke állandó):



1. Ábra. A Rosenbrock függvény szintvonalai a  $[-2, 2]^2$  tartományon. Az sajnos nem nagyon látszik, hogy a kisebb függvényértékű pontok egy ívelt, banán formát mutatnak. A rajz az `ezcontour(' (1-x)^2 + 100*(x^2 - y)^2', [-2 2 -2 2])`; Matlab utasítással készült.

A legtöbb optimalizáló program a célfüggvény különböző modelljén alapulva annak lineáris, de inkább kvadratikus alakját használja. Ezek a modellfüggvények viszont a célfüggvény

relatív egyszerűsége ellenére következetesen eltérnek attól, és emiatt a kereső programok sok lépésből álló iterációra kényszerülnek. A megoldások jellemző megjelenése emiatt egy sok rövid szakaszból álló törtvonal, amely megkísérli a banán alakú völgy alját követni. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a Rosenbrock függvény nehezen, viszonylag nagy műveletigény árán oldható meg.

2. A Matlab maga meglehetősen kevés támogatást nyújt optimalizáláshoz. Van viszont egy kiegészítő csomagja, az Optimization Toolbox. A jelen esszé ennek lehetőségeire nem tér ki. Említésre méltó viszont három Matlab rutin: az `fzero`, amely valójában egyváltozós függvények zérushelyét keresi meg, az `fminbnd`, ami egyváltozós függvények minimalizálására vállalkozik és az `fminsearch`, ami pedig 'többdimenziós függvények minimalizálását végzi. Lássuk ezek alkalmazását.

2.1 Tekintsük először az `fzero` eljárást. Ahhoz, hogy ezt be lehessen vetni, az eredeti feladatot át kell fogalmazni egyenlet megoldássá. Sajnos a feladat maga nagyon többdimenziós, egy változóval épp a lényegét, a kanyarodó völgyet veszítjük el. Minden esetre tekintsük azt az egyenest, amely átmegy a minimumpontra, és amely mentén egyszerűen kifejezhető a függvényünk:  $y = x$ .

Ha az  $y$  minden előfordulását  $x$ -re cseréljük az eredeti függvényben, akkor egy egyváltozós függvényt kapunk, amely épp az említett egyenes mentén adja meg a Rosenbrock függvény értékeit:

$$f_1(x) = (1 - x)^2 + 100(x^2 - x)^2.$$

Ez szemre még hasonló függvény, és a polinom fokszáma is megfelel az eredetiének. Ennek a függvénynek keressük tehát a minimumát. Ahhoz hogy ennek megtalálásához az `fzero` eljárást használni tudjuk, a minimalizálási feladatot át kell írni zérushely keresési feladattá. Ehhez tűzzük ki azt a feladatot, hogy megkeresendő az első derivált zérushelye. Egy egyváltozós függvény deriváltjának zérushelye nem mindig minimum (lehet maximum is), de legalább a nyeregpontokkal nem kell foglalkozni. Az  $f_1$  függvény deriváltja:

$$f_2(x) = -2(1 - x) + 200(x^2 - x)(2x - 1).$$

Ennek a zérushelyének a meghatározásához gépeljük be a következő Matlab utasítást:

```
>> fzero(' -2*(1-x)+200*(x^2-x)*(2*x-1)', 0)
```

A kapott válasz meglepő:

```
ans =
    0.0102
```

Ha ezt az eredményt visszairjuk a vizsgált függvénybe, akkor

```
-2*(1-0.0102)+200*(0.0102^2-0.0102)*(2*0.0102-1)
ans =
   -0.0016
```

adódik, ami nem nagyon szép. Bízató azonban, hogy ha a keresett megoldás közelében adjuk meg a második argumentumban az indulópontot, akkor már jobb eredményt kapunk:

```
>> fzero(' -2*(1-x)+200*(x^2-x)*(2*x-1)', 2)
ans =
    1
```

az eredmény, ami a közelítő jellegre utalhatott volna. Ehhez illusztrálásaként tekintsük a következő számítást:

```
>> 1000001/10000000
ans =
    1.0000
```

Térjünk vissza hamisnak tűnő megoldásra. Ha most a visszahelyettesítéshez nem a kiírt értéket használjuk, hanem a pontosat, akkor lényegében igazoljuk, hogy a talált megoldás egy zérushely:

```
>> y = fzero(' -2*(1-x)+200*(x^2-x)*(2*x-1)', 0)

y =
    0.0102

-2*(1-y)+200*(y^2-y)*(2*y-1)
ans =
    2.2204e-016
```

Ez az érték ugyanis a dupla pontos számábrázolás határán van – még ha a nullát épp ennél sokkal jobban meg is lehet közelíteni.

Ebből az következik, hogy itt bizony van egy másik gyök, tehát a Matlab a feltett kérdésre helyesen válaszolt – vagyis nekünk az egyváltozós változat megoldásait ellenőriznünk kell.

A tapasztalatunk szerint a keresett megoldást akkor kapjuk meg, ha az indulópontot a [0.8, 10] intervallumban választjuk meg. Ez minden esetre óvatosságra int a `fzero` használatával kapcsolatban. Ha sok, véletlenül választott indulóponttal kérjük a zérushelyek meghatározását, akkor összesen három ilyen találunk: 0.0102, 0.4898, és 1.0000. Ha az ezeknek megfelelő [0.0102, 0.0102], [0.4898, 0.4898] és [1.0000, 1.000] pontokat behelyettesítjük az eredeti függvényünkbe, akkor a következő értékeket kapjuk rendre: 0.9899, 6.5051 és 0. Innen egyértelműen megadhatjuk a minimum helyét és értékét, és ez összhangban is van a kézzel elért eredménnyel. Az egyetlen hiányosság az, hogy nem lehetünk biztosak benne, hogy az egyváltozós függvény minden zérushelyét megtaláltuk...

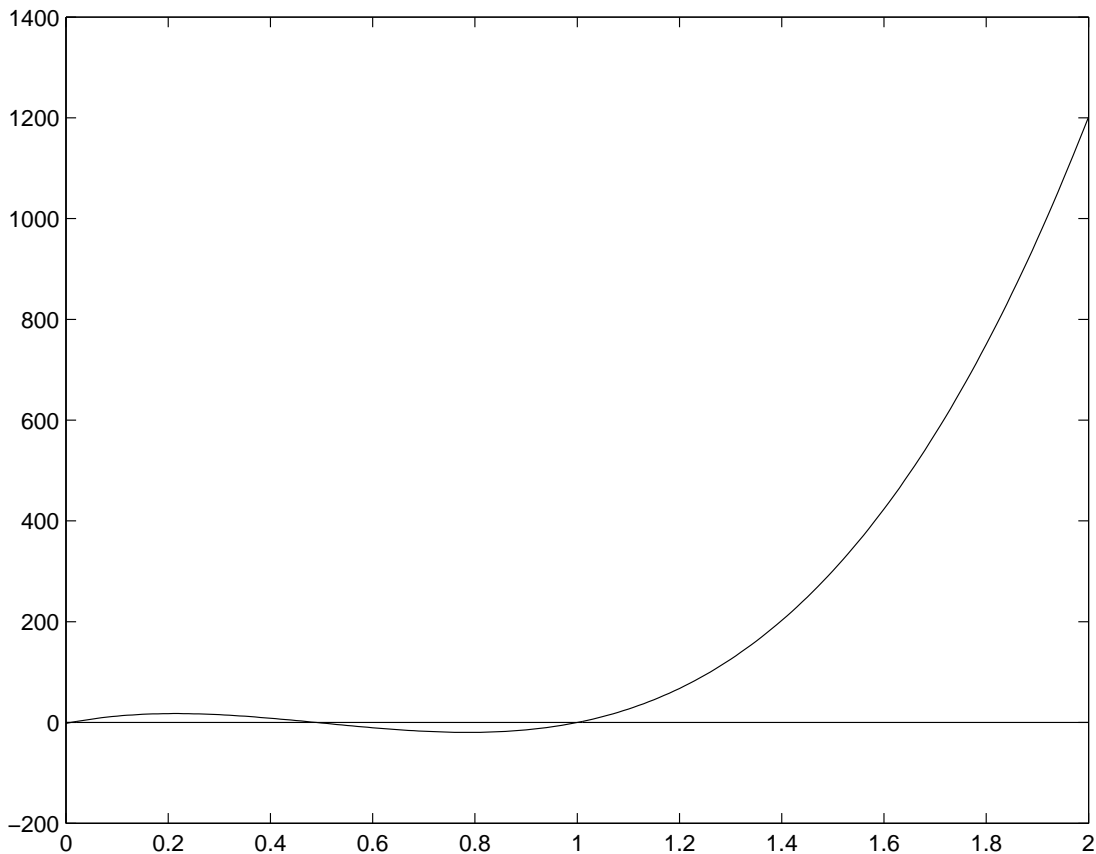
A véletlen indulópontot használó utasítás a [0, 10] intervallumra vonatkozóan:

```
y = fzero(' -2*(1-x)+200*(x^2-x)*(2*x-1)', 10*rand(1))
y =
    1
```

Az optimalizált függvény alakját a következő rövid program rajzolja ki:

```
>> x = x=0:0.01:2.0;
>> y = -2*(1-x)+200*(x.^2-x) .* (2*x-1);
>> z = x-x;
>> plot(x,y,x,z);
```

Ennek eredménye (a z függvénnyel az  $x$ -tengelyt ravaszkodtam az ábrára...):



2. Ábra. A Rosenbrock függvény  $y = x$  egyenes menti értékei deriváltfüggvénye. Kis jóindulattal leolvasható az `fzero` program által megtalált három zérushely.

Az `fzero` utasítás ráadásul csak páratlan multiplicitású zérushelyek meghatározására jó, tehát például az  $x^2$  zérushelyét nem találja. Ez elég rossz hír az optimalizálás szempontjából, mert általában egy nemlineáris függvény deriváltja zérushelyei multiplicitása mindenféle lehet.

2.2. Vegyük most az `fminbnd` utasítást. Ez egydimenziós függvények optimalizálására szolgál. Nézzük először, az  $x^2$  függvénnyel mit tud kezdeni:

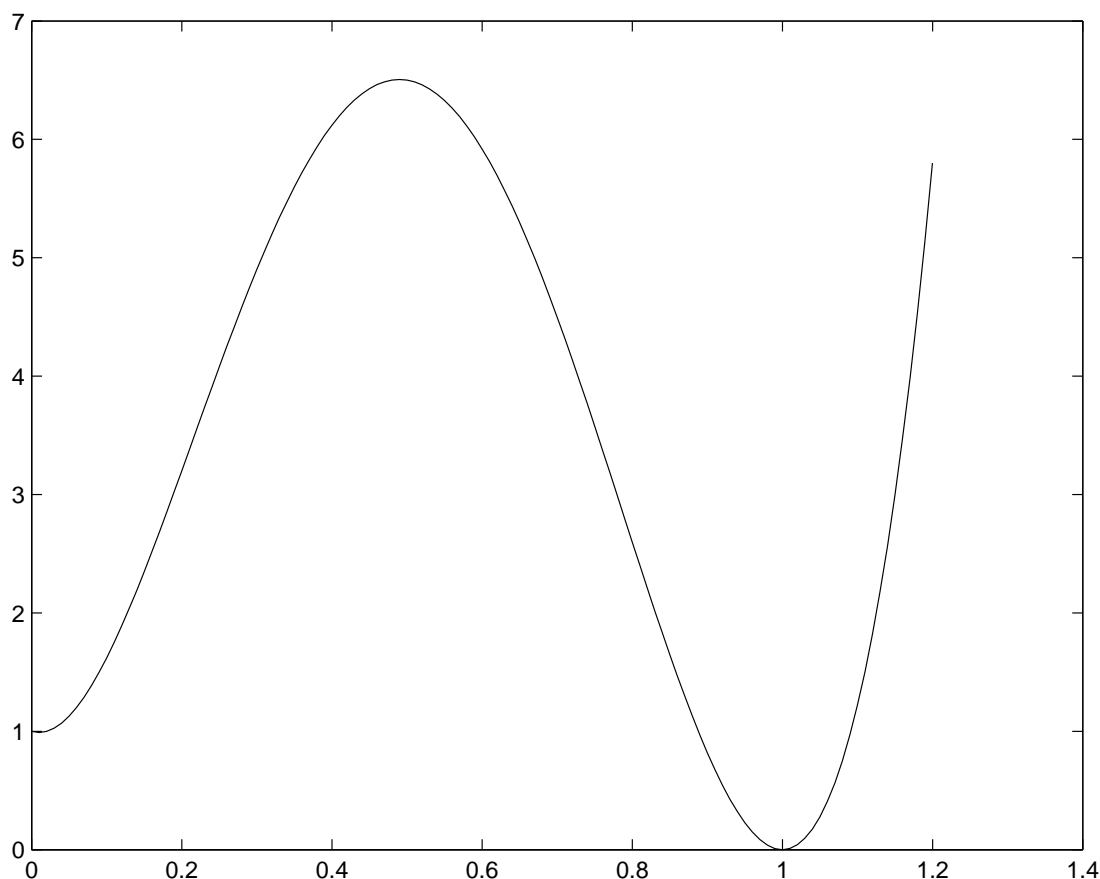
```
fminbnd('x^2',-1,1)
ans =
    -2.7756e-017
```

Ez rendben is van lényegében. A paraméterezés: függvény, alsókorlát, felsőkorlát. Vigyázzunk, az első utasítás után ne tegyünk pontosvesszőt, mert akkor az eredmény nem jelenik meg! Vegyük akkor az előző szakasz egydimenzióssá átalakított Rosenbrock függvényét.

```
>> fminbnd('(1-x)^2+100*(x^2-x)^2',0,2)
ans =
    1.0000
```

Ez is rendben van, bár az  $(1-x)^2$  függvény minimumhelyeként az 1-et adta meg (tehát pontosabban tudta megállapítani). Nézzük meg, hogy milyen függvényt is minimalizáltunk:

```
>> x=0.0:0.01:1.2;
>> y=(1-x).^2+100*(x.^2-x).^2;
>> plot(x,y);
```



3. Ábra. A Rosenbrock függvény  $y = x$  egyenes mentére korlátozott, egydimenziós változata. Jól látható a megtalált minimum az 1 pontban.

A bal sarokban azért van egy gyanús rész, ha rázoomolunk, akkor

```
>> fminbnd('(1-x)^2+100*(x^2-x)^2',0,0.4)
ans =
    0.0102
```

szépen megkapjuk az előző szakaszban kapott másik minimumjelöltet. Akkor viszont tisztázzuk a 2.1. szakasz 0.4898 szélsőértékét is:

```
>> fminbnd('(1-x)^2+100*(x^2-x)^2', 0.4, 0.6)
ans =
    0.6000
```

Ez nem segít, mert csak a megadott keresési intervallum szélét kaptuk meg – ez azt jelezheti, hogy az intervallum belsejében nincs megoldás. Valóban,

```
>> fminbnd('(1-x)^2+100*(x^2-x)^2', 0.3, 0.7)
ans =
    0.7000
```

is erre utal. Nézzük akkor meg a vizsgált függvényünk negáltját:

```
>> fminbnd('-(1-x)^2+100*(x^2-x)^2', 0.3, 0.7)
ans =
    0.4898
```

Bingó. Megvan a harmadik pont is: OK, ez nem minimumpont volt, de a maximumpont deriváltja is nulla. Akkor úgy érezhetjük, hogy ez a program az eddigiek szerint lényegében tudja azt, amit el lehet várni tőle, és azt megbízhatóan hozza is.

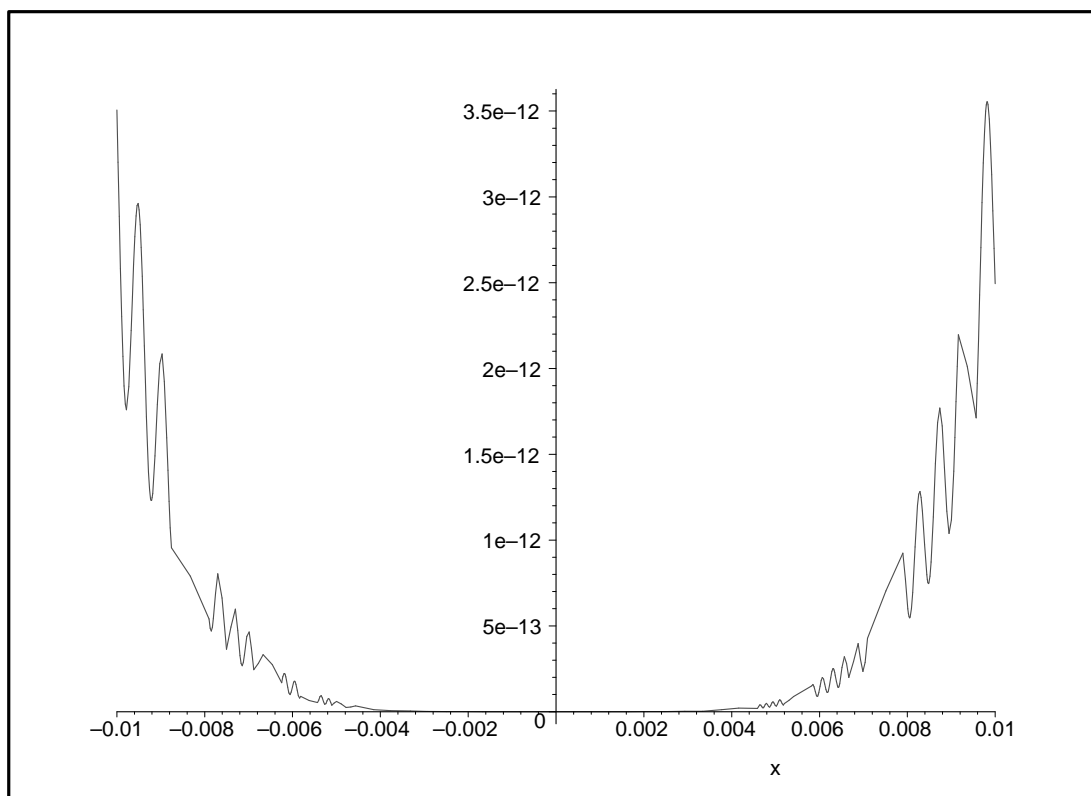
Nézzünk akkor egy nehezebb feladatot. Az  $x^6(\sin(1/x) + 2)$  elég ellenséges, mert bár kétszer folytonosan differenciálható (ahogy könnyen belátható), mégis a nulla tetszőleges környezetében megszámlálhatóan végtelen sok helyi minimumpontja van. Emiatt a megoldása lényegében reménytelen olyan módszerek számára, amelyek csak a függvény-kiértékeléseken alapulnak. Egyes programok panaszkodnak, hogy a nullában nem tudják kiértékelni a függvényt. Annyiban ez igaz is, hogy maga az  $1/x$  függvény persze gondot jelent. Másrészt azonban az  $x^6$ -al való beszorzás miatt a függvény maga a nullában is folytonos. Óvatos implementálással a számítógépes megvalósítás is megoldható. A függvény alakja a 4. Ábrán látható, és már ez is elég borzasztó - bár a zűrös szakasz persze a nulla közelében van.

A feladat megoldása az fminbnd programmal:

```
>> fminbnd('x^6*(sin(1/x)+2)^2', -1, 1)
ans =
    0.0018
```

Bár ez nem az igazi megoldás, de azért nem nagyon rossz. Végülis a keresési tartomány helyes kb. 4 ezrelékébe sikerült beletalálni. Az már nagyobb baj, hogy ezen nem könnyű javítani. Az azért érdekes, hogy a következő egyszerű eszköz segít:

```
>> fminbnd('x^6*(sin(1/x)+2)^2', -1-rand(1), 1+rand(1))
ans =
    2.5606e-006
```



4. Ábra. Az  $x^6(\sin(1/x) + 2)$  függvény a  $[-0.01, 0.01]$  intervallumban. Jól látható a fő tendencia, és az hogy a függvénynek sok helyi minimumpontja van.

Ez azért csak meglepő, hogy a keresési intervallum határának véletlenszerű tologatása ennyit javít a megoldáson. Ez még akkor is szép, ha a két pont között csak 3 nagyságrendnyi a különbség. Az még nagyobb előny, hogy amíg a rögzített intervallumon nincs értelme újrafuttatni a programot (mert ugyanazt az eredményt fogjuk kapni), addig a véletlennel terhelt oldalú intervallumokkal ez hasznos lehet.

A függvény ismeretében a legjobb az lenne, ha nagyon sok véletlenszerű pontban kiértékelnénk a függvényt, és csak a legígéretesebb közelében indítanánk el az `fminbnd` programot. Tanulságos, hogy a Matlabon belül megkeressük az `fminbnd` kódját, az `fminbnd.m` állományt, akkor egy mindössze 250 soros programot találunk, és ebből is 50 sor magyarázat, megjegyzés.

2.3. Végül lássuk az `fminsearch` utasítást. Ez hosszra csak kicsit bonyolultabb, mint `fminbnd`, kb. 300 soros, amiből ismét közel 50 sor a magyarázat. A legegyszerűbb alakja:

```
X = fminsearch(FUN, X0);
```

ahol `FUN` a minimalizálandó függvény, `X0` az indulóérték, és `X` a kapott eredmény, egy helyi minimumpont. Vegyünk először megint egy egyszerű, áttekinthető feladatot: mi lehet az  $(x + y)^2$  minimuma?

```
>> fminsearch(' (x(1)+x(2))^2', [1.2 1.2])
ans =
    0.0249    -0.0249
```

Ez első pillantásra meghökkentőnek tűnhet, de rendben van, hiszen a függvény minden olyan pontja optimális, ahol a két argumentum összege nulla. A csak kicsit eltérő függvényel alapján más megoldást kapunk:

```
>> fminsearch(' x(1)^2+x(2)^2', [1.2 1.2])
ans =
    1.0e-004 *
    -0.3946    -0.1129
```

Ha alaposabban megnézzük a minimalizálandó függvényt, akkor ez az eredmény is elfogadható lesz: most a két paraméterünk mindegyikének nullához közelinek kell lennie az optimum közelében. Érdekes a Matlab kiíratási formátuma: nagyon kis számok helyett egyszerűen kiírta, hogy az utolsó sort mivel kell beszorozni... Azért ennél pontosabb megoldást is adhatott volna – valószínűleg az alapbeállítások inkább gyors mint pontos megoldást preferálnak.

Itt a megfelelő pont, amikor az `fminsearch` algoritmusáról is szólnunk kell. A program az ún. Nelder-Mead algoritmuson alapul, más néven a szimplex eljárás. Ez sajnos könnyen összetéveszthető a lineáris programozás szimplex algoritmusával, bár lényegében nem sok köze van hozzá. Itt az indulópont köré a program egy szimplexet ( $n$ -dimenziós térben  $n + 1$  pontból álló szabályos alakzatot) rajzol. Megvizsgálja a csúcspontokban a célfüggvény értékét, és a legrosszabb célfüggvényértékű pontot tükrözi a többiek által megadott síkra. Így egy újabb szimplexet kapunk, és így tovább. Végül is, durván szólva a célfüggvény által meghatározott domborzaton egy szögletes tárgy gurul le. Más szóval, a háttérben működő algoritmus egy elég robusztus, de nem nagyon gyors nemlineáris helyi kereső módszer.

Ennek fényében nagyon szép a következő eredmény:

```
>> fminsearch(' x^6*(sin(1/x)+2)', 1.2)
ans =
-3.3307e-015
```

Az, hogy szemre hasonló futásidő árán az `fminsearch` sokkal jobb eredményt adott, mint az `fminbnd`, azzal magyarázható, hogy az előbbi bumfordisága most épp előnyös: mivel a futás elején nem tud nagyon finom keresést végezni (még nagyok a szimplexek), ezért az  $x^6$  függvény minimumhelyének eléggé a közelébe tud férközni, és nem akad fenn a korai, a globális minimumtól távoli helyi minimumokban. A 12 nagyságrenddel jobb minimum becslés minden esetre említésre méltó.

Ezek után térjünk vissza a korábban tárgyalt Rosenbrock függvényhez:

```
>> fminsearch(' (1-x(1))^2+100*(x(1)^2-x(2))^2', [0 0])
ans =
    1.0000    1.0000
```

Bár ezen a feladaton érezhetően tovább gondolkodott (mondjuk 1 másodpercet), de ez már megint szép eredmény, még ha nem is az 1-et, mint egész mutatja az eredmény (mármint hogy



az 1.000 a lehetséges 1 helyett a hátsó jegyekben megmutatkozó kicsi eltérésre utal).

### 3. Sebesség, műveletigény, pontosság, gyakorlati alkalmazás.

Ebben a szakaszban jellemezni próbáljuk az optimalizálási eljárásunk sebességét. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, egy nehéz feladatot kell vizsgálnunk, és a megoldás minőségén is jó ha leolvasható, hogy mennyire jó a talált közelítő megoldás. Ezért vizsgáljuk az előző szakasz  $\sin(1/x)$ -es függvényét.

A keresési algoritmus alapbeállításai:

```
defaultopt=struct('Display','notify','MaxIter',
    '200*numberOfVariables',... 'MaxFunEvals',
    '200*numberOfVariables','TolX',1e-4,'TolFun',1e-4);
```

- A `Display` csak annyit határoz meg, hogy ha a megfelelő megoldást nem tudja elérni, akkor ennek okát írja meg nekünk.
- A `MaxIter` a megengedett maximális iterációszámot állítja be az optimalizált változók számának 200-szorosára. Ez az esetek többségében elegendő. Ha mégsem, akkor erről értesítést kapunk, és ha van értelme, akkor ezt az algoritmus paramétert nagyobb értékre állíthatjuk.
- A `MaxFunEvals` a megoldáshoz felhasznált függvényhívások számának megengedett felső határát szabja meg. Ennek alapértelmezése is az optimalizált változók számának 200-szorosa.
- Azt, hogy mikor tekintjük a feladatot megoldottnak, a megoldás pontosságára vonatkozó két kritérium adja meg. Az első, a `TolX` azt határozza meg, hogy az optimalizálandó változókra vonatkozóan mit tekintünk elfogadhatóan kis eltérésnek. A program megvalósításától függően ezt az algoritmus paramétert különféle módon lehet használni. Egy jellemző módszer, hogy ha az utolsó két (vagy néhány) iterált eltérése ez a korlát alatt marad, akkor ebből a szempontból már elfogadhatónak tekintjük a közelítést.
- Hasonló értelmezésű a `TolFun` algoritmus paraméter. Ez azt üzeni a programnak, hogy akkor kérjük az iteráció leállítását, ha a legutóbbi néhány iteráció során a célfüggvény értéke nem változott többel mint a `TolFun` érték. Az utóbbi két algoritmus paraméterre az alapbeállítás ( $10^{-4}$ ) mérsékelt igényeket támaszt – ami jó összhangban van a Matlab kiíratási formátumával is.

3.1 Ezek után vizsgáljuk meg, hogy az `fminsearch` milyen hatékony, mennyire gyors az optimalizálásban. Emlékezzünk vissza, hogy az abszolút minimumát a célfüggvényünk a 0 pontban veszi fel, és a célfüggvény érték minimuma is nulla, de az ehhez a minimumhoz tartozó völgy szélessége is nulla – tehát ennek megtalálása reménytelenül nehéz. Másrészt minél közelebbi megoldást kapunk a nullához, annál jobb a közelítés, annál alaposabb a keresés.

A méréseinkhez a következő rövid programot írtuk a Matlab szerkesztőjével (és mentettük el sebesség néven):

```
tic
fminsearch('x^6*(sin(1/x)+2)',1.0,optimset('TolX',1e-2),'TolFun',1e-2)
toc
```

Az előző teszt azt tanulmányozza, hogy milyen hatással van a megoldás helyének pontossága az ennek megkereséséhez szükséges CPU-időre. Az eredményeket az 1. Táblázatban foglaltuk össze.

| tolerancia | CPU -idő |
|------------|----------|
| $10^{-2}$  | 0.18     |
| $10^{-4}$  | 0.20     |
| $10^{-6}$  | 0.24     |
| $10^{-8}$  | 0.33     |
| $10^{-10}$ | 0.35     |
| $10^{-12}$ | 0.39     |
| $10^{-14}$ | 0.44     |
| $10^{-16}$ | 0.51     |
| $10^{-18}$ | 0.51     |
| $10^{-20}$ | 0.53     |
| $10^{-30}$ | 0.82     |

1. Táblázat. A tolerancia értékek hatása az ezek eléréséhez szükséges CPU-időre az  $x^6 * (\sin(1/x) + 2)$  optimalizálási feladat esetén a `fminsearch` Matlab programmal.

Megjegyezzük, hogy az első hét esetben a kapott megoldás azonos volt. Az nem is meglepő, hogy ezután a programnak jobban kellett igyekeznie. Megjegyzendő, hogy bár a megoldásnak determinisztikusnak kell lennie, mégis a futási idők változatlan paraméterezés mellett is nagyon változtak. Emiatt a táblázatunk 3 független futás átlagát tartalmazza. A futásidő eltérése talán a futtató operációs rendszer egyéb futó processzein múlott. Erre utal az is, hogy a számításigényesebb feladatokon a CPU-idő stabilitása nagyobb volt.

Érdekes, hogy a  $10^{-30}$  mint megállási feltétel paraméter már valóban sok volt a programnak: a táblázatban megadott érték esetén a program panaszkodott, hogy a megengedett maximális függvényhívásszám a feladat megoldásához kevésnek bizonyult. Mégis, a megfelelő paraméter megnövelése sem segített – talán valamilyen belső, rejtett feltétel megakadályozta ennek érvényesülését. Ekkor már a program által adott megoldás  $-2.9957e-030$  volt, ami nagyon jó – még ha van is ennél is jobb, az adott számítási környezetben ábrázolható megoldás.

Hogy ezt a megoldást jobban megbecsüljük, megmutatjuk, hogy milyen eredményre számíthatnánk egy egyszerű, Monte Carlo módszertől. Tekintsük a következő egyszerű feladatot:

$$\min x^2$$

a  $[-1, 1]$  intervallumon. Az ehhez tartozó véletlen kereső program:

```

tic
z = 10
for i=1:100000
    x=2*rand(1)-1;
    y=x^2;
    if (y<z)
        z=y;
    end
end
z
toc

```

A kapott eredmény  $3.4373e-011$  volt, 3.5700 másodperc alatt. Az `fminsearch` ugyanezen a feladaton  $-8.8818e-016$  eredményt adott 0.1600 másodperc alatt.

3.2. Vizsgáljuk meg az optimalizálás eredményének függését a kiinduló ponttól:

```

tic
fminsearch('x^6*(sin(1/x)+2)',1.0,optimset('TolX',1e-9),'TolFun',1e-9)
toc

```

A kapott eredmények:

| indulóérték | eredmény     | CPU -idő |
|-------------|--------------|----------|
| 1.0e10      | -1.4211e-005 | 2.5440   |
| 1.0e05      | -1.1369e-009 | 1.0110   |
| 1.0e00      | -8.8818e-016 | 0.0800   |
| 1.0e-05     | 1.0521e-005  | 0.0300   |
| 1.0e-10     | 1.0500e-010  | 0.0300   |

2. Táblázat. Az indulóértékek hatása az ezek eléréséhez szükséges CPU-időre az  $x^6 * (\sin(1/x) + 2)$  optimalizálási feladat esetén a `fminsearch` Matlab programmal.

Az első két sorban megadott esetben a Matlab nullával való osztásra panaszkodott, és keveselte a megengedett függvényhívások számát. Az utolsó sorokban látható eredmény pedig arra utal, hogy ott tényleges keresés nem is történt. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy az `fminsearch` robusztus eljárás, nem feltétlen igényli a megoldáshoz közeli indulópontot, bár az előnyös lehet. A számítási idő is ezt tükrözi, még ha a technikai részletekre oda is kell figyelni.

3.3. Végül tekintsünk egy gyakorlati feladatot. A döntéstámogatási feladatkör egyik alapproblémája a páronkénti összehasonlításokon alapuló preferenciamátrixok konzisztenciájának megteremtése. Az alap kérdés az, hogy több szakértő véleményét hogyan lehet egy egységes döntéssé formálni szakmailag meggyőző, elméletileg alátámasztott formában.

Vegyük azt az esetet, hogy adott  $N$  darab alternatívánk, pl. vásárolandó autótípusunk. A szakértőink különböző szempontokat figyelembevéve olyan kijelentéseket tesznek, hogy párokat képezve, az egyik alternatíva hányszor tekinthető jobbnak a másiknál. Az eredményeket írjuk egy  $Q$  mátrixba:

$$Q = \begin{pmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 \\ 0.5000 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0.2500 & 0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy ebben a példában a megadott preferenciák következetesek, konzisztensek, mert pl. az első alternatívánál a második kétszer kedvezőbb ( $Q(1,2) = 2$ ), a másodikonál a harmadik is kétszer jobb ( $Q(2,3) = 2$ ), és ennek megfelelően a harmadik alternatíva az elsőnél négyszer jobb ( $Q(1,3) = 4$ ). Ez persze általában nem sikerül így, a szakértők által kitöltött preferenciamátrix általában nem konzisztens, tehát a megadott mátrixra nem fog teljesülni az, hogy minden sora konstansszorososa egy másik sorának. A konzisztencia azt is jelenti, hogy a  $Q$  mátrix rangja 1, mert egy sorából a többi lineáris kombinációként származtatható.

Az elérni kívánt esetben tehát az egyes alternatívák egymáshoz való viszonyát kimerítően jellemezni tudjuk olyan formában, hogy minden alternatívához hozzárendelünk egy pozitív  $w_i$  számot vagy súlyt, és a  $Q'$  konzisztens mátrix ebből már generálható:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1.0000 & w_2/w_1 & w_3/w_1 \\ w_1/w_2 & 1.0000 & w_3/w_2 \\ w_1/w_3 & w_2/w_3 & 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Visszatérve a kitűzött feladathoz, azt úgy formalizálhatjuk, hogy egy általában nem konzisztens  $Q$  mátrixhoz keresünk olyan pozitív  $w$  súlyvektort, hogy

$$\|Q - Q'\|_F^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (Q(i,j) - w_j/w_i)^2$$

minimális legyen.

A feladat megoldásához ismét az `fminsearch` programot használtam. A feladatot most egy külön függvény formájában adtam meg:

```
function f = qw(w);
Q = [1 2 4; 0.5 1 2; 0.25 0.5 1];
f = 0;
for i=1:3
f = f+(Q(i,1)-w(1)/w(i))^2+(Q(i,2)-w(2)/w(i))^2+(Q(i,3)-w(3)/w(i))^2;
end
```

A programon mindenképpen lehet még javítani, például a  $Q$  mátrixot illene kivinni a hívó programba, illetve a vektorizáláson is lehet még igazítani... Minden esetre a jelen formában is szépen futott a program, és egy másodpercen belül a következő eredményt kaptuk:

```
>> fminsearch('qw',[1 1 1])
ans =
    0.4215    0.8430    1.6859
```

Ez nem egészen az, amit vártunk (az pl. az  $[1\ 2\ 4]'$  vektor lehetett volna), de lényegében rendben van, mert a harmadik alternatíva négyszer preferáltabb, mint az első stb. Vegyük észre azonban, hogy maga a program teljesen érzéketlen a  $w$  vektor abszolút értékére, csak a vektorkomponensek arányait érzékeli. Ha ezt a vektort visszaírjuk az optimalizálandó nem

negatív függvénybe, akkor a  $7.1458e-008$  függvényértéket kapjuk, ami elég jó érték, tekintve, hogy a paramétereket csak 4-5 értékes jegyre adtuk meg.

Ezt az is mutatja, hogy ha az előző feladatot a  $w = [1 \ 2 \ 4]^T$  vektorral indítjuk, akkor az eredmény már megnyugtatóbb:

```
>> fminsearch('qw', [1 2 4])
ans =
    1    2    4
```

Vegyük észre, hogy nem egyszerűen közeli értékeket kaptunk, hanem magukat az egészszámokat (nem volt nehéz ezekre jutni). Ez persze azt is jelenti, hogy akkor indokolatlanul sok változó optimalizálását kértük a programtól, hiszen ha csak  $w$  arányai számítanak, akkor a  $w$  egyik komponensét rögzíthetjük. Említsük meg azt is, hogy bár nem erőltettük, de a program csak pozitív eredményt adott – erre vonatkozó ténylegesen megadott korlát nélkül is. Ez a probléma szerkezetéből adódhat.

Ezek után tekintsük a feladat perturbált, kicsit elrontott változatát. Vegyük azt az egyszerű esetet, amikor a  $Q$  mátrix jobb felső sarkában levő négyest rontjuk csak el. Ennek helyére írunk  $4+0.01$  értéket, ami egy század mértékben perturbálja a korábbi számot (megpróbáltam ez utóbbit még `rand(1)`-el beszorozni, de a véletlen eltérések áttekinthetetlenné tették az eredményeket). A változó mértékű perturbálásra vonatkozó eredményeket a 3. Táblázat tartalmazza:

| perturbáció | az eredmény                  |
|-------------|------------------------------|
| 1.0e-2      | $[1.0074, 2.0170, 4.0385]^T$ |
| 1.0e-3      | $[1.0023, 2.0048, 4.0100]^T$ |
| 1.0e-4      | $[1.0007, 2.0015, 4.0030]^T$ |
| 1.0e-5      | $[1.0007, 2.0015, 4.0029]^T$ |
| 1.0e-6      | $[1.0002, 2.0004, 4.0009]^T$ |
| 1.0e-7      | $[1.0001, 2.0003, 4.0006]^T$ |
| 1.0e-8      | $[1.0001, 2.0002, 4.0004]^T$ |
| 1.0e-9      | $[1.0000, 2.0001, 4.0002]^T$ |
| 1.0e-10     | $[1.0000, 2.0000, 4.0001]^T$ |
| 1.0e-11     | $[1, 2, 4]^T$                |

3. Táblázat. A döntéstámogatási preferenciamátrix konzisztensé tétele optimalizálási feladata megoldása az alkalmazott perturbáció függvényében. Figyeljük meg a pontos megoldástól való eltérés csökkenését a perturbáció csökkenése függvényében.

Megállapíthatjuk, hogy a kapott eredmények azt tükrözik, hogy a perturbáció csökkenésével a várt, pontos eredmény jól megközelíthető volt, vagyis a vizsgált feladaton az inkonzisztens preferenciamátrix konzisztensé tétele numerikus szempontból megbízható eredményt ad.

Megjegyzendő, hogy a fenti vizsgálatokat csak a Matlab 6.5 oktatói változattal sikerült megcsinálni, a korábbi, 5.0-ás hallgatói változat nem ismerte fel az itt leírt optimalizálási programok neveit (ez a vizsgálat a műveletigény megállapításához kellett volna, mert ott még működik a `flops` rutin). Ennek ellenére a Matlab 6.5-ös hallgatói demováltozat valószínűleg eléri ezeket a

szubrutinokat.

Összefoglalva, a Matlab által az alapsomagban kínált optimalizálási eljárások használhatók, több esetben ügyesek voltak, ennek ellenére érdemes tapasztalatot gyűjteni mielőtt komoly, nehezebb feladat megoldásához kezdünk velük.

#### 4. Irodalom

A területtel való alaposabb megismerkedéshez a következő könyveket, dokumentumokat ajánlom:

1. Csentes Tibor: Bevezetés a globális optimalizálásba. Jegyzet előkészületben. Elérhető a [www.inf.u-szeged.hu/~csentes/go.ps.gz](http://www.inf.u-szeged.hu/~csentes/go.ps.gz) internetes címen.
2. Higham, Desmond J. and Nicholas J. Higham: MATLAB Guide. SIAM, Philadelphia, 2000.
3. Neumaier, Arnold internetes vendégoldala a globális optimalizálásról. Elérhető a következő címen: [www.mat.univie.ac.at/~neum](http://www.mat.univie.ac.at/~neum)
4. Stoyan Gisbert (szerk.): MATLAB (4. és 5. verzió). TypoT<sub>E</sub>X Kiadó, Budapest, 1999.



## F függelék

### Az előadás fóliái

#### AZ OPTIMALIZÁLÁS ALKALMAZÁSAI.

Csendes Tibor

[www.inf.u-szeged.hu/~csendes](http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes), [csendes@inf.u-szeged.hu](mailto:csendes@inf.u-szeged.hu)

Ez az új tantárgy az elődje, az Operációkutatás II és a Kombinatorikus optimalizálás nyomán az optimalizálási modellek használatába és számítógépes megvalósításukba ad bevezetést. A kredit követelményei:

- Az előadásra járás ugyan nem kötelező, de ajánlott, és a katalógus alapján azok, akik csak kevés alkalommal hiányoznak, plusz pontot kapnak
- Ugyancsak plusz pontot lehet kapni az előadáson az elhangzott anyagra vonatkozó egyszerűbb kérdések megválaszolásáért.
- A gyakorlat keretében az első félévben egy programot kell önállóan megírni és az erre vonatkozó esszét leadni határidőre (április 15., a vázlaté március 15.). A MATLAB rendszer elérhető a hallgatói kabinet gépein.
- A gyakorlaton írt több kisdolgozat összevont pontszáma el kell hogy érje a maximális pontszám 50%-át, csakúgy, mint a félévvégi tudásfelmérő dolgozaté és az esszéé.
- Mindenkinek kell szóbeli vizsgát tennie, aminek része egy 40 pontos dolgozat megírása is.
- Az Intézet döntése szerint az is kell hogy hallgassa az Optimalizálás Alkalmazásai című tárgyat, aki az Operációkutatás II. tárgyat sikeresen befejezte.



## MOTIVÁCIÓ

A jelenlévők egy jó része a végzés után optimalizálási feladatokat fog megoldani rutinszerűen, de a modellezésben való jártasság is hasznos több munkakörben. Egy korábbi amerikai felmérés szerint az operációkutatási végzettségű munkába állókat a legkeresettebbek listáján előkelő helyen szerepeltették (lásd OR Today).

H.-P. Schwefel példája: A Siemens megbízásából atomerőművek számára kellett a fűtőelemek helyét meghatározni úgy, hogy javuljon a hatékonyság. Az evolúciós módszerrel talált megoldás több mint 1%-al volt jobb, mint a korábban ismert. Bár nem tudja, hogy a talált közelítés akár csak helyileg optimális-e, és azt sem, hogy milyen messze van az optimumtól, a megbízó elégedett volt ( $> 10^8$  DEM).

*SIAM 100 \$, 100 Digits Challenge 2002, #4*<sup>10</sup>

A feladat a következő függvény minimumának meghatározása volt:

$$\begin{aligned} & \exp(\sin(50x)) + \sin(60e^y) + \sin(70 \sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \\ & - \sin(10(x + y)) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

A kapott eredmény a  $[-10.0, 10.0]$  keresési tartományon a globális minimum értékére a következő alsó- és felső korlátokat adta:

$$[-3.306868647475316, -3.306868647475196].$$

A kiemelt első 13 jegy matematikai bizonyítóerővel igazoltan helyes. Ehhez 0.26 másodperc CPU-idő, minimális memóriaigény (75 részintervallum tárolására volt szükség), 1975 célfüggvény-, 1158 gradiens- és 92 Hesse-mátrix kiértékelés kellett mindössze.

---

<sup>10</sup>Nick Trefethen: A Hundred-Dollar, Hundred-digit Challenge. SIAM News 35(2002)

## AZ ESSZÉ

Az esszé egy olyan rövid (15-20 oldalas) jelentés, amelynek a következő főbb részeket kell tartalmaznia:

1. A kitűzött feladat pontos, részletes megfogalmazása, a szakirodalom megismerése alapján a feladat alapos leírása, kitérve annak nehézségeire, és eltéréseire a szomszédos területektől. Fontos részletezni az alkalmazási területeket. Érdeemes itt kis méretű, áttekinthető példákat használni.

2. A megoldására megírt, felhasznált, lehetőleg Matlab (vagy Scilab, Netlib, esetleg Octave) programok részletes megadása, leírása. Ki kell térni az alkalmazott számítógépes megoldások okaira, előnyeire is (mint pl. a választott adattípus, számformátum, algoritmus változat, stb.).

3. A bemutatott algoritmusok hatékonyságát, sebességét, műveletigényét, pontosságát és egyéb említésre méltó tulajdonságát alkalmas teszteléssel kell bemutatni. Fontos azt is jellemezni, hogy milyen méretű feladatok megoldását lehet a tárgyalt módszerekkel elérni. Ennek eredményét táblázatos vagy grafikonos formában kifejező módon kell megadni.

4. Az esszé foglalja össze a szűkebb szakterület mélyebb vagy szélesebb körű megismeréséhez ajánlható irodalmat is (nyomtatott vagy elektronikus formájú).

- Nyomtatott vagy elektronikus formában kell a gyakorlatvezetőnek beadni,
- a használt szövegszerkesztő lehetőleg  $\text{\LaTeX}$  alapú, vagy Word legyen,
- érdemes támaszkodni a hálózaton keresztül elérhető előzetes jegyzet irodalomjegyzékére, az interneten elérhető adatokra, és az évfolyamtársakra,
- korlátozott mértékben a gyakorlatvezetővel való konzultáció is segíthet,
- *önálló munkát* kell tükröznie, és a hallgatónak a kapott feladat megoldásának minden részletével tisztában kell lennie,
- az esszé értékét növeli, ha az a Scilab, Netlib vagy Octave programjait tárgyalja,
- a hallgató javasolhat is esszé formában feldolgozandó témát.

## A KÖTELEZŐ PROGRAM

A kötelező program olyan házifeladat, amelyet Java nyelven kell írni, és a célja az, hogy a hallgatók bemutassák jártasságukat optimalizálási eljárások implementálásában, és az érintett algoritmusok működésének áttekinthető, könnyen érthető formában való megjelenítésében.

Az esszével szemben a kötelező program dokumentálása más szempontokra helyezi a hangsúlyt:

1. meg kell adni az algoritmus folyamatábráját vagy pszeudokódját,
2. a program teljes forrásszövegét, de legyen elérhető a program a hálózaton, és telepíthető is más gépekre,
3. meg kell adni a felhasználói útmutatót, amely alapján a program teljes értékűen használható, és végül
4. részletesen leírni egy jellemző futtatási példát, amely az algoritmus használhatóságát mutatja.

Tehát nem kell: az adott feladatkört ismertetni, részletesen megadni a kapcsolódó szakirodalmat, nem szükséges a megírt program hatékonyságát és hatáosságát teszteléssel igazolni.

Mintaként érdemes megnézni a

<http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes>

vendégoldalon a körpakolási illusztráló Java programot.

Fontos az önálló munka. Az értékelés alapja az lesz, hogy milyen látványos, ügyes illusztrációt ad a program az adott algoritmushoz.

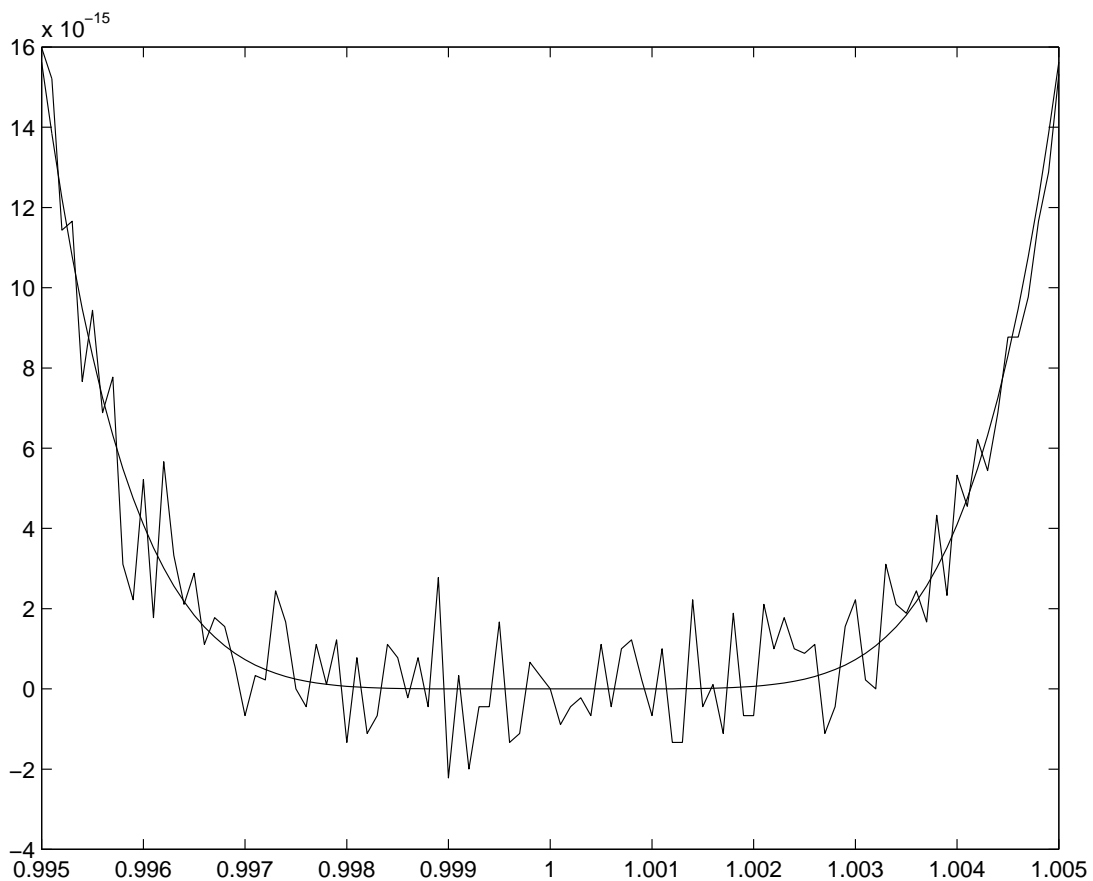
## MATLAB MINTA

Az alábbi rövid Matlab program megjeleníti az  $y = (1 - x)^6$  függvényt, és ennek Horner-elrendezés szerint átrendezett, de ekvivalens alakját, ahol

$$z = ((((((x - 6) * x + 15) * x - 20) * x + 15) * x - 6) * x + 1).$$

```
>> x = (9950:10050)/10000; % definialja a pontsorozatot
>> y = (1-x).^6;
>> z = ((((((x-6).*x+15).*x-20).*x+15).*x-6).*x+1);
>> plot(x,[y;z]); % egy grafikont jelenit meg
>> print -deps hornerdemo.ps % kiirja egy fajlba
```

A kapott ábra a két nagyon eltérő görbével (a sima az  $(1 - x^6)$ ):

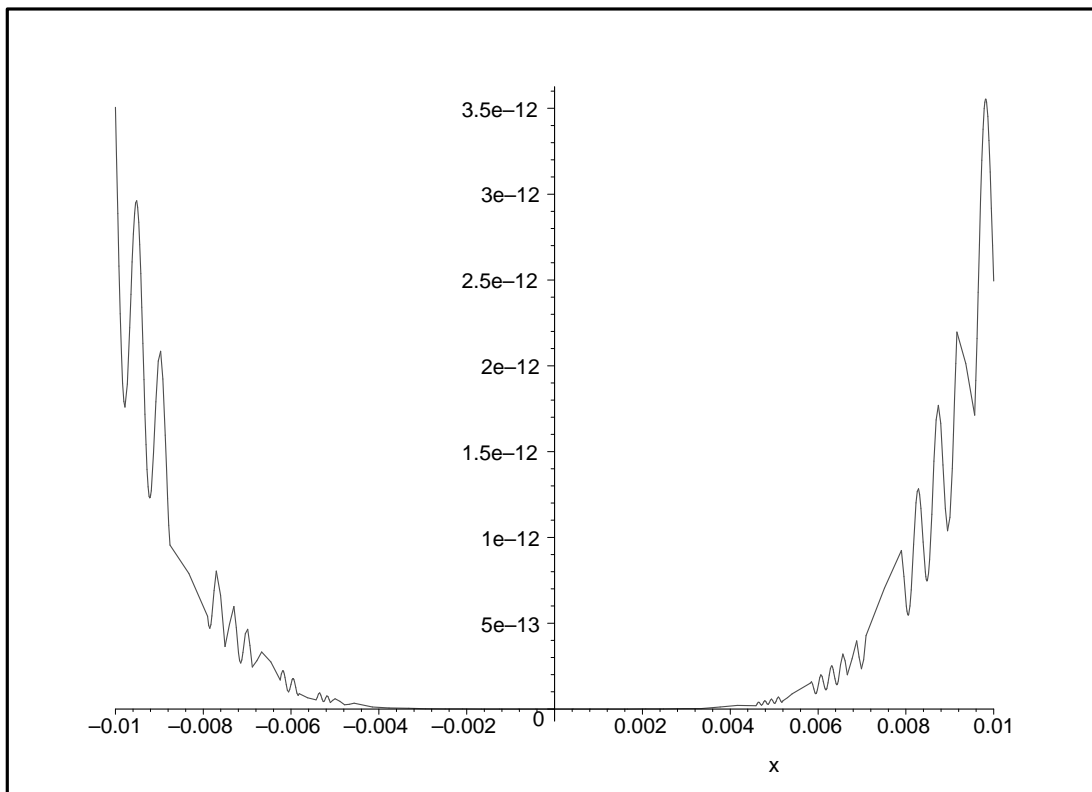


## MAPLE MINTA

```
> f(x) := x^6 * (sin(1/x) + 3);
```

$$f(x) := x^6 * (\sin(1/x) + 3)$$

```
> plot(f(x), x=-0.01..0.01);
```



```
> g(x) := diff(f(x), x);
```

$$g(x) := 6 * x^5 * (\sin(1/x) + 3) - x^4 * \cos(1/x)$$

```
> solve(g(x), x);
```

0,0,0,0

## AJÁNLOTT IRODALOM

Az előadás anyagát a készülő jegyzet tartalmazza majd. Ezt kiegészíthetik az ezután fontossági sorrendben megadott könyvek:

1. Bajalinov Erik és Imreh Balázs: Operációkutatás. Polygon Jegyzettár, Szeged, 2001.
2. Imreh Balázs: Kombinatorikus optimalizálás. Novadat Kiadó, Győr.
3. Hillier, F.S., G.J. Lieberman: Bevezetés az operációkutatásba. LSI Oktatóközpont, Budapest, 1994.
4. Winston, W.L.: Operációkutatás I-II. Módszerek és alkalmazások. Aula Kiadó, Budapest, 2003.
5. Tóth Irén (szerk.): Operációkutatás I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
6. Csernyák László (szerk.): Operációkutatás II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
7. Raffai Mária (szerk.): Döntéselőkészítés – Operációkutatási Módszerek. Novadat Kiadó, Győr, 2000.
8. Kósa András: Optimumszámítási modellek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
9. Gáspár László és Temesi József: Matematikai programozási gyakorlatok. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
10. Csallner András Erik: Intervallum-felosztási eljárások a globális optimalizálásban. PhD disszertáció, Szeged, 1999. Elérhető a <http://www.jgytf.u-szeged.hu/~csallner> internetes címen.
11. Komlósi Sándor: Az optimalizáláselmélet alapjai. Dialóg Campus Kiadó, Budapest, Pécs, 2001.
12. GNU OCTAVE vendégoldal: [www.che.wisc.edu/octave](http://www.che.wisc.edu/octave)
13. MATLAB online kézikönyvek:  
[www.mathworks.com/access/helpdesk/help/fulldocset.shtml](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/fulldocset.shtml)
14. NETLIB vendégoldal: [www.netlib.org](http://www.netlib.org)
15. SCILAB vendégoldal: [www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.html](http://www-rocq.inria.fr/scilab/scilab.html)

## A HÁTIZSÁK FELADAT

Adottak szállítandó tárgyak súllyal (vagy térfogattal) és értékkel (vagy fontossággal). A feladat az, hogy meghatározzuk a hátizsákba beteendő holmiknak azt a részhalmazát, amelyek az előző értelemben a leghasznosabbak, és együtt beférnek a korlátozott kapacitású hátizsákba.

Használjuk a következő jelölést:

- $m$  a tárgyak száma,
- $a_i$  az  $i$ . tárgy súlya,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $c_i$  az  $i$ . tárgy értéke,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $b$  a rakomány megengedett maximális összsúlya.

Legyen  $x_i$  értéke 1, ha az  $i$ -edik tárgy bekerült a hátizsákba, és 0, ha nem ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

A megoldandó feladat ezekkel felírva:

$$\max \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b, \text{ és}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

A hátizsák feladat tehát egy egészértékű, bináris lineáris programozási feladat. Egy egyszerű kiterjesztése adódik akkor, ha az elhelyezendő tárgyak között vannak azonosak. Ekkor az optimalizálandó változók értékei nemnegatív egészek lehetnek.

A feladat jellege miatt a kiindulási feladatra legtöbbször fel lehet tenni azt, hogy a súlyok és a súlyhatár nemnegatívak. Ennek ellenére mind az  $a_i$ , mind a  $c_i$  értékek előjele tetszőleges.

## A HÁTIZSÁK FELADAT MEGOLDÁSA TELJES LESZÁMOLÁSSAL

A hátizsák feladatot megoldhatjuk a durva erő módszerével (brute force, enumeration). Ennek lényege, hogy felsoroljuk az összes változó-kombinációt, meghatározzuk a lehetséges megoldásokra a célfüggvény értékét, és kiválasztjuk ez alapján az optimálisat.

Az összes változó-kombinációt például lexikografikus sorrendben határozhatjuk meg. Négy bináris változó esetén az így kapott sorozat:

$$(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1, 1).$$

Az eljárás hátránya, hogy nagyszámú változó esetén kezelhetetlenül sok esetre kell ellenőrizni a feltételt, és ez a szám a változók számával exponenciálisan nő.

PÉLDA. Tekintsük a következő feladatot. Legyen a tárgyak súlya rendre 2, 3 és 4, a hasznossága pedig 5, 3, 1, míg a megengedett összsúly 5. A megoldást tartalmazó táblázat (a lehetséges megoldásokat félkövér betű, az optimálisat csillag jelzi):

| javasolt megoldás | a súlya   | az értéke |
|-------------------|-----------|-----------|
| <b>(0,0,0)</b>    | <b>0</b>  | <b>0</b>  |
| <b>(0,0,1)</b>    | <b>4</b>  | <b>1</b>  |
| <b>(0,1,0)</b>    | <b>3</b>  | <b>3</b>  |
| (0,1,1)           | 7         | 4         |
| <b>(1,0,0)</b>    | <b>2</b>  | <b>5</b>  |
| (1,0,1)           | 6         | 6         |
| <b>(1,1,0)*</b>   | <b>5*</b> | <b>8*</b> |
| (1,1,1)           | 9         | 9         |

Vegyük észre, hogy a megoldást a mohó módszerrel is megkapnánk: addig vennénk a legértékesebb tárgyakat csökkenő hasznossági sorrendben, amíg azt a súlyhatár megengedi.

A feladatnak megfeleltethető a következő, többé-kevésbé reális probléma: adott egy komp, ennek teherbírása 5 tonna. Három jármű vár az átvitelre: egy 2 tonnás személyautó, egy 3 tonnás kisteherautó, és egy 4 tonnás szekér. A viteldíjak rendre 500, 300, illetve 100 forint. Üzleti okokból kíváncsiak vagyunk az előírásoknak megfelelő, legnagyobb bevételt jelentő fuvarra.



## A HÁTIZSÁK FELADAT MEGOLDÁSA KÖZVETETT, IMPLICIT LESZÁMOLÁSSAL

A megoldási módszer lényege, hogy a teljes leszámolást ésszerűen gyorsítjuk a feltétel és az értékek figyelembe vételével. Többek között azokat a kiértékeléseket tudjuk megtakarítani, amelyek egyértelműen nem lehetséges megoldásokhoz tartoznak. Például, ha kiderült, hogy a  $(0, 1, 0, \dots, 1, 0, 0)$  megsérti a súlykorlátot, akkor nincs értelme a több egyest tartalmazó  $(0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1)$  ellenőrzésének – ha a megfelelő súlyok pozitívok.

1. Első lépésként alakítsuk át a feladatunkat egy könnyebben áttekinthető, kanonikus alakúra: legyen minden célfüggvény együttható nem pozitív, és a súlyok növekvő sorrendbe rendezettek:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$ .

Az első feltételt az  $x'_i = 1 - x_i$  helyettesítéssel lehet elérni olyan változókra, amelyekre az nem teljesült. Ezeket a változókat természetesen meg kell jegyezni, és az eljárás végén a kapott optimális értékeket megfelelően vissza kell alakítani. A második tulajdonság teljesüléséhez a változókat kell csak alkalmasan átrendezni (és a megoldás után vissza).

2. Az  $x$  indulóvektornak válasszuk a nulla vektort. A keresés során ettől haladunk a keresési fa levelei felé, amelyek utolsó komponense egyes.

3. Ha  $\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b$  teljesül, akkor adjuk  $x$ -et a lehetséges megoldások  $L$  halmazához. Hagyjuk ki az ellenőrizendő csúcsok közül azokat, amelyekre a jelen  $x$  utolsó nullái egyikének  $c_i$  együtthatója negatív.

Ha ez az egyenlőtlenség nem igaz, akkor ugorjuk át mindazokat a vektorokat a keresésben, amelyek előállnak úgy, hogy  $x$  utolsó nulla elemei egyike helyett egyes szerepel, és a megfelelő súly pozitív.

4. Generáljunk egy újabb vektort! Ha van még ilyen, akkor folytassuk a 3. Lépéssel. Az új vektor generálása során ha lehet, akkor olyant választunk, amely az előző  $x$  vektor utolsó nulla jegyeit módosítva kapható. Ha ez már nem lehetséges, akkor visszatérünk egy korábban félbehagyott ághoz a keresési fában.

5. A legnagyobb célfüggvény értékű talált lehetséges megoldás az optimális megoldás az  $x^*$  pontban. Az 1. Lépésben végrehajtott átalakításoknak megfelelően az eredményt visszatranszformáljuk.

## A HÁTIZSÁK FELADAT MEGOLDÁSA KÖZVETETT, IMPLICIT LESZÁMOLÁSSAL – PÉLDA

A korábban vizsgált példát most nem érdemes használni, mert könnyen látható, hogy abban nincs lehetőség a keresés gyorsítására, mivel a nem lehetséges megoldások mind a keresési fa levelein vannak.

PÉLDA. Tekintsük ezért a következő, kicsit módosított feladatot. Legyen a tárgyak súlya rendre 4, 3 és 3, a hasznossága pedig -5, 3, -1, míg a megengedett összsúly 2.

Kövessük a közvetett leszámolási algoritmus lépéseit.

1. Írjuk fel az eredeti feladatot:

$$\max \sum_{i=1}^3 c_i y_i = \max -5y_1 + 3y_2 - y_3,$$

a feltétel pedig

$$\sum_{i=1}^3 a_i y_i \leq b, \quad \text{azaz } 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 2.$$

A kanonikus alakot úgy kapjuk, hogy az  $y_2$  változót  $1 - x_1$ -el helyettesítjük (és  $c_2$  új értéke -3 lesz). Ezzel párhuzamosan a súlyok növekvő sorrendje eléréséhez cseréljük fel a változókat:

$$x_1 = 1 - y_2, \quad x_2 = y_3, \quad x_3 = y_1.$$

Az új feladat ezután:

$$\begin{aligned} \max & -3x_1 - x_2 - 5x_3 + 3, \\ & -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -1. \end{aligned}$$

2. Az indulóvektor  $x^T = (0, 0, 0)$ .

3. A  $(0,0,0)$  vektorra a fenti feltétel nyilvánvalóan nem teljesül, ezért a további keresésből kizárjuk a  $(0,1,0)$ ,  $(0,1,1)$  és  $(0,0,1)$  eseteket is, mivel az utolsó két súly pozitív, tehát ezekre az esetekre sem teljesülhet a feltételünk.

## A HÁTIZSÁK FELADAT MEGOLDÁSA KÖZVETETT, IMPLICIT LESZÁMOLÁSSAL – PÉLDA II.

$$\begin{aligned} \max & -3x_1 - x_2 - 5x_3 + 3, \\ & -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq -1. \end{aligned}$$

4. A következő keresési vektor  $x^T = (1, 0, 0)$ .

3. Az  $(1, 0, 0)$  vektor súlya  $-3 \leq -1$ , tehát  $L = \{(1, 0, 0)\}$ . Az ehhez a vektorhoz tartozó célfüggvényérték 0. Mivel az  $(1, 0, 0)$  vektor hátsó nullái mind-egyikéhez negatív célfüggvény-együttható tartozik, ezért más vektort már nem is kell megvizsgálni: a további lehetséges megoldások célfüggvényértéke kisebb lenne a megtaláltnál.

5. Az átalakított feladat optimális megoldása tehát  $(1, 0, 0)$ . Az 1. Lépés átalakítása alapján az eredeti feladat optimális megoldása

$$\begin{aligned} y_1 = x_3 &= 0, \\ y_2 = 1 - x_1 &= 0, \\ y_3 = x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Az ehhez tartozó célfüggvényérték pedig természetesen 0.

Az eredmény szépen értelmezhető az eredeti

$$\begin{aligned} \max & -5y_1 + 3y_2 - y_3, \\ & 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 2 \end{aligned}$$

feladatra. Eszerint a célfüggvény optimuma a teljes, feltétellel nem korlátozott tartományon a  $(0, 1, 0)$  pontban lenne. Ez azonban nem lehetséges megoldás, mert a második komponens miatt az előírt feltétel nem teljesül. Az egyenlőtlenséget az  $y_2 = 0$  választással teljesíthetjük, ez pedig épp a kapott megoldást adja. Mivel a célfüggvény együtthatók és a súlyok egyike sem nulla, ezért más megoldás nincs is.

## A HAJÓRAKODÁSI FELADAT

Korlátozott térfogatú szállítóeszköz esetén a hátizsák feladat feltételéhez a térfogatra vonatkozót is meg kell adni. Kövessük a korábbi jelölést:

- $m$  a tárgyak száma,
- $a_{1i}$  az  $i$ . tárgy súlya,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $a_{2i}$  az  $i$ . tárgy térfogata,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $d_i$  az  $i$ . tárgyból rendelkezésre álló mennyiség,
- $c_i$  az  $i$ . tárgy értéke,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,
- $b_1$  a rakomány megengedett maximális összsúlya,
- $b_2$  a rakomány megengedett maximális össztérfogata.

Legyen  $x_i$  értéke ismét 1, ha az  $i$ -edik tárgy bekerült a rakományba, és 0, ha nem ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Ha több  $i$ -edik tárgy is van a rakományban, akkor  $x_i$  értéke legyen a megfelelő egész szám.

A megoldandó feladat ezekkel felírva:

$$\max \sum_{i=1}^m c_i x_i,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^m a_{ji} x_i \leq b_j, \quad j = 1, 2,$$

$$x_i \leq d_i, \quad \text{és}$$

$$x_i \text{ egész, } i = 1, 2, \dots, m.$$

Állapítsuk meg, hogy a hajórakodási feladat is megoldható a korábban ismerttetett implicit leszámolással, de módosítást kell rajta végrehajtani. Bár elvileg a két feltétel egymástól függetlenül is érvényesíthető az ellenőrizendő vektorok számának csökkentésére, de a súlyok és a térfogatok értékei egyszerre nem feltétlenül rendezhetők növekvő sorrendbe. Ennek ellenére a kapott eljárás általában hatékonyabb lesz, mint a teljes leszámolás.

Vegyük észre, hogy hasonló módon további feltételek is érvényesíthetők, pl. a rakomány összhosszára stb.

## A FIX KÖLTSÉG FELADAT

A termelő, szolgáltató vállalkozások a költségeik csökkentésére törekszenek. Tekintsük azt a feladatot, amely a fix és termeléssel arányos költségek viszonyát vizsgálja.

Használjuk a következő jelölést:

- $m$  a termékek száma,
- $x_i$  az  $i$ . termék gyártandó mennyisége,
- $d_i$  az  $i$ . termék gyártási korlátja,
- $a_{ij}$  a  $j$ . termék egységnyi mennyiségének gyártásához az  $i$ . erőforrásból felhasznált mennyiség,
- $b_i$  az  $i$ . erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség,
- $c_i$  az  $i$ . termék fix költsége (vagy nulla),
- $k_i(x_i)$  az  $i$ . termék mennyiségtől függő termelési költsége.

A matematikai modell ezek alapján:

$$\min \sum_{i=1}^m f_i(x_i) = \min \sum_{i=1}^m c_i + \sum_{i=1}^m k_i(x_i)$$

feltéve, hogy

$$0 \leq x_i \leq d_i, \text{ és}$$

$$Ax \leq b.$$

A feladat nemlineáris  $k_i(x)$  esetén szeparábilis, lineárisan korlátozott nemlineáris optimalizálási feladat. Amennyiben a gyártandó termékek mennyisége egész, akkor ráadásul egészértékű (vagy vegyes egészértékű) nemlineáris optimalizálási problémával állunk szemben.

Gyakori eset, hogy a nem fix beruházási függvényrész  $x_i^{0.6}$ , vagy hasonló alakú, és így feladatunk a konkáv optimalizálás területére tartozik.

## ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS GYAKORLÓ FELADATOK AZ EDDIGI FELADATOKHOZ

1. Mutasson olyan értelmes gyakorlati feladatot, amely olyan hátizsák feladatra vezet, amelyben a célfüggvény együtthatók mind negatívak!
2. Hogyan fogalmazná át a teljes leszámolás módszerét a hátizsák feladat azon esetére, amikor több azonos tárgyat kell elhelyezni?
3. Mutasson példát, amelyre az implicit leszámolási eljárás az első lehetséges megoldással meg is találja az optimális megoldást!
4. Mutasson példát, amelyre az implicit leszámolási eljárás is minden szóba-jövő vektort meg kell hogy vizsgáljon ahhoz, hogy megtalálja az optimális megoldást!
5. Keressen gyakorlati példát arra az esetre, amikor a hátizsák feladat célfüggvény együtthatói között vannak pozitív és negatív előjelűek is!
6. Mi adja a lényegi eltérést a hátizsák- és a hajórakodási feladat között?
7. Ha egy 2 Ghz-es PC 10 órajel alatt tudja egy vektorról eldönteni, hogy az lehetséges megoldása-e a hátizsák feladatnak, akkor egy nap alatt milyen méretű feladat megoldására lehet biztosan számítani (tehát a legrosszabb esetben)?
8. Keressen reális alkalmazási feladatot, amely olyan hátizsák feladatra vezet, amelyben negatív és pozitív súlyok is kellene!
9. Indokolja, hogy a fix költség feladat miért nem vezethető vissza közvetlenül a hátizsák feladatra!
10. Adjon meg egy olyan hátizsák feladat osztályt, amely minden elemére nem negatív az optimális célfüggvény érték!
11. Mit lehet mondani annak a hátizsák feladatnak a megoldásairól, amelyben minden súly és minden célfüggvény együttható is megegyezik?
12. Jellemezze a hajórakodási feladatoknak azt a részhalmazát, amely megfeleltethető a hátizsák feladatnak!

ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK ÉS GYAKORLÓ FELADATOK AZ EDDIGI  
FELADATOKHOZ II

1. Tekintsük a  $\max x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot. Milyen mértékben lehet megváltoztatni a súlykorlátot ahhoz, hogy a megoldás ne változzon? Mi a helyzet a feladat többi paraméterével?
2. Tegyük fel, hogy egy hátizsák feladatban a legnagyobb célfüggvényértékhez tartozó tárgyak összsúlya a megadott korlát alatti. Mit mondhatunk ekkor az optimális megoldásról?
3. Ha a hátizsák feladatban megadott legfontosabb tárgyak összsúlya épp a súlyhatárt adja, akkor mi az optimális megoldás?
4. Mutasson olyan hátizsák feladatot, amelynek optimális megoldásában a legkisebb értékű tárgy is benne van!
5. Igaz az, hogy bármely bináris vektorhoz konstruálható olyan hátizsák feladat, amelynek ez egyetlen optimális megoldása? És olyan, amelynek csak ez nem optimális megoldása?
6. Mi a hátránya a Monte Carlo módszernek (egyenletes eloszlással generálunk vektorokat, és a talált legjobb célfüggvényértékű vektort megjegyezzük) a hátizsák feladat megoldása során?
7. Oldja meg fejben a  $\max x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2 \leq 2$  hátizsák feladatot! Melyik módszert használta?
8. Érveljen a teljes leszámolás módszere mellett: mikor előnyösebb az, mint az implicit leszámolás?
9. Mennyi a műveletigénye az implicit leszámolás első, előkészítő lépésének?
10. Mi a megoldása annak a hátizsák feladatosztálynak, amelyben minden súly, érték és súlyhatár megegyezik?
11. Miért nincs értelme a hátizsák feladatnak  $m = 1$  esetén?
12. Mutassa meg, hogy a fix költség feladat speciális eseteként előáll a hátizsák feladat!

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT

Az operációkutatás egy nevezetes, központi feladata az utazó ügynök problémája. Legyenek adottak meglátogatandó városok, ismerjük a köztük lévő távolságokat. A feladat egy olyan minimális hosszúságú útvonal megtalálása, amely minden várost érint, mindegyiken csak egyszer halad át, és a körút végén visszatér a kiindulási városba.

A matematikai modell megfogalmazásában legyen a korábbiaknak megfelelően a meghatározandó változók halmaza  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , ahol  $n$  a városok száma,  $x_{ij}$  pedig azt adja meg, hogy az  $i$ . és a  $j$ . város között áthalad-e az aktuális körút. A feladatot a következők szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n x_{it} &= 1 \quad (i = 1, \dots, n), \\ \sum_{t=1}^n x_{tj} &= 1 \quad (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{i \in Q} \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus Q} x_{ij} &\geq 1 \quad Q \subset \{1, \dots, n\}, Q \neq \emptyset, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A célfüggvény a megtett útszakaszok költségét összegzi. Az első feltétel azt követeli meg, hogy az ügynök minden városból kimegy, a második pedig azt, hogy mindegyikbe bejut, mindkét esetben pontosan egyszer. E két feltétel teljesülése esetén még előfordulhat, hogy a kapott útvonal különálló körutakból áll, ami a feladat eredeti megfogalmazásának nem felel meg.

Ezt a problémát rendezzi a következő feltétel. Ha lenne olyan zárt körút, amely nem tartalmazza az összes várost, akkor az ehhez tartozó városok alkotta  $Q$  halmazra ez a feltétel nem teljesülne, hiszen ekkor a baloldali összeg nullának adódna.

Állapítsuk meg, hogy a megfogalmazott operációkutatási feladat egy lineáris egyenlőség és egyenlőtlenség korlátokkal ellátott nulla-egy lineáris programozási feladat.



## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT A GYAKORLATBAN

Az utazó ügynök feladat számos alkalmazásban fordul elő kisebb-nagyobb módosítással.

Az egyik legkézenfekvőbb a tömegközlekedés *járatütemezési problémája*. Adjuk meg azt az útvonalat, amelyet egy busznak meg kell tennie ahhoz, hogy bizonyos járatok útvonalán a megfelelő szolgáltatást nyújtsa, ehhez a lehető legrövidebb útvonalat keressük, és a járatok teljesítése után térjen vissza az indulási állomásra.

Hasonló eset a fémmegmunkálásban a *szerszámgépek olyan vezérlése*, hogy a befogott munkadarab lehető legkisebb mozgatása révén minden részművelet helyét érintse a fűrő, szegecselő stb. fej, majd térjen vissza a kiindulási helyzetébe.

Tekintsük azt a problémát, amikor a feladat egy gyár által termelt *termékek sorrendjének meghatározása* – tekintettel arra, hogy az egyik termék gyártásáról egy másiknak a termelésére való átállásnak időben, vagy direkt költségben eltérő ára van. Természetesen minden terméket le kell gyártani, és a teljes termelési ciklus után ugyanabba a helyzetbe tér vissza a gyártási sorrend.

Bonyolultabb a helyzet, ha *repülőgépek és azok személyzete útitervét* kell optimálisan meghatározni úgy, hogy megadott városokat érintsenek, a hatékonyság a lehető legjobb legyen, de a szervizelési, pihenési stb. előírásokat betartsák.

Közvetve idetartozik az *írógépek, számítógépes billentyűzetek tervezése* is. Ekkor adott nyelvi környezetben megméri, hogy két betű egymás utáni előfordulása milyen gyakori. Ennek megfelelően a cél olyan billentyűzetet megadni, amelyre a tipikus szövegek gépelése során a lehető legkevesebbet kell mozgatni a kezünket.

Utazó ügynök feladatot old meg a *betegszállító diszpécser* is, amikor meghatározza azt, hogy a mentő az aznapi betegeket milyen sorrendben vegye fel a lakásukban, szállítsa a dialízis kezelésre, majd vissza otthonukba. Ebben a feladatban a kórháznak kiemelt helye van, nyilván nem lehet azt utolsóként érinteni...

Az utazó ügynök feladata interpretálható úgy is, hogy minimális hosszúságú, minden csúcst érintő irányított körutat kell meghatározni egy adott gráfban.

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT RÖVIDEBB ALAKJA

Az utazó ügynök feladat korábban ismertetett modellje  $2^n$  darab feletti feltételt tartalmazott, ez valódi feladatok esetén elviselhetetlenül nagy szám. A. Tucker 1960-ban kevesebb feltétellel fogalmazta újra a feladatot:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n x_{it} = 1 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{t=1}^n x_{tj} = 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2 \quad 2 \leq i \neq j \leq n,$$

$$x_{ii} = 0, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$u_i \geq 0, \quad u_i \text{ egész}, \quad i = 2, \dots, n.$$

A részkör mentességet a 3., új feltétel hivatott biztosítani. Az új feladatnak  $n^2$  nagyságrendű feltétele van. A konstrukció lényege, hogy az  $u_i$  számokkal alkalmasan sorszámozott körút elemekre a 3. feltétel csak akkor teljesülhet, ha az teljes körút (vö. a bizonyítás vége a következő oldalon).

**ÁLLÍTÁS.** Az utazó ügynök feladat két modellje ekvivalens.

**BIZONYÍTÁS.** A két feladat célfüggvénye megegyezik, tehát a lehetséges megoldások halmazának megegyezését kell igazolni.

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT ISMERTETETT KÉT ALAKJA EKVIVALENCIÁJA

Tekintsük először azt az esetet, hogy az eredeti feladatnak az  $X$  mátrix egy lehetséges megoldása:

$$x_{1,i_2} = x_{i_2,i_3} = \cdots = x_{i_n,1} = 1, \text{ és}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ különben.}$$

Ehhez megkonstruáljuk azt az  $(X, u)$  párt, amely lehetséges megoldása lesz a második feladatnak. Mivel  $X$  lehetséges megoldása az első feladatnak, ezért ehhez tartozik egy körút, amely az  $(1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_n, 1)$  éleket tartalmazza. Definiáljuk most  $u$  értékét a következők szerint:

$$u_{i_t} = t, \quad t = 2, \dots, n.$$

Csak a harmadik feltételrendszert kell igazolni, a többi teljesülése nyilvánvaló. Tekintsünk egy tetszőleges ide való indexpárt:  $2 \leq i \neq j \leq n$ . Az  $u$  definíciójából adódik, hogy  $u_i - u_j \leq n - 2$ . Másrészt  $x_{ij} = 1$  pontosan akkor teljesül, ha  $i$  és  $j$  a körútban közvetlenül egymás utáni indexek: ha  $i = i_r$ , akkor  $j = i_{r+1}$ . Innen erre az esetre

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} = r - (r + 1) + (n - 1) = n - 2,$$

tehát a harmadik csoport feltétel is teljesül, így  $X$  lehetséges megoldása az első feladatnak.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a második feladatnak az  $(X, u)$  pár egy lehetséges megoldása, de van egy diszjunkt részkörút, tehát  $x_{i_1,i_2} = x_{i_2,i_3} = \cdots = x_{i_k,i_1} = 1$ , és  $1 < k < n$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $1 \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Mivel  $(X, u)$  egy lehetséges megoldása a második feladatnak, ezért

$$\begin{aligned} u_{i_1} - u_{i_2} + (n - 1)x_{i_1,i_2} &\leq n - 2, \\ u_{i_2} - u_{i_3} + (n - 1)x_{i_2,i_3} &\leq n - 2, \\ &\vdots \\ u_{i_k} - u_{i_1} + (n - 1)x_{i_k,i_1} &\leq n - 2 \end{aligned}$$

teljesül. Az egyenlőtlenségeket összeadva azt kapjuk, hogy  $k(n - 1) \leq k(n - 2)$ , ami  $1 < k < n$  esetén ellentmondás.  $\square$

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADATOK EKVIVALENCIÁJA

Mivel az utazó ügynök feladat feltételrendszere csak az  $n$  számtól függ, ezért a feladatot egyértelműen meghatározza az  $n$  szám, és a  $C$  költségmátrix.

**DEFINÍCIÓ.** Azt mondjuk, hogy a  $C$  mátrix ekvivalens a  $D$  mátrixszal (jelölése:  $C \sim D$ ), ha vannak olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  és  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  számok, hogy igaz  $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$  minden indexpárra.

**SEGÉDTÉTEL.** Ha  $C \sim D$ , akkor a  $C$  mátrix által meghatározott TSP( $C$ ) utazó ügynök feladat optimális megoldása megegyezik a TSP( $D$ ) feladatével.

**BIZONYÍTÁS.** Mivel mindkét feladatnak létezik optimális megoldása, ezért a segédtétel állítása korrekt. A két feladat lehetséges megoldásai halmaza megegyezik, legyen ez  $L$ , a két célfüggvény pedig  $z_C$  és  $z_D$ .

Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan  $\gamma$  konstans, hogy  $z_C(x) = z_D(x) + \gamma$  teljesül minden  $x$  lehetséges megoldásra. Mivel  $C \sim D$ , ezért vannak olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  és  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  konstansok, hogy  $c_{ij} = d_{ij} + \alpha_i + \beta_j$  minden  $1 \leq i, j \leq n$  indexpárra.

Ekkor

$$\begin{aligned} z_C(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} + \alpha_i + \beta_j) x_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n x_{ij}. \end{aligned}$$

Mivel  $x$  lehetséges megoldás, ezért mindkét utóbbi második szumma egy:  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$ . Ezért aztán  $\gamma = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j$  megfelelő választás:  $z_C(X) = Z_D(X) + \gamma$ . Ez épp a segédtétel állítását igazolja.  $\square$

**KÖVETKEZMÉNY.** Az optimális megoldás meghatározását illetően elegendő olyan utazó ügynök feladatokat vizsgálni, amelyekre  $C \geq 0$  teljesül.

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT ÉS A HOZZÁRENDELÉSI FELADAT

Vegyük észre, hogy a harmadik feltételcsoporttól eltekintve az utazó ügynök feladat a hozzárendelési feladatot adja. Emiatt az utazó ügynök feladat  $L$  lehetséges megoldásai halmaza része a megfelelő hozzárendelési feladat  $S$  lehetséges megoldásai halmazának:  $L \subset S$ . Mivel

$$\min \{z(X) : X \in S\} \leq \min \{z(X) : X \in L\},$$

ezért

- (i) ha  $X$  optimális megoldása a  $H(C)$  hozzárendelési feladatnak és  $X$  teljes körút, akkor  $X$  egyben optimális megoldása a  $TSP(C)$  utazó ügynök feladatnak is, és
- (ii) Ha  $X$  optimális megoldása a  $H(C)$  hozzárendelési feladatnak, akkor  $z(X)$  egy alsó korlátja a  $TSP(C)$  utazó ügynök feladat optimumértékének.

Az 1 - 2 - 3 - 4 - 5 teljes körúthoz tartozó egy hozzárendelési feladat költségmátrixa ( $M$  az adott számítógépes környezetben ábrázolható legnagyobb szám):

$$\begin{bmatrix} M & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & M & 1 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & M & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & M & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 & M \end{bmatrix}$$

A következő költségmátrixhoz tartozó hozzárendelési feladat optimális megoldása (1 - 2 - 3, 4 - 5) nem ad lehetséges megoldást a kapcsolódó utazó ügynök feladatra:

$$\begin{bmatrix} M & 1 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & M & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & M & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & M & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 1 & M \end{bmatrix}$$

A megfelelő optimális célfüggvényérték mindkét előző hozzárendelési feladatra 5. Az utóbbi költségmátrixhoz tartozó utazó ügynök feladat egy optimális megoldása az 1 - 2 - 3 - 4 - 5 útvonal, amihez az optimális költség 13.

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT ÉS A HOZZÁRENDELÉSI FELADAT II.

Az utazó ügynök feladat tulajdonságai miatt számos esetben ésszerű azt feltételezni, hogy a költségmátrix *szimmetrikus*. E szabály alól azonban vannak természetes kivételek. Még városok közti távolság esetén is lehet eltérés az oda és a visszaút között, de még gyakoribb a termékek gyártási sorrendje megválasztása esetén, hogy az A termék gyártásáról a B-re pl. gyorsabban lehet áttérni, mint fordítva.

Az utazó ügynök feladat nagyszámú feltételére, és a leszámolási eljárás reménytelenül nagy műveletigényére tekintettel a feladatot szokás egyrészt *korlátozás és szétválasztás módszerrel* megoldani, másrészt gyors, *heurisztikus közelítő eljárásokat* alkalmazni.

A korlátozás és szétválasztás módszerét gyorsítani lehet akkor, ha jó korlátokat tudunk megadni az optimum értékére. Ennek eszköze lehet a korábban ismerttetett áttérés a megfelelő hozzárendelési feladatra.

Egon Balas és Paolo Toth számítógépes kísérleteket végzett, amelynek során 400 problémát generáltak véletlenszerűen. Egyenletes eloszlással határozták meg a feladat méretét az  $50 \leq n \leq 250$  határok között, és a célfüggvény együtthatókat is az 1 és 100, illetve más esetben az 1 és 1000 közötti egészek közül.

Az így előálló feladatokat megoldották mint TSP feladatot, és mint hozzárendelési feladatot is. Azt kapták, hogy a hozzárendelési feladatok optimumértékei átlaga 99.2 %-a volt az utazó ügynök feladat optimumai átlagának. Az eredményekből kitűnt, hogy  $n$  növekedésével a relatív eltérés csökkent.

Ezzel együtt az utazó ügynök feladat az ún. NP nehéz feladatok közé tartozik, tehát nem ismeretesek azt az  $n$  feladatméret polinom függvényével korlátozott idő alatt megoldó eljárások. Emiatt előtérbe kerültek a közelítő módszerek, amelyek csaknem optimális megoldást adnak viszonylag rövid idő alatt.

A heurisztikus algoritmusok lényege, hogy ezek az eljárások gyorsan, kevés műveletigény árán javítják a közelítő megoldásokat – de arra nem mindig van remény, hogy ezek minden esetre konvergálnának az optimális megoldáshoz.

## HEURISZTIKÁK AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADATRA

*Legközelebbi város beillesztése:* az eddigi részkörutat bővítjük egy olyan újabb várossal, hogy a részkörút városain kívüli városok között megkeressük azt a  $k$ -t, amelynek távolsága a legkisebb a részkörút valamely városához. Ezután ezzel bővítjük a részkörutat: Ha  $c_{ik}$  volt a kiválasztásban talált minimális távolság, akkor az új részkörútban az  $i$ . város után a  $k$ . következik, majd ezután az  $i$  várost eddig követő  $i'$ .

PÉLDA. Tekintsük a legutóbb vizsgált feladatot, amelynek  $C$  költségmátrixa

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | M | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | M | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | M | 1 |
| 5 | 5 | 5 | 1 | M |

Kiinduláshoz vegyük az 1 - 1 körutat. A többi város ettől mért távolsága rendre 1, 5, 5 és 5. Ez alapján a 2. várossal bővül a részkörút: 1 - 2 - 1.

A következő lépésben tekintsük a 3., 4. és 5. városok távolságait az 1. és 2. városoktól. Ezek a  $C$  mátrix főátlója feletti elemek, az első és második sorban ( $c_{12}$  kivételével). A minimumot a  $c_{23} = 1$  távolság adja, ezzel a kibővített részkörút: 1 - 2 - 3 - 1.

A harmadik lépésben a minimalizálandó távolságok  $c_{14}$ ,  $c_{24}$ ,  $c_{34}$ ,  $c_{15}$ ,  $c_{25}$  és  $c_{35}$ . Ezek mindegyike 5, válasszuk a 4. várost a bővítéshez. Ezzel az új részkörút: 1 - 2 - 3 - 4 - 1.

Az utolsó lépésben már csak egy városból választhatunk, és ezt a 4. városhoz kell kötni: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1 lesz a heurisztika által talált teljes körút. Ez nyilván lehetséges megoldás, a hozzá tartozó össztávolság 13. Ez egyben optimális megoldás is – bár ez nem jellemző a heurisztikák esetén.  $\square$

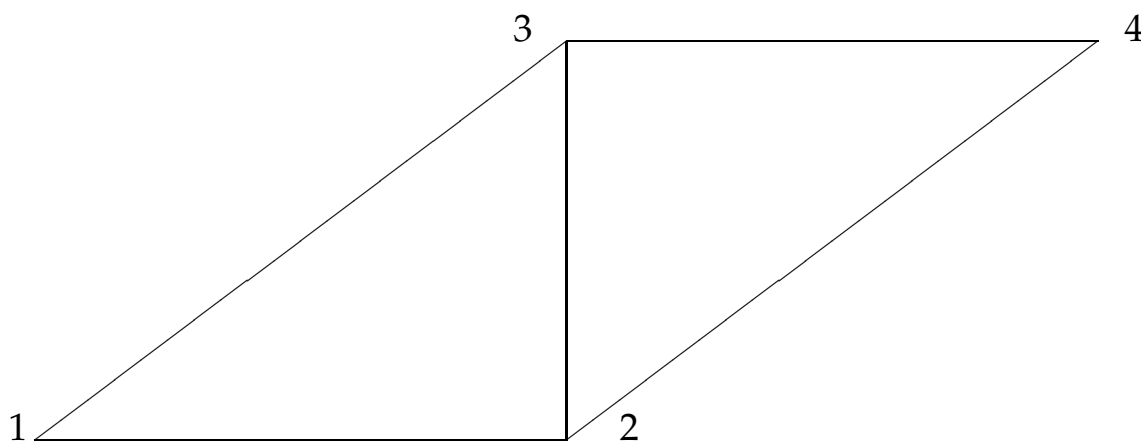
## HEURISZTIKÁK AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADATRA II.

*A legközelebbi város hozzáadása:* Az előzőnél egyszerűbb heurisztika: az aktuális útvonalat mohó módon bővíti a meglévő útvonal végpontjához legközelebbi várossal. Ha minden város szerepel már az útvonalban, akkor az utolsót összeköti az elsővel, és így képez teljes körutat.

PÉLDA. Mutassunk most egy olyan példát, amely szuboptimális megoldást eredményez. 3 város esetén ez nem lehetséges, ahogy könnyen belátható. Tekintsük akkor a következő távolságmátrixot:

|             |   |   |             |
|-------------|---|---|-------------|
| M           | 4 | 5 | $\sqrt{73}$ |
| 4           | M | 3 | 5           |
| 5           | 3 | M | 4           |
| $\sqrt{73}$ | 5 | 4 | M           |

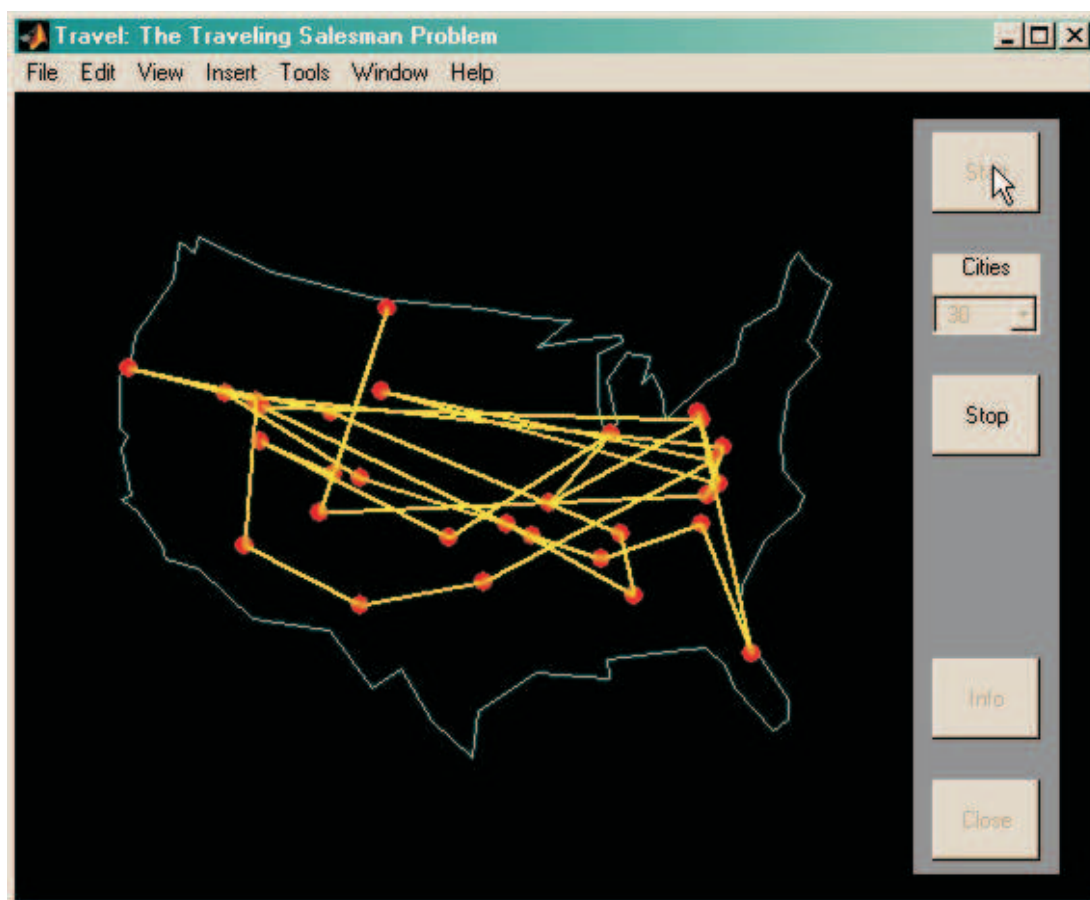
Ez két, a rövidebb oldalával összefordított Pitagorasz-háromszöget tartalmaz. Az így kapott paralelogramma természetesen módon ad egy körülvjárást, amely 18 hosszú. Ez a körút az 1 - 2 - 4 - 3 - 1.



Kövessük végig a legközelebbi város hozzáadása heurisztikát az 1. városból indulva. Az elsőhöz a második város a legközelebbi (lásd a távolságmátrix első sorát). A 2. városból (az első kivéve a keresésből) a 3. város van a legközelebb. A harmadikból már csak a 4.-be mehetünk. Ezután zárjuk a körutat, ami így 1 - 2 - 3 - 4 - 1. Az ehhez tartozó teljes megtett út  $4 + 3 + 4 + \sqrt{73} \approx 19.544$ .  $\square$



## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT MEGOLDÁSA MATLABBAL



Az ábrán az utazó ügynök feladat egy esetének kezdő helyzetét lehet látni. Az Amerikai Egyesült Államok véletlenül generált 30 városa van kiemelve, és a köztük keresett körút kezdeti változata. Figyeljük meg, hogy a jelen helyzet még nagyon távol van az optimális megoldástól, több helyen még az is kérdéses, hogy egyáltalán körút-e a megadott.

A Matlab Help menüsorában a Demos utasítás kiadása után kapott párbeszéd-  
des ablakban kérjük a Matlab bemutató programokat, azután a More demos fület  
válasszuk, majd a kapott listából a Travelling Salesman programot.

A jelen ábra a Corel Draw Capture programjával készült, és a kapott postscript  
ábra 30-szor nagyobb, mint a következő, amit a Matlab saját export utasítása  
adott.

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT MEGOLDÁSA MATLABBAL II.

Az alábbi programrészlet a Matlab utazó ügynök feladatra írt bemutató programjából való. Az eljárás célja nem a gyors megoldás, hanem a feladat nehézségének, és a megoldás menetének illusztrálása volt. A teljes Matlab program kb. 300 soros.

Figyeljük meg a viszonylag könnyen olvasható algoritmust, amely az eddigi közelítő megoldáson azt kísérli meg, hogy egy véletlenül generált körút szakaszon a bejárás sorrendjét az ellenkezőjére változtatja. Amennyiben a beavatkozás sikeres volt, akkor a javított útvonal lesz a továbbiakban a jelölt a megoldásra.

```
% Try a point for point swap
% =====
swpt1=floor(npts*rand)+1;
swpt2=floor(npts*rand)+1;

swptlo=min(swpt1,swpt2);
swpthi=max(swpt1,swpt2);

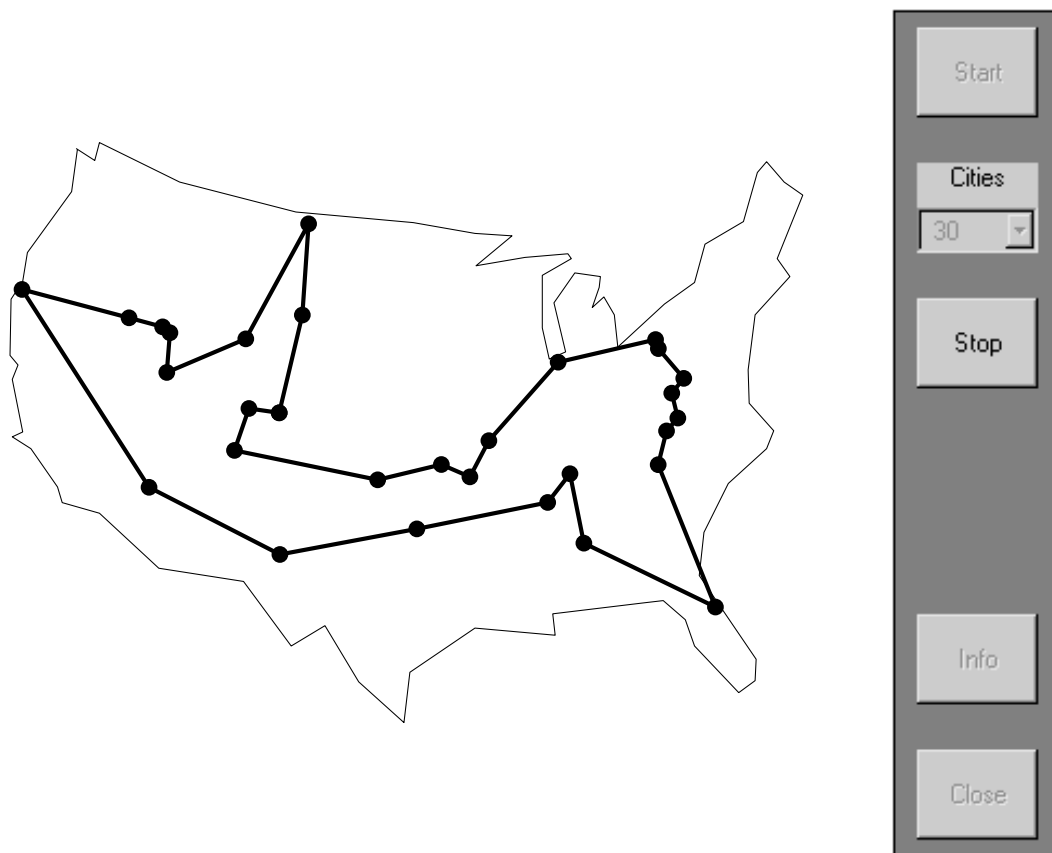
order=1:npts;
order(swptlo:swpthi)=order(swpthi:-1:swptlo);
pnew = p(order);

lennew=LocalPathLength(pnew,distmatrix);
if lennew<len,
    p=pnew;
    len=lennew;
    drawFlag=1;
end;
% =====
```

Érdekes és hatékony a tömbök címzési módja, pl.

```
order(swpthi:-1:swptlo).
```

## AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADAT MEGOLDÁSA MATLABBAL III.



Ez az ábra a feladat közel stabilizálódott közelítő megoldását mutatja. Az ehhez szükséges számítási idő pár másodperc volt.

## A TÁVOLSÁGVEKTOR SZEREPE A HEURISZTIKÁKBAN

A legközelebbi város beillesztése heurisztika  $\mathcal{O}(n^2)$  műveletigényű, ha az ún. *távolságvektorokat* használjuk: az iteráció minden lépésében ez a vektor tartalmazza az eddigi részkörútbeli, és az azon kívüli városok távolságát.

Kiindulásként ez a vektor az 1. várostól való távolságokat tartalmazza. Ez később, a  $k$ . városnak a részkörútba való bevonása után úgy módosul, hogy a  $k$ . városnak a részkörúton kívüli városoktól mért távolságai és az adott városokra vonatkozó, a távolságvektorban meglévő értékek minimumát kell képezni.

A távolságvektor használatával minden iterációs lépésben  $n$ -nél kisebb számú összehasonlítást végzünk, míg enélkül a távolságmátrix  $n^2$ -tel arányos számú elemét kellene megvizsgálni, és ez nyilvánvalóan lényegesen rontaná a heurisztika műveletigényét.

PÉLDA. Tekintsük ismét a korábban vizsgált utazó ügynök feladatot, amelynek költségmátrixa

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| M | 1 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | M | 1 | 5 | 5 |
| 1 | 5 | M | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 5 | M | 1 |
| 5 | 5 | 5 | 1 | M |

A legközelebbi város beillesztése heurisztika első lépésében az 1 - 1 részkörúthoz a távolságvektor az (1, 5, 5, 5) elemeket tartalmazza (ez a mátrix első sora, a főátlóbeli elem kivételével).

A következő lépésben a részkörutat a 2. várossal bővítjük. A távolságvektorban a 2. városra vonatkozó elemet törölhetjük. A következő vektorelem  $\min(5, 1) = 1$  lesz. A többi komponens nem változik: az új távolságvektor (-,1,5,5).

Az eljárást tovább folytatva az utolsó két képzett távolságvektor rendre (-,-,5,5) és (-,-,-,1) lesz. □

## A HEURISZTIKUS ALGORITMUSOK HATÁSOSÁGA VIZSGÁLATA

A heurisztikus algoritmusok eredményessége minősítésére három vizsgálati módszerosztály használatos:

- a legrosszabb esetek vizsgálata (worst case analysis),
- a valószínűségi analízis (probabilistic analysis), és
- az empirikus analízis (empirical analysis).

1. Az első megközelítés azt vizsgálja, hogy a legrosszabb lehetséges esetben milyen eltérést kaphatunk a heurisztika által adott közelítő megoldás és a valódi optimum között. Ezt fejezi ki lényegében a *heurisztika aszimptotikus hányadosa*. Legyen  $A$  egy a tekintett  $\mathcal{C}$  problémaosztály feladatai megoldását megközelítő heurisztika,  $A(P)$  a  $P$  feladaton a heurisztika által adott közelítés lehetséges megoldásának célfüggvény értéke, és  $OPT(P)$  a  $P$  feladat optimuma. Ekkor amennyiben

$$M_A = \limsup \left\{ \frac{A(P)}{OPT(P)} \mid P \in \mathcal{C} \right\}$$

létezik, akkor az a heurisztika aszimptotikus hányadosa. Az aszimptotikus hányados értelmezéséhez tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

$$A(P) \leq (M_A + \varepsilon) OPT(P).$$

Ez az összefüggés véges sok eset kivételével érvényes minden  $\mathcal{C}$ -beli feladatra. Mivel minden feladatnak van egy bizonyos (véges) mérete, ezért elegendően nagy feladatméret esetén a fenti feltétel már mindig érvényes, tehát ekkor már minden ekkora feladatra tudjuk, hogy a kapott közelítő megoldás legfeljebb hányszor rosszabb eredményt ad.

Nagyon jó, 1 és 2 közé eső aszimptotikus hányadosok érvényesek egyes *ládapakolási, szabási feladatokra*. Másrészt 1976-ban S. Sahni és T. Gonzalez igazolták, hogy ha létezik aszimptotikus hányados valamely polinomkorlátos TSP heurisztikára, akkor  $P = NP$ .

Ez utóbbi megállapítás alapján arra lehetne következtetni, hogy akkor nem érdemes polinomkorlátos TSP heurisztikákat keresni. Mégis (vö. a lineáris programozás esetét a  $3n$  átlagos, és  $2^n$  legrosszabb esetre vonatkozó iterációszámmal) *speciális* utazó ügynök feladatok esetén számíthatunk jó aszimptotikus hányadosra, és a gyakorlatban előforduló feladatok esetén is lehetnek egyes heurisztikák gyorsak.

## A HEURISZTIKUS ALGORITMUSOK HATÁSOSSÁGA VIZSGÁLATA II.

2. A valószínűségi analízis (probabilistic analysis) módszere alkalmazása során azonos méretű feladatok paramétereit (együtthatóit) független valószínűségi változóknak tekintjük. Ezek eloszlására alkalmas feltételek teljesülését feltételezzük (gyakran azt, hogy az eloszlások egyenletesek).

Ebben az esetben  $A(P)$ ,  $OPT(P)$ , és ezek hányadosa is valószínűségi változó. Az utóbbi várható értékéből az átlagos eltérésre lehet következtetni. Ezzel a módszerrel szemben az a gyakori kifogás, hogy az eloszlásokra vonatkozó feltételek nem feltétlenül helyesek, márpedig ezek a kapott eredményt döntően befolyásolhatják.

3. Az empirikus vizsgálat konkrét feladatmegoldásból kapott eredményekből képez mutatókat. Az eljárás lényege, hogy nagy számú feladatot generálunk úgy, hogy a feladat együtthatóit valamely adott (általában egyenletes) eloszlással egy rögzített számtartományból választjuk. Ezekre a problémákra mind a heurisztika által adott közelítést, mind a pontos megoldást meghatározzuk.

Ezután kiszámoljuk a hányadosokat és azok átlagát képezzük. Ha elegendően sok feladatot vizsgáltunk meg, akkor az eredmény, az empirikus hányados jellemezni fogja a vizsgált feladatosztályon a heurisztika közelítéseinek jóságát. Másrészt a számtartománynak a gyakorlati problémák halmazához való viszonya, és a feltételezett eloszlás általában kérdéses.

Összefoglalva az eddigieket, a heurisztikus algoritmusok közelítő megoldásai minőségének jellemzésére érdemes mindhárom tárgyalt módszert használni, hogy így kiegyensúlyozottabb képet kaphassunk.

## TOVÁBBI HEURISZTIKÁK AZ UTAZÓ ÜGYNÖK FELADATRA

Az elsőként ismertetett legközelebbi város beillesztése (nearest addition) heurisztika polinomkorlátos a távolságvektor használatával, a műveletigénye  $\mathcal{O}(n^2)$ . Nincs rá aszimptotikus hányados.

Ehhez a heurisztikához hasonló, de annál jobb megoldást ad a *legközelebbi város beszúrása* (nearest insertion) nevű eljárás. Ez is egy részkörúttal indul, majd az aktuális részkörutat olyan várossal bővíti, amelynek távolsága a részkörút egyik városához minimális.

Az eltérés abban van, hogy az új várost oda fogjuk beszúrni a részkörútba, ahol a beillesztés a legkisebb össztávolság növekedést okozza. Ez a heurisztika is  $\mathcal{O}(n^2)$  műveletigényű. Másrészt olyan utazó ügynök feladatokra, amelyek költségmátrixa szimmetrikus, és érvényes rá a háromszög egyenlőtlenség, a legközelebbi város beszúrása heurisztika aszimptotikus hányadosa 2. Más szóval véges sok esettől eltekintve legfeljebb kétszer nagyobb lesz a heurisztikával kapott célfüggvény, mint az optimális.

Érdekes, hogy nem mohó algoritmus, de van értelme a *legtávolabbi város beszúrásának* (farthest insertion). Az eljárás beszúrása az előző heurisztika módszerével történik, itt is a lehető legkisebb költség-növekedést jelentő helyre történik a hozzáadás. Az empirikus vizsgálatok szerint ez a jobb, mint az előbbi három.

A *legolcsóbb beszúrás* (cheapest insertion) módszer az eddigiek bizonyos értelmű kiteljesítése: azt a várost választjuk a meglévő részkörút bővítésére, amelyik alkalmas helyre való beszúrása a lehető legkisebb költségnövekedést jelenti. Az eljárás műveletigénye  $\mathcal{O}(n^3)$ , és a korábban már említett szimmetrikus költségmátrixú, a háromszög-egyenlőtlenséget teljesítő költségmátrixú TSP feladatokra az eljárás aszimptotikus hányadosa 2.

Mivel az említett heurisztikák mind viszonylag gyorsak, és ezek eredménye függ az indulóváros megválasztásától, ezért szokásos a heurisztikus algoritmusokat többször is végrehajtani, eltérő városokból indulva. Ha minden városra lefuttattunk egy heurisztikát, akkor az összevont eljárást szokás *all cities* változatnak nevezni. Az említetteken kívül használatosak heurisztikák a hozzárendelési feladat megoldásából kapott két vagy több részkörút összekapcsolására is.

## A SZABÁSI FELADAT

Adott méretű rudak, egyéb munkadarabok leszabása során gyakran felmerül az a feladat, hogy adott hosszúságú nyersanyagból hogyan vágjuk le az előírt összetételű végtermék halmazt úgy, hogy a lehető legkevesebb veszteség maradjon. Ezt a problémát egydimenziós szabási, vagy ládapakolási feladatnak (bin packing) nevezik.

A gyakorlati feladatok közül ide tartozik az, amikor egy építőipari vállalat adott profilú, rögzített hosszúságú fémrudakból a könnyűszerkezetes építkezéshez nagyszámú rövidebb rudat, oszlopot akar levágni, de figyelembe kell venni, hogy a lehető legkevesebb teljes rudat kezdjük meg, vagy az a cél, hogy az eldobandó nyersanyag mennyisége legyen minimális.

Ilyen feladatra vezet az is, ha egy síküveggyárban adott szélességű, hosszú üvegtáblákból kell megadott összetételű (az eredeti tábla szélességét megtartó) üveglapokat kivágni.

A hátizsák feladathoz hasonló megfogalmazást is lehet adni: adottak különböző súlyú tárgyak, ezek mindegyikét el kell helyezni minimális számú hátizsákban úgy, hogy azok közös súlykorlátját ne lépjük túl.

A számítástechnikából azt a problémát idézhetjük, amikor rögzített méretű tárhelyekre (pl. partíciókra) kell különböző méretű adatállományokat úgy elhelyezni, hogy ehhez a minimális számú tárhelyet használjuk fel.

A logisztikában az a feladat, hogy adott teherbírású járművekből mennyit kell minimálisan alkalmazni ahhoz, hogy adott, különböző súlyú tárgyakból álló rakomány elszállítható legyen,...

Többdimenziós szabási feladatot kapunk, ha az elhelyezendő tárgyak több kiterjedését is korlátozzuk, pl. a hosszát és a szélességét. Felmerülhet, hogy ebben az esetben mindenféle vágást megengedünk-e, vagy csak az anyag szélétől széléig menő, ún. guillotine-vágásokat.



## A SZABÁSI FELADAT MODELLJE

Tekintsük először az egydimenziós szabási feladat L.V. Kantorovicstól származó modelljét. Legyenek adva korlátlan mennyiségben  $K$  hosszúságú félkész termékek, ahol  $K$  pozitív egész. Az egyes végtermékek hossza legyen  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Ezek egyike sem nagyobb  $K$ -nál. A végtermékekből rendre  $r_1, r_2, \dots, r_n$  darabot kell levágni.

A modellben az  $a_j$  vektort lehetséges szabásnak nevezzük, ha

$$a_{ij} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{t=1}^n k_t a_{t,j} \leq K.$$

Ezek után jelölje  $A = (a_1, \dots, a_p)$  az összes lehetséges szabásokból előállított mátrixot. Legyen  $r$  az  $r_1, \dots, r_n$  komponensekből álló oszlopvektor, és  $c$  az a sorvektor, amelynek minden eleme egyenlő, egy félkész termék pozitív költsége.

Az egydimenziós szabási feladat optimumszámítási modellje ezekkel a paraméterekkel:

$$\min z(x) = cx,$$

feltéve, hogy

$$Ax = r,$$

$$x \geq 0, \quad x \text{ egész}, \quad (r \geq 0).$$

A modell használatának nehézségét az mutatja, hogy már a lehetséges szabások  $A$  mátrixának az összeállítása is komoly problémát jelent.

A célfüggvény konstans együtthatóit az magyarázza, hogy így a célfüggvény a lehetséges szabásokból a minimális darabszámúhoz tartozó megoldást fogja kiválasztani.

Vegyük észre, hogy a megadott modell egy egészértékű lineáris programozási feladat, amely a felírt formában a standard feladatnak felel meg.

## PÉLDA A SZABÁSI FELADATRA

PÉLDA. Tekintsünk egy nagyon egyszerű szabási feladatot: a félkész termékek hossza legyen 1, az egyes végtermékeké pedig 0.25 és 0.5. Írjuk elő, hogy összesen 4 darabot kell levágni az első termékből és kettőt a másodikból.

Ahogy könnyen ellenőrizhető, a lehetséges szabások ezek alapján:

$$(0, 0)^T, (0, 1)^T, (0, 2)^T, (1, 0)^T, (1, 1)^T, (2, 0)^T, (2, 1)^T, (3, 0)^T \text{ és } (4, 0)^T.$$

Ezek segítségével felírhatjuk az optimalizálási feladatot:

$$\min z(x) = cx = \sum_{i=1}^9 x_i,$$

feltéve, hogy

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

és

$$x \geq 0, \quad x \text{ egész, } (r \geq 0).$$

A feladat spekulatív megoldása során vegyük észre, hogy  $x_1$  értéke nulla kell hogy legyen az optimális megoldásban, hiszen ez a teljesítendő termékszámhoz nem járul hozzá, de növeli a költséget.

A másik végletet  $x_9$  képviseli, mert egy ilyen felosztású félkész termék felhasználása adja a legtöbb teljesített készterméket. Ilyen szabásokból viszont nem áll össze a teljes szabási előírás.

Másrészt megállapíthatjuk, hogy a jobboldali  $r$  vektor arányait pontosan adja az  $x_7$  változóhoz tartozó szabás. Ebből két darab kell ahhoz, hogy teljesüljön az egyenlőség feltételünk. Ehhez a 2 célfüggvényérték tartozik.

Látható, hogy ennél jobbat nem lehet elérni, mert nincs olyan lehetséges szabás, amelyből egy adná a jobboldali  $r$  vektort. Van viszont még egy optimális megoldás, az  $x_3 = 1, x_9 = 1$  (és minden további  $x_i = 0$ ): ez is kettős célfüggvény értéket ad – és ezzel ki is merítettük az optimális megoldások halmazát.  $\square$

## AZ OSZLOPGENERÁLÁS MÓDSZERE A SZABÁSI FELADATRA

A szabási feladat ismertett modellje nehezen használható, elsősorban a lehetséges szabások nagy száma miatt. P.C. Gilmore és R.E. Gomory egyszerűsítették a modellt.

Első lépésben elhagyták az egészértékűségi feltételt. Az ezt támogató érvelés szerint az ipari alkalmazásokban a nem egész optimális megoldás egész értékre való valamilyen átalakítása elfogadható.

Az oszlopgenerálás módszere ezután a módosított szimplex algoritmust használja, így nem szükséges a teljes  $A$  mátrix ismerete, elegendő annak az oszlopnak az előállítása, amelyben generáló elemet keresünk.

Ahhoz, hogy a módosított szimplex algoritmust használni lehessen, az eddigi

$$\min z(x) = cx,$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} Ax &= r, \\ x &\geq 0, \quad (r \geq 0). \end{aligned}$$

standard alakú feladatunkat lehetséges kanonikus alakra kell hozni. A bázisváltozók legyenek azokhoz a lehetséges szabásokhoz tartozók, amelyek épp az egységmátrixot adják:  $a'_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \dots, a'_n = (0, \dots, 0, 1)^T$ . Tekintsük ezeket az  $A$  mátrix első  $n$  oszlopának. Ezután már csak annyit kell tenni, hogy minden sornak a  $-c$ -szeresét hozzáadjuk a célfüggvényhez. Ez a művelet épp a bázisváltozókhoz tartozó célfüggvény-együtthatókat fogja nullázni.

Legyen  $d$  egy olyan  $n$  dimenziós vektor, amelynek minden komponense  $c$ . Ezzel a feladatunk a következő lehetséges kanonikus alakban írható:

$$\min z(x) = dr + (c - dA)x,$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} Ax &= r, \\ x &\geq 0, \quad (r \geq 0). \end{aligned}$$

## AZ OSZLOPGENERÁLÁS MÓDSZERE A SZABÁSI FELADATRA II.

A következő feladat a legkisebb célfüggvény-együttható meghatározása. Legyen az  $A$  mátrix egy tetszőleges oszlopvektora  $(v_1, \dots, v_n)^T$ . Ez alapján a  $c - \sum_{t=1}^n d_t v_t$  összeg minimumát keressük, ahol a  $d$  vektor  $n$ -dimenziós, és minden komponense  $c$ . Ezt a szélsőértéket ott kapjuk, ahol a  $\sum_{t=1}^n d_t v_t$  összeg maximális. Mivel  $v$  egy lehetséges szabás, ezért  $\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K$ .

A legkisebb célfüggvény-együttható meghatározásához eszerint a következő speciális egészértékű lineáris programozási feladatot kell megoldani:

$$\max w(v) = \sum_{t=1}^n d_t v_t,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K,$$

$$v_t \geq 0, \text{ egész, } t = 1, \dots, n.$$

Ez a feladat a korábban megismert hátizsák feladat a  $K$  súlykorláttal,  $k_t$  súlyokkal és  $d_t$  értékekkel. Ennek megoldásával tudjuk meghatározni a szabási feladat generáló eleme oszlopát.

A szabási feladat legkisebb célfüggvény-együtthatója és a generálóelem ismeretében végre tudjuk hajtani a módosított szimplex algoritmus egy lépését. Ezután az eddigi lépéseket ismételjük. Az egész eljárás akkor fejeződik be, ha az aktuális hátizsák feladat optimuma nem nagyobb, mint  $c$ . Ekkor az eredeti feladat minden célfüggvény-együtthatója nemnegatív.

## PÉLDA AZ OSZLOPGENERÁLÁS MÓDSZERRE

PÉLDA. Tekintsük ismét az előző nagyon egyszerű szabási feladatot: a félkész termékek hossza 1, az egyes végtermékeké pedig 0.25 és 0.5. Összesen 4 darabot kell levágni az első termékből és kettőt a másodikból. Az optimalizálási feladatot átrendezve úgy, hogy az egységmátrix legyen a baloldalon ( $x_1 - x_4$  csere):

$$\min z(x) = cx = \sum_{i=1}^7 x_i,$$

feltéve, hogy

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \quad (r \geq 0).$$

Az ehhez tartozó táblázat  $c = 1$  értékkel

| $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4 |
| 0     | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0 |

A szimplex táblázat az új,  $c - \sum_{t=1}^n d_t v_t$  új célfüggvénnyel:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1    | -1    | -2    | -2    | -3    | -6 |

A leolvasható bázismegoldás azt jelenti, hogy az  $(1, 0)$  szabásból kellene 4 darab, és a  $(0, 1)$  szabásból 2 darab. Ez összesen 6 félkész terméket jelent, ami nyilván még javítható. Oldjuk meg először a feladatot a szimplex algoritmussal.

Itt a második oszlop alapján nem lehetne javítani a célfüggvény értékét (de nem is találnánk benne generáló elemet). A legkisebb negatív célfüggvény együttható az utolsó oszlopot jelöli ki, és ebben az első mátrixelem (a négyes) lesz a generálóelem. A transzformált, következő szimplex táblázat:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1/4  | 1/2   | -1/2  | 1/4   | 3/4   | -3 |

## PÉLDA AZ OSZLOPGENERÁLÁS MÓDSZERRE II.

Az előző szimplex táblázat:

|       | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2  |
|       | -1    | 1     | -1/4  | 1/2   | -1/2  | 1/4   | 3/4   | -3 |

A legkisebb célfüggvény-együttható az  $x_3$  változónak a bázisba lépését jelenti.

|       | $x_2$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_9$ | 0     | 0     | 1/4   | 1/2   | 1/2   | 3/4   | 1/4   | 1  |
| $x_3$ | 1/2   | 0     | 1/2   | 0     | 1/2   | 0     | 0     | 1  |
|       | 1/2   | 1     | 1/4   | 1/2   | 0     | 1/4   | 3/4   | -2 |

Erről a szimplex táblázatról már le lehet olvasni a végeredményt: a 3. és a 9. szabásból kell egyet-egyet venni. Ez lehetséges megoldás lesz, és az ezzel adódó optimális célfüggvény érték 2. Az  $x_7$ -es szabásból kettő is optimális, és ez összhangban is van az eredményünkkel.

Tekintsük most a feladatunkat a Gilmore-Gomory-féle oszlopgenerálásnak megfelelően. A módosított szimplex algoritmusról tanultak miatt az ugyanezen bázismegoldásokon keresztül jut azonos eredményhez. Az eltérés a módosított szimplex algoritmus kivitelezésében, és főleg a legkisebb célfüggvény-együttható előállításában van. Ennek illusztrálásához lépünk vissza a

| $x_4$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 4 |
| 0     | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0 |

feladathoz. Írjuk fel erre az új bázisváltozó meghatározásához a megfelelő hátizsák feladatot:

$$\max w(v) = \sum_{t=1}^n d_t v_t = \sum_{t=1}^n c v_t = \sum_{t=1}^n v_t,$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=1}^n k_t v_t \leq K, \quad v_t \geq 0, \quad \text{egész, } t = 1, \dots, n.$$

Ez a feladat lényegében azt a lehetséges szabást keresi, amely a végtermékekből a legtöbbet állítja elő.  $\square$

## HEURISZTIKÁK A SZABÁSI FELADATRA

Az ismertetett egzakt módszerek mind nehezen végrehajthatók nagyobb méretű gyakorlati feladatokra. Az alábbi heurisztikák ezzel szemben gyorsan adnak jó közelítő megoldást.

A *first fit módszer* a végtermékeket felsorolási sorban tekinti, az aktuális munkadarabot az első olyan félkész termékre helyezi el, amelyen az elfér. Ebben az értelemben ez egy mohó algoritmus.

A *best fit algoritmus* olyan rudat ad meg, amelyről az aktuális munkadarabot levágva a legkevesebb maradék képződik.

A *worst fit eljárás* pedig értelemszerűen olyan megkezdett rudat választ az aktuális munkadarab levágásához, amelyiken a vágás után a leghosszabb még felhasználható szakasz marad.

Előnyös a leszabandó végtermékeket előzőleg nagyság szerint rendezni. Ez lényegesen javítja a heurisztika eredményét.

Az említetteken felül további egyszerű heurisztikák léteznek. Érdeemes megemlíteni, hogy az eddig tárgyalt szabási problémát *offline szabási feladat*nak is nevezhetjük, hiszen az összes adat ismeretében kellett megoldanunk, és az összes félkész terméket az eljárás teljes tartalma alatt felhasználhattuk a megoldás javításához.

Ezzel szemben online-nak nevezzük a szabási feladatot, ha a leszabandó termékek adatai beérkeztekor véglegesen döntenünk kell elhelyezésükről (a többi adat ismerete nélkül), vagy ha egy időben csak adott rögzített számú félkész termékből lehet szabni. Utóbbi esetben ha különben nem tudnánk tovább haladni, akkor valamelyik félkész termék eddigi szabását véglegesnek kell nyilvánítani, és egy újat vonunk be a szabás meghatározásába.

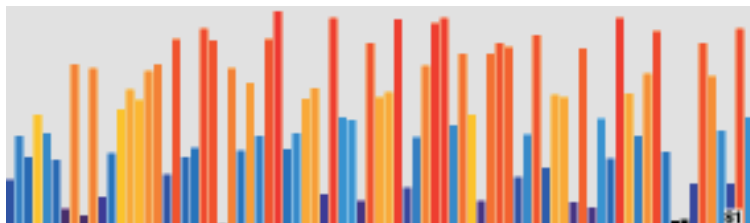
A szabási feladat heurisztikáinak tömör, látványos illusztrációja található a

<http://www.cs.arizona.edu/icon/oddsends/bpack/bpack.htm>

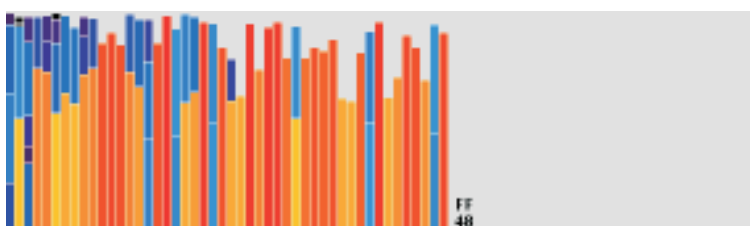
címen

## HEURISZTIKÁK A SZABÁSI FELADATRA II.

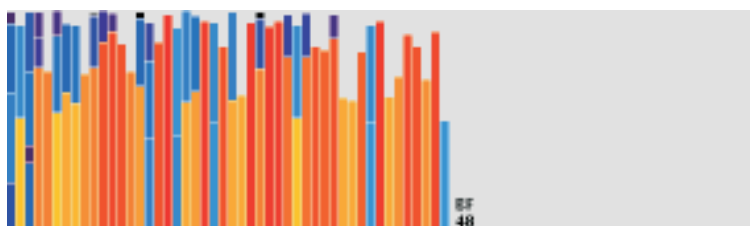
A heurisztikus algoritmusok működését illusztrálja az alábbi öt ábra egy véletlenül generált feladatra:



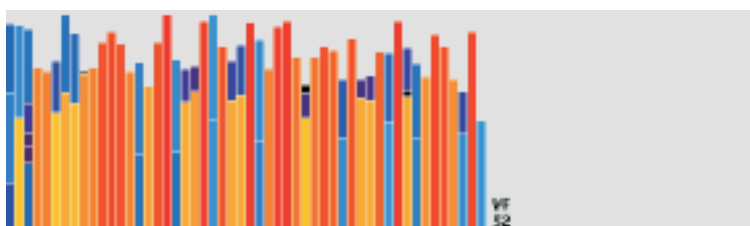
A first fit eredménye:



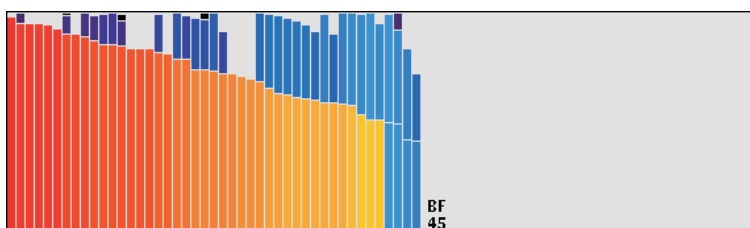
A best fit eredménye:



A worst fit eredménye:



És végül a rendezés utáni best fit adta pakolás:





## A LEGRÖVIDEBB ÚT PROBLÉMA

A *legrövidebb út feladata* hálózati problémák közé tartozik. Ezekben egy *irányított gráffal* megadott lehetőségek közül az ezekhez köthető optimális folyamatokat akarjuk meghatározni. A hálózati feladatokkal kapcsolatban mindig feltesszük, hogy a hálózat minden élének van hossza. Egy *gráfot*, vagy *hálózatot* két halmazzal adhatunk meg. Az első a *csúcsokat*, a másik az ezekből álló párokat, az *irányított éleket* határozza meg. Egy adott hálózatban megjelölhetünk *kezdőpontot* és *végpontot* is.

*Láncnak* nevezzük éleknek egy olyan sorozatát, amelyben az egymást követő bármely két élnek egy közös csúcsa van.

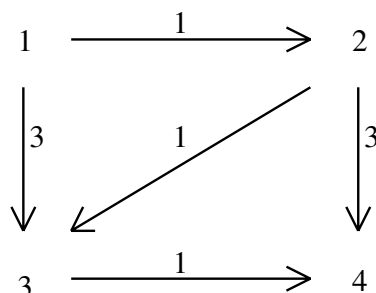
Az *út* egy olyan lánc, amelyben az utolsó él kivételével mindegyik él végpontja a sorozatban következő él kezdőpontja. Az  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  és  $(4,3)$  élek láncot adnak, de az nem út. Út és lánc viszont az  $(1,2)$ ,  $(2,3)$  és  $(3,4)$  élek sorozata.

A legrövidebb út problémája egy hálózatban egy adott csúcsból kiindulva a többi csúcsba vezető legrövidebb út meghatározását jelenti. Ennek megoldására alkalmas *Dijkstra algoritmus*a amennyiben minden él hossza nemnegatív:

- Lássuk el az első csúcsot az állandó 0 címkével.
- Minden olyan  $i$  csúcsot lássunk el ideiglenesen az  $(1, i)$  él hosszával mint címkével, amelyhez vezet él az 1 csúcsból. Minden más csúcs (az első kivételével) kapja ideiglenesen a  $\infty$  címkét. A legkisebb ideiglenes címkéhez tartozó egyik csúcs címkéjét állandónak minősítjük.
- Tegyük fel, hogy az  $i$  volt az utolsó, a  $(k + 1)$ . csúcs, amely állandó címkét kapott. Akkor  $i$  a  $k$ -edik legközelebbi csúcs az elsőhöz. Az ideiglenes címkével rendelkező  $j$  csúcsok címkéit módosítsuk az  $(i$  címkéje + az  $(i, j)$  távolsága) értékre, ha ez kisebb, mint  $j$  eddigi ideiglenes címkéje. Ezután ismét adjunk végleges címkét egy olyan csúcsnak, amelynek címkéje a maradék ideiglenes címkék legkisebbike.
- Folytassuk az eljárást amíg minden csúcs állandó címkét nem kap.
- Ha minden csúcsnak végleges címkéje van, akkor az 1. csúcsból egy  $j$  csúcsba vezető legrövidebb utat úgy kapjuk, hogy a  $j$  csúcsból visszafelé haladva olyan csúcsokon keresztül jutunk el az 1. csúcsba, amelyektől a rákövetkezőbe vezető él hossza épp a két címke különbsége.

## PÉLDA DIJKSTRA ALGORITMUSÁRA

Tekintsük azt az egyszerű legrövidebb út feladatot, amelyben négy városunk van: 1, 2, 3 és 4, és a köztük levő távolságot a következő ábra adja:



Ez kb. egy olyan elhelyezésnek felel meg, amikor a városok egy álló téglalap csúcsaiban vannak, de az 1 - 4 átló nem járható.

A Dijkstra algoritmus első lépése az 1. városból indulva a következő címkézést adja:

$$[0^*, \infty, \infty, \infty],$$

ahol a \* azt jelzi, hogy az illető címke végleges.

A következő lépésben meghatározzuk az első várostól mért távolságok alapján annak szomszédainak ideiglenes címkéjét:

$$[0^*, 1, 3, \infty].$$

Az új, ideiglenes címkék közül véglegesítjük a legkisebbet:

$$[0^*, 1^*, 3, \infty].$$

Képezzük most a végleges címkéjű városoktól mért távolságok alapján az új, javított címkéket:

$$[0^*, 1^*, 2, 4].$$

Itt a harmadik címke kettes értéke úgy adódott, hogy a kettes város végleges címkéje + a második és a harmadik város távolsága kisebb mint a korábbi ideiglenes címke értéke, a három. Kössük le ismét az ideiglenes címkék közül a legkisebbet:

$$[0^*, 1^*, 2^*, 4].$$

Az utolsó ideiglenes címkét ismét lehet javítani, és az ezután már végleges is lesz:

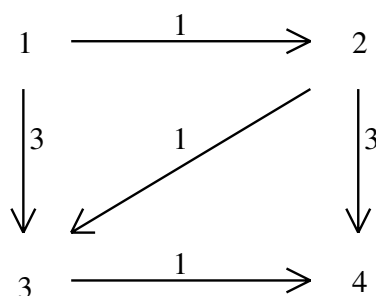
$$[0^*, 1^*, 2^*, 3^*].$$

Ebből az első és negyedik város közti legrövidebb út 3 hosszú: 1 - 2 - 3 - 4.

## A MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMA

Egyes döntési helyzetekben olyan hálózatot kell vizsgálni, amelyben az éleknek kapacitások feleltethetők meg. A kérdés az, hogy az egyik kitüntetett csúcsból, a forrásból egy másikba, a nyelőbe mi a maximális eljuttatható mennyiség a hálózat és a kapacitások figyelembevételével. Ezt a feladatot nevezik a *maximális folyam problémának*.

Tekintsük a korábbi hálózatot úgy, hogy az élekre írt számok a kapacitásokat jelentik, az egyes csúcs a *forrás* és a négyes a *nyelő*:



A későbbi eljárás kedvéért vezessünk be egy *mesterséges élet* a nyelőtől a forrásig. A feladat lineáris programozási feladatként való megfogalmazásához jelölje az  $x_{ij}$  változó az  $(i, j)$  élen áthaladó anyagmennyiséget.

Egy lehetséges folyamot kapunk például a következő változó értékekkel:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{23} = 0, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1.$$

Az ehhez tartozó teljes átfolyó mennyiség 2. A lehetséges folyamoknak eleget kell tenniük a következő két feltételnek:

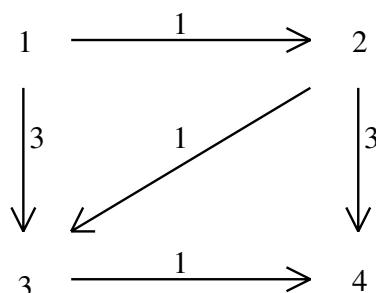
1. minden élre az élen átmenő folyam nemnegatív és nem nagyobb, mint a megadott *élkapacitás*, és

2. minden csúcsra igaz az, hogy a *bejövő folyam* mennyisége megegyezik a *ki-menő folyam*ével.

Az utóbbi feltételt *folyammegőrzési feltétel*nek nevezzük. A probléma lineáris programozási feladatként való megfogalmazásában a fenti feltételek mellett az  $x_0$  célfüggvényt kell maximalizálni, ahol  $x_0$  a nyelőből a forrásba vezető mesterséges élen átmenő folyam mértéke.

## A MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMA II.

Az említett



példára vonatkozó lineáris programozási feladat ez alapján:

$$\max x_0 = x_{24} + x_{34},$$

feltéve, hogy

$$x_{12} \leq 1,$$

$$x_{23} \leq 1,$$

$$x_{13} \leq 3,$$

$$x_{24} \leq 3,$$

$$x_{34} \leq 1,$$

$$x_0 = x_{24} + x_{34},$$

$$x_{13} + x_{23} = x_{34},$$

$$x_{12} = x_{23} + x_{24},$$

$$x_0 = x_{12} + x_{13}.$$

Ez egy hatváltozós lineáris programozási feladat 4 egyenlőség és 5 egyenlőtlenség feltétellel. Az ábráról könnyen leolvasható, hogy a korábban említett

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{23} = 0, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1$$

lehetséges megoldás egyben optimális is. Ez azon múlik, hogy a 4. csúcsba 2-nél nagyobb folyam nem folyhat be (figyelembe véve a 2. csúcsba bemenő folyamat).

Állapítsuk meg, hogy lehetséges megoldást könnyű megadni a maximális folyam problémához: ha minden élen nulla mennyiséget szállítunk, az megfelel a feltételeknek.

Jelöljük  $I$ -vel azon élek halmazát, amelyeken kisebb a jelenleg átmenő folyam az él kapacitásánál. Jelölje  $R$  azon élek halmazát, amelyeken a jelenlegi folyam pozitív, ez csökkenthető. Legyenek  $i(x, y)$ , illetve  $r(x, y)$  a megfelelő változtatási korlátok.

## FORD-FULKERSON ELJÁRÁS A MAXIMÁLIS FOLYAM MEGHATÁROZÁSÁRA

Tekintsük először a címkézési eljárást:

1. lépés. Címkézzük meg a forrást.
2. lépés. Címkézzük meg a csúcsokat és az éleket a forrásba vezető mesterséges él kivételével a következő szabályok szerint.

Ha az  $x$  csúcs már kapott címkét, de az  $y$  még nem, és  $(x, y) \in I$ , akkor címkézzük meg az  $y$  csúcsot és az  $(x, y)$  élt. Ekkor az  $(x, y)$  élt *előremenő* élnek hívjuk.

Ha az  $x$  csúcs már kapott címkét, de az  $y$  csúcs még nem, és  $(y, x) \in R$ , akkor címkézzük meg az  $y$  csúcsot és az  $(y, x)$  élt. Az utóbbit *hátramenő* élnek nevezzük.

3. lépés. Folytassuk a címkézési eljárást, amíg a nyelő címkét nem kap, vagy már nem lehet további csúcsokat címkével ellátni.

Ha a címkézéssel elérjük a nyelőt, akkor lesz a forrás és a nyelő között egy címkézett élekből álló lánc. Jelölje ezt  $C$ . A  $C$ -beli éleken átmenő folyam alkalmas módosításával egyrészt megőrizhetjük a folyam lehetségeségét, másrészt növelhetjük a folyamot.

A Ford-Fulkerson módszer a fentiek alapján:

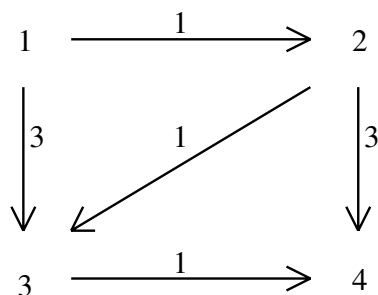
1. lépés. Keressünk egy lehetséges folyamot (a minden élen 0 értékű folyam mindig lehetséges).
2. lépés. A címkézési eljárással kísérreljük meg elérni a nyelőt. Ha nem lehet a nyelőt így megcímkézni, akkor az aktuális lehetséges folyam maximális. Ha elértük a nyelőt, akkor folytassuk az eljárást a 3. lépésnél.
3. lépés. Határozzunk meg egy magasabb értékű lehetséges folyamot úgy, hogy a megcímkézett láncon az előremutató élek értékeit növeljük, a hátramutatókét pedig csökkentjük a

$$k = \min \left\{ \min_{(x,y) \in C \cap R} r(x, y), \min_{(x,y) \in C \cap I} i(x, y) \right\}$$

értékkel. Folytassuk az algoritmust a 2. lépéssel.

## PÉLDA A FORD-FULKERSON ELJÁRÁS VÉGREHAJTÁSÁRA

Tekintsük ismét a



maximális folyam feladatot.

Az első lépés egy lehetséges folyam meghatározása. Legyen ez az, amelyik minden élhez a nulla folyamot rendeli hozzá.

Ezután kezdünk egy címkézési eljárást. Először a forrás, az 1. csúcs kap címkét, majd ez alapján egy olyan él, ami ebből kivezet. Most ez esetben címkét kap a 2. csúcs, és az  $(1, 2)$  él. Ezt folytatva a nyelőig tartó címkézett láncot (most utat) kapunk:

$$1 - 2 - 3 - 4.$$

Az előző lánc csak előremenő éleket tartalmaz. A lehetséges folyambővítési lehetőségek rendre:

$$i(1, 2) = 1, \quad i(2, 3) = 1 \quad \text{és} \quad i(3, 4) = 1.$$

Ez alapján az eddigi folyam a címkézett láncunk mentén 1-el növelhető. Ez alapján az ehhez tartozó lehetséges folyam értéke 1.

A lehetséges folyam javítása során azokat az éleket kell vizsgálni a címkézés során, amelyek kapacitását még nem merítettük ki. Ezek alapján már csak egy címkézhető láncot lehet képezni, amely eléri a nyelőt, ez az

$$1 - 3 - 2 - 4.$$

Ezen belül a  $3 - 2$  él hátramutató, ennek értékét legfeljebb 1-el lehet csökkenteni. Az eddigi lehetséges folyam ismét 1-el növelhető. Ezután a lehetséges folyam:

$$x_{12} = 1, \quad x_{13} = 1, \quad x_{24} = 1, \quad \text{és} \quad x_{34} = 1.$$

Ennek a lehetséges folyamnak az értéke 2. Ezután látható, hogy további címkézett láncot már nem lehet képezni, tehát az előző lehetséges folyam egyben maximális is.

## A MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMA ELMÉLETE

Legyen  $V'$  egy hálózat csúcsainak tetszőleges olyan halmaza, amely tartalmazza a nyelőt, de nem tartalmazza a forrást. Ekkor a hálózat olyan  $(i,j)$  éleinek halmazát, amelyek  $i$  kezdőcsúcsa nem  $V'$ -beli, a  $j$  végpont viszont  $V'$ -beli, a hálózat egy vágásának nevezzük. A vágás tehát élek egy olyan halmaza, amelyeket ha elhagyunk a hálózatból, akkor a forrásból a nyelő a továbbiakban már nem lesz elérhető.

A vágás kapacitása a vágást alkotó élekből a forrástól a nyelő felé vezetők kapacitásainak összege. A következő két segédétel adja meg a vágások és a maximális folyamok közti összefüggést.

SEGÉDTÉTEL. A forrásból a nyelőbe vezető folyamok erősségét bármelyik vágás kapacitása felülről korlátozza.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük egy hálózat valamely  $V'$  vágását. A hálózat többi csúcsának halmaza legyen  $V$ . Válasszunk egy tetszőleges folyamot, legyen ennek értéke  $f$ , az  $(i,j)$  élen áthaladó mennyiséget pedig  $x_{ij}$ . Összegezzük a  $V$ -beli összes csúcsra a folyammegőrzési feltételeket. Ez azt adja, hogy mivel kiesnek az olyan élekre vonatkozó tagok, amelyek mindkét végpontja  $V$ -ben van, ezért

$$\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij} - \sum_{i \in V', j \in V} x_{ij} = f.$$

Az ebben az egyenletben szereplő első összeg egyenlő a  $V'$ -nek megfelelő vágás kapacitásával. Mivel minden  $x_{ij}$  érték nemnegatív, így a második összeg is nemnegatív. Ebből adódik a segédétel állítása: a folyamok értéke legfeljebb annyi lehet mint a vágásoké.  $\square$

A segédteletből az is következik, hogy bármely vágás értéke felső korlátja a forrásból a nyelőbe áramló maximális folyam értékének. Tehát ha találunk egy olyan lehetséges folyamot, amelynek értéke egyenlő egy vágás kapacitásával, akkor találtunk egy maximális folyamot. Ez egy fajta gyenge dualitást fejez ki.

## A MAXIMÁLIS FOLYAM PROBLÉMA ELMÉLETE II.

Tekintsük most azt az esetet, amikor egy adott lehetséges folyamra vonatkozóan a címkézési eljárás nem tudja elérni a nyelőt. Legyen ekkor a címkézetlen csúcsok halmaza által meghatározott a vizsgált vágás.

**SEGÉDTÉTEL.** Ha a címkézési eljárás nem tudja elérni a nyelőt, akkor a kimaradó, nem címkézett csúcsok által meghatározott vágás kapacitása megegyezik az aktuális folyam erősségével.

**BIZONYÍTÁS.** Legyen a korábbi jelöléseknek megfelelően  $V$  az aktuális folyam mellett megcímkézett csúcsok halmaza, és  $V'$  pedig a címkézetleneké. Tekintsünk egy  $(i, j)$  élet a vágásból, úgy, hogy  $i \in V$  és  $j \in V'$ . Ekkor az  $x_{ij}$  értéknek egyenlőnek kell lennie az  $(i, j)$  él kapacitásával, hiszen különben tovább tudtunk volna haladni egy megfelelő előremenő éllel, és akkor  $j$  nem a  $V'$ -be tartozna.

Tekintsünk ezután egy olyan  $(i, j)$  élt, amelyre  $i \in V'$  és  $j \in V$ . Ekkor viszont  $x_{ij} = 0$  kell hogy teljesüljön, hiszen különben a címkézési eljárásban egy hátramenő éllel el tudtuk volna érni az  $i$  csúcsot, és így az nem tartozhatna a  $V'$  halmazba.

Az aktuális lehetséges folyamra tehát az teljesül az előző segédtételben igazolt

$$\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij} - \sum_{i \in V', j \in V} x_{ij} = f$$

egyenlet alapján, hogy a jelen vágás kapacitása egyenlő a  $\sum_{i \in V, j \in V'} x_{ij}$  összeggel, és az adott folyam erősségével.  $\square$

Az eddigi megállapítások szerint tehát amikor a nyelőt nem lehet megcímkézni a forrásból indulva, akkor az aktuális lehetséges folyam egy maximális folyam. Ez összhangban van a Ford-Fulkerson módszerrel.



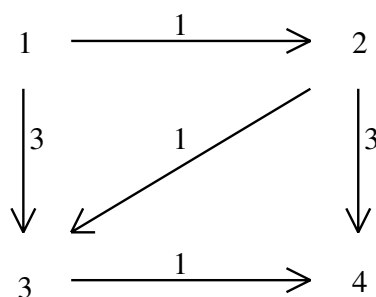
## PROJEKTEK ÜTEMEZÉSE, CPM, PERT

Az összetett munkafolyamatok rögzített befejezési időponttal való teljesítése gondos tervezőmunkát igényel. Ennek része az összefüggő események sorrendjének, időzítésének vizsgálata hálózati modellek segítségével.

Erre a célra két eljárást szokás használni. Ha az egyes munkafolyamatok végrehajtási ideje biztosan tudható, akkor a *kritikus út módszer* (Critical Path Method, CPM), míg ha a tevékenységek időtartama bizonytalan, akkor a *program kiértékelési és felülvizsgálati technika* (Program Evaluation and Review Technique, PERT) használatos. Mindkét eljárást az ötvenes években fejlesztették ki. Számos nagy és kritikus projekt tervezésekor használták ezeket a módszereket, pl. nagy szoftver rendszerek határidős kidolgozásánál, úrkutatási projektekben, vagy épp rakéta-indítások visszaszámlálási eljárásának kidolgozásában.

Mindkét eljáráshoz szükség van a projektet alkotó tevékenységek listájára. A projektet akkor tekintjük befejezettnek, ha minden részfeladata befejeződött. Minden tevékenységnek lehetnek *előzményei*, olyan munkafolyamatok, amelyeknek előbb be kell fejeződni ahhoz, hogy az adott tevékenység elkezdődhessen. A munkafolyamat lépéseinek ilyen összefüggését egy projekt-hálózattal adjuk meg.

A tevékenységeket a hálózat gráfjának irányított élei definiálják, a csúcsok pedig a tevékenységek csoportjainak befejezését jelzik. A csúcsokat emiatt *eseménynek* is nevezzük. Az ilyen projekt-hálózatot AOA (Activity On Arc) hálózatnak nevezzük. Ennek illusztrálásához tekintsük ismét a korábbi ábránkat:



Ezen most az 1. csúcs jelzi a projekt kezdetét, a 4. a *befejezés csúcs*. A 2. csúcs az egy hosszú első tevékenység végét, és a 3., illetve 4. csúcsokba vezető munkalépések kezdetét jelzi. Ha egy csúcsba több él is befut (mint pl. a 3. csúcsba), akkor ez azt jelenti, hogy mindkét korábbi tevékenységnek be kell fejeződni ahhoz, hogy az esemény utáni megkezdődhessen. Az előzmények nélküli tevékenységeket az első csúcsból kiinduló élekkel adjuk meg.

## PROJEKTEK ÜTEMEZÉSE, CPM, PERT II.

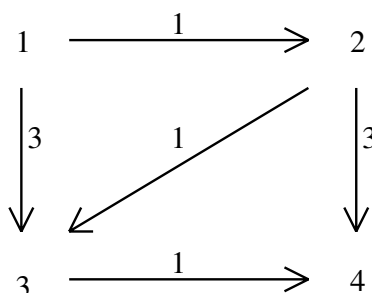
A projekt-hálózatot alakítsuk ki úgy, hogy egy tevékenység végét mutató csúcs sorszáma mindig nagyobb legyen, mint a kezdetét jelzőé. Ennek a szabálynak persze több reprezentáció is megfelel. További feltétel, hogy két adott csúcs között csak egy él mehet. Feltesszük még, hogy egy tevékenységet csak egy él reprezentálhat.

Az utóbbi két feltétel kielégítéséhez szükség lehet az ún. *fiktív tevékenységekre*. Például abban az esetben, amikor az *A* és *B* munkafolyamatok azonos feltétellel hajthatók végre, és mindkettő közvetlen előzménye a *C* tevékenységnek. Ilyen esetben a *B* lépést egy új csúcshoz köthetjük, ahonnan egy nulla időtartamú fiktív tevékenység új *D* éle adja a *C* munkafolyamat megkezdésének feltételét.

Tekintsük most a következő projekt feltételrendszert:

| Tevékenység                 | Előzmények | Időtartam (nap) |
|-----------------------------|------------|-----------------|
| A = anyagbeszerzés          | –          | 1               |
| B = alkalmazottak kiképzése | –          | 3               |
| C = segédanyag termelése    | A          | 1               |
| D = válogatás és csomagolás | A          | 3               |
| E = szakmunka               | B, C       | 1               |

Ennek a projektnek épp a korábbi irányított éleket tartalmazó gráfunk felel meg az egyes csúccsal mint a projekt kezdetével, és a négyes csúccsal mint befejezés csúccsal:



Vegyük észre, hogy bár csak a *B* és *C* tevékenységeket tüntettük fel, mint az *E* munkafázis előfeltételét, de a hálózat összefüggései miatt az *A* folyamatnak is be kell fejeződnie az *E* megkezdése előtt.

## CPM, A KORAI IDŐZÍTÉS MEGHATÁROZÁSA

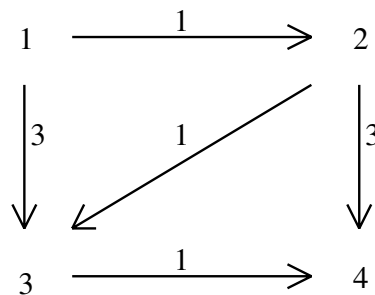
A CPM két kulcsfogalma az esemény *korai időzítése* (Early event Time,  $ET$ ), és a *kései időzítés* (Late event Time,  $LT$ ). Az  $i$  csúcs korai időzítése,  $ET(i)$  az a legkorábbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet. Ennek megfelelően az  $i$  csúcs kései időzítése,  $LT(i)$  az a legkésőbbi időpont, amikor a csúcshoz tartozó esemény bekövetkezhet anélkül, hogy a projekt előírt befejezési időpontját késleltetné. Meg lehet mutatni, hogy  $ET(i)$  a kezdőponttól az  $i$  csúcsba vezető leghosszabb út hossza.

A projekt korai időzítésének kiszámolását az egyes csúccsal kezdjük,  $ET(1) = 0$  adódik erre. Ebből kiindulva meghatározzuk a további  $ET(i)$  értékeket az élek adta összefüggéseknek megfelelően. Ha egy csúcsba több él is befut, akkor a csúcs korai időzítése az előző összes részfolyamat teljesülését feltételezi.

Ez alapján az  $ET(i)$  korai időzítés meghatározását a következő lépések adják:

1. lépés Keressük meg az  $i$  csúcsba befutó élek kezdő csúcspontjait. Ezek az események az  $i$  esemény *közvetlen előzményei*.
2. lépés Az  $i$  esemény minden közvetlen előzményének  $ET$  értékéhez adjuk hozzá az  $i$ -be vezető megfelelő élhez tartozó tevékenység időtartamát.
3. lépés  $ET(i)$  egyenlő az előző lépésben számított összegek maximumával.

PÉLDA. Határozzuk meg a következő



projekt-hálózat korai időzítési értékeit! Definíció szerint  $ET(1) = 0$ .

Az  $ET(2)$  érték közvetlenül az  $ET(1) + 1$  összegből adódik, mert a 2. csúcsba csak egy él fut be.

$$ET(3) = \max\{ET(1) + 3, ET(2) + 1\} = \max\{0 + 3, 1 + 1\} = \max\{3, 2\} = 3.$$

$$ET(4) = \max\{ET(2) + 3, ET(3) + 1\} = \max\{1 + 3, 3 + 1\} = \max\{4, 4\} = 4.$$

Ez alapján a teljes projekt befejezésének legkorábbi időpontja 4. □

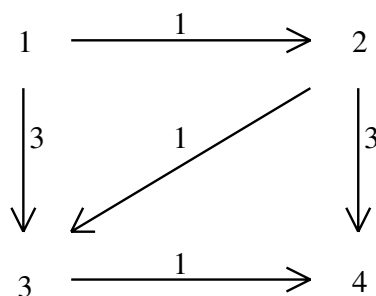
## CPM, A KÉSEI IDŐZÍTÉS MEGHATÁROZÁSA

A kései időzítés meghatározását visszafelé, az utolsó, a befejezési csúcsból kiindulva kezdjük. Ebben az eljárásban ha egy  $i$  csúcsot több esemény követ, az utóbbiakra korábban számított  $LT$  értékekből le kell vonni az  $i$  csúcsból ezekhez vezető él hosszát. Az így kapott időpontok közül a legkorábbira teljesülnie kell az  $i$  eseménynek, hiszen csak ebben az esetben tartható a kitűzött határidő a teljes projekt teljesítésére.

Általában a befejezési csúcs kései időzítésének olyan időpontot szokás választani, amely alatt az mindenképpen elérhető az egyes csúcsból. Amennyiben az  $LT(j)$  kései időzítési értékek mind ismertek a  $j > i$  indexekre, az  $LT(i)$  a következő eljárással számítható:

1. lépés Keressük meg azokat a csúcsokat, amelyekbe megy él az  $i$  csúcsból. Ezek az események az  $i$  esemény *közvetlen követői, utódai*.
2. lépés Az  $i$  esemény minden közvetlen utódának  $LT$  értékéből vonjuk le az  $i$ -ből az utódba vezető élhez tartozó tevékenység időtartamát.
3. lépés  $LT(i)$  egyenlő az előző lépésben számított értékek minimumával.

**PÉLDA.** Határozzuk meg a kései időzítés értékeket a jól ismert irányított gráfunkra:



Legyen az  $LT(4)$  érték 4, hiszen ekkorra a projekt befejezhető. Innen  $LT(3) = 4 - 1 = 3$ , hiszen a 3. csúcsnak csak a 4. az utódja. Ezután  $LT(2) = \min\{LT(4) - 3, LT(3) - 1\} = \min\{4 - 3, 3 - 1\} = \min\{1, 2\} = 1$ . Hasonlóan  $LT(1) = \min\{LT(3) - 3, LT(2) - 1\} = \min\{3 - 3, 1 - 1\} = \min\{0, 0\} = 0$ . Eszerint legkésőbb 4 időegységgel kell a projektet kezdeni a tervezett teljes készültségi esemény előtt.  $\square$

Amennyiben egy  $i$  csúcsra  $ET(i) = LT(i)$ , akkor az illető csúcsban való minden késedelem a projekt határidejének lekésését jelenti. Esetünkben a  $(2, 4)$  él 2-re változtatása azt eredményezné, hogy a 2. esemény 1 egységgel később kezdődne a projekt befejezésének késedelmek nélkül: ekkor  $ET(2) = 1$ , és  $LT(2) = 2$ .

## CPM, A TŰRÉSHATÁR

A projekt tervezésekor fontos ismeret az, hogy az egyes tevékenységek mekkora késedelmre nem veszélyeztetni még a teljes projekt határidőre való befejezését. Egy tevékenység, illetve az ennek megfelelő  $(i, j)$  él *tűrészatára* az a  $TH(i, j)$  szám, amennyivel a tevékenység kezdete a legkorábbi lehetséges időponttól eltolódhat anélkül, hogy a projekt befejezése elkésne – a többi tevékenység pontos végrehajtását feltételezve.

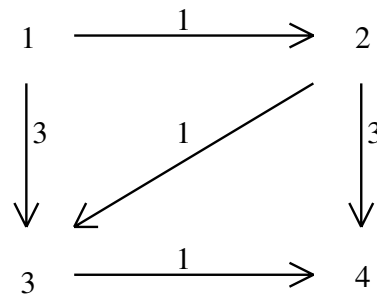
Legyen  $t_{ij}$  az  $(i, j)$  tevékenység hossza. Az  $(i, j)$  tevékenység késése mellett akkor tartható a projekt eredeti határideje, ha az  $i$ . esemény korai időzítése + az  $(i, j)$  tevékenység hossza + a  $k$  tűrésatár még mindig a  $j$ . esemény kései időzítésénél nem későbbi időpontot ad. Eszerint

$$ET(i) + t_{ij} + k \leq LT(j),$$

amiből a tűrésatárra

$$TH(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

adódik.



A példánkra adódó tűrésatárok:

$$TH(1, 2) = LT(2) - ET(1) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0,$$

$$TH(1, 3) = LT(3) - ET(1) - 3 = 3 - 0 - 3 = 0,$$

$$TH(2, 3) = LT(3) - ET(2) - 1 = 3 - 1 - 1 = 1,$$

$$TH(2, 4) = LT(4) - ET(2) - 3 = 4 - 1 - 3 = 0,$$

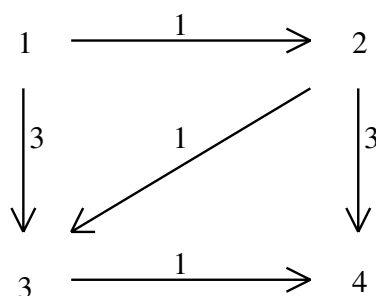
$$TH(3, 4) = LT(4) - ET(3) - 1 = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Ennek megfelelően csak a  $(2, 3)$  tevékenység halasztható (egy egységgel) anélkül hogy ez a teljes projekt csúszását okozná.

## CPM, A KRITIKUS ÚT, MOZGÁSHATÁR

A nulla tűréshatárú tevékenységek bármilyen elhúzódaása késlelteti a projekt befejezését. Ezért az ilyen éleket *kritikus tevékenység*nek nevezzük. A csak kritikus tevékenységekből álló, a kezdés csúcsból a befejezés csúcsba vezető utat *kritikus útnak* hívjuk.

A vizsgált példánkon az (1, 2) és (2, 4) tevékenységek például egy kritikus utat adnak meg, mert ezekre a tűréshatár nulla volt.



Természetesen egy projekt gráfjában több kritikus út is lehet. A tevékenységek flexibilitásának a tűréshatár mellett további mérőszáma a *mozgáshatár*:

Egy tevékenység, illetve az ezt reprezentáló  $(i, j)$  él mozgáshatára az az időtartam, amennyivel a tevékenység kezdete (vagy hossza) elhúzódnak anélkül, hogy ezzel bármely későbbi tevékenység kezdési időpontja a korábbi kezdési időpontjánál későbbre tolódna. A jelölése  $MH(i, j)$ .

A mozgáshatár meghatározását a tűréshatárhoz hasonlóan tehetjük meg: tegyük fel, hogy az  $i$ . esemény bekövetkezése, illetve az  $(i, j)$  tevékenység hossza  $k$  időegységnyit tolódik. Ebben az esetben a  $j$  esemény akkor nem csúszik az  $(i, j)$  tevékenység miatt, ha

$$ET(i) + t_{ij} + k \leq ET(j).$$

Ebből a mozgáshatár definíciója:

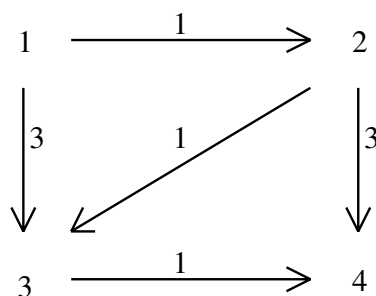
$$MH(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}.$$

Mivel a példánkra az  $ET(i)$  értékek megegyeznek a megfelelő  $LT(i)$  értékekkel, ezért a mozgáshatárok is megegyeznek a korábbi tűréshatárokkal.

## CPM, A KRITIKUS ÚT MEGHATÁROZÁSA

A kritikus út meghatározásának egyik lehetséges módja az ismertetett módszer a tűréshatár értékek kiszámításával, majd ezek ismeretében a nulla tűréshatárú élekből álló út megkeresése a kezdés csúcsból a befejezés csúcsig.

Emellett a kritikus út meghatározására lineáris programozási feladatot is fel lehet írni, amely tükrözi az eredeti probléma sajátosságait. Tekintsük példafeladatunkat ismét:



Jelölje  $x_i$  az  $i$ . esemény bekövetkeztének időpontját. Minden  $(i, j)$  tevékenységre érvényes, hogy a  $j$  esemény előtt be kell következnie az  $i$ -nek, és az  $(i, j)$  tevékenységnek is be kell fejeződnie. A kritikus út meghatározása a  $z = x_F - x_1$  függvény minimalizálását jelenti, ahol  $F$  a befejezés csúcs. A példánkra adódó lineáris programozási feladat innen:

$$\min z = x_4 - x_1,$$

feltéve, hogy

$$x_2 \geq x_1 + 1,$$

$$x_3 \geq x_1 + 3,$$

$$x_3 \geq x_2 + 1,$$

$$x_4 \geq x_2 + 3,$$

$$x_4 \geq x_3 + 1.$$

A változókra érdemes nemnegativitási feltételt alkalmazni, sőt,  $x_1 = 0$  természetes választás lehet. Az utóbbi feltételek nélkül az Excel a -2, -1, 1, 2 értékeket adta, és a kritikus út hosszára 4-et kaptunk. Ha  $x_1$  értékét rögzítettük nullára, akkor az optimális megoldás megfelelően a 0, 1, 3, 4 értékekre módosult.

A kritikus út meghatározására felírt lineáris programozási feladatnak általában sok optimális megoldása van (főleg ha több tűréshatár pozitív).

## CPM, A PROJEKT LERÖVIDÍTÉSE

Reális és gyakori feladat az, hogy egy projekt-hálózat ismert kritikus út megoldását módosítani kell úgy, hogy a teljes projekt időtartamát kell csökkenteni minimális költséggel – feltételezve, hogy minden tevékenység hossza csökkenthető egy ismert költség fejében.

Módosítsuk a példánkat annyiban, hogy minden tevékenység hossza csökkenthető féllal a következő költségek megfizetése esetén: 1, 2, 3, 4, 5. Legyenek az új változók, amelyek az egyes tevékenységek lerövidítésének mértékét adják, rendre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  és  $E$ . A cél azt meghatározni, hogy hogyan kell ütemezni a projektet ahhoz, hogy az eredeti 4 hosszú végrehajtás 3.5-re módosuljon, és a tevékenységek gyorsításának összköltsége minimális legyen. Az ennek megfelelő lineáris programozási feladat:

$$\min z = 2A + 4B + 6C + 8D + 10E,$$

feltéve, hogy

$$A \leq 0.5, \quad B \leq 0.5, \quad C \leq 0.5, \quad D \leq 0.5, \quad E \leq 0.5,$$

$$x_2 \geq x_1 + 1 - A,$$

$$x_3 \geq x_1 + 3 - B,$$

$$x_3 \geq x_2 + 1 - C,$$

$$x_4 \geq x_2 + 3 - D,$$

$$x_4 \geq x_3 + 1 - E,$$

$$x_4 - x_1 \leq 3.5.$$

Itt  $x_1 = 0$ , és  $A, B, C, D, E$  nemnegatív. Az optimális megoldás

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 2.5, \quad x_4 = 3.5, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5, \quad C = D = E = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az (1, 2) és az (1, 3) tevékenységeket kell postamunkában végezni.



## PROGRAM KIÉRTÉKELÉS ÉS FELÜLVIZSGÁLAT, PERT

A CPM, a kritikus út módszere azt feltételezi, hogy a tevékenységek időtartama ismert. A projekt lerövidítési vizsgálat kivételével a munkafolyamatok hossza rögzített. Ezzel szemben a PERT megközelítés a tevékenységek időtartamában a bizonytalanság figyelembevételét is lehetővé teszi.

A PERT egy munkafolyamat időtartamáról három adatot vesz számításba:

- $a$  = a tevékenység legrövidebb lehetséges időtartama,
- $b$  = a tevékenység leghosszabb lehetséges időtartama, és
- $m$  = a tevékenység időtartama legvalószínűbb értéke.

Jelölje a  $T_{ij}$  valószínűségi változó az  $(i, j)$  munkafolyamat időtartamát. A PERT megközelítés felteszi, hogy ezek a valószínűségi változók béta eloszlásúak. Amennyiben a  $T_{ij}$  valószínűségi változó béta eloszlást követ, akkor várható értéke és szórásnégyzete (varianciája):

$$E(T_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6},$$

$$\text{var } T_{ij} = \frac{(b - a)^2}{36}.$$

A PERT feltételezi azt is, hogy a munkafolyamatok időtartamai egymástól független valószínűségi változók. Ebben az esetben a projekt-hálózat egy útjának időtartama mint valószínűségi változó

$$\sum_{(i,j) \in \text{út}} E(T_{ij}),$$

az út teljes idejének varianciája pedig

$$\sum_{(i,j) \in \text{út}} \text{var } T_{ij}.$$

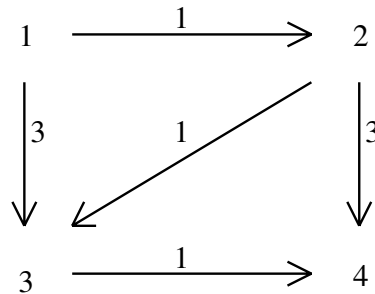
Jelölje most a  $CP$  valószínűségi változó a CPM által meghatározott kritikus út tevékenységeinek teljes időtartamát. A PERT feltételezi, hogy a kritikus útban elegendően sok tevékenység szerepel ahhoz, hogy alkalmazni lehessen a centrális határeloszlás tételt, és így megállapíthassuk, hogy a

$$CP = \sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} T_{ij}$$

valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlású.

## PROGRAM KIÉRTÉKELÉS ÉS FELÜLVIZSGÁLAT, PERT PÉLDA

Tekintsük ismét a korábbi projekt-hálózatunkat:



Ehhez most meg kell adni az egyes munkafolyamatok időtartamának eloszlás-paramétereit:

| Tevékenység | $a$ | $b$ | $m$ |
|-------------|-----|-----|-----|
| (1,2)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |
| (1,3)       | 2.0 | 4.0 | 3.0 |
| (2,3)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |
| (2,4)       | 2.0 | 4.0 | 3.0 |
| (3,4)       | 0.5 | 1.5 | 1.0 |

Vegyük észre, hogy a legvalószínűbb végrehajtási időknél minden élre a korábbi rögzített értékeket választottuk. Ezekkel a számokkal meghatározhatjuk az egyes tevékenységek várható időtartamát és varianciáját:

$$E(T_{12}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{12} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028,$$

$$E(T_{13}) = \frac{2 + 4 * 3 + 4}{6} = 3, \quad \text{var } T_{13} = \frac{(4 - 2)^2}{36} = \frac{4}{36} = 0.111,$$

$$E(T_{23}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{23} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028,$$

$$E(T_{24}) = \frac{2 + 4 * 3 + 4}{6} = 3, \quad \text{var } T_{24} = \frac{(4 - 2)^2}{36} = \frac{4}{36} = 0.111,$$

$$E(T_{34}) = \frac{0.5 + 4 * 1 + 1.5}{6} = 1, \quad \text{var } T_{34} = \frac{(1.5 - 0.5)^2}{36} = \frac{1}{36} = 0.028.$$

Vegyük észre, hogy paraméterezésünk mellett a kapott várható értékek megegyeznek a korábbi rögzített időtartamokkal. A fiktív élekre a várható érték és a variancia is nulla lenne.

## PROGRAM KIÉRTÉKELÉS ÉS FELÜLVIZSGÁLAT, PERT PÉLDA II.

Mivel a feltételezés szerint az egyes projekt szakaszok hosszai független valószínűségi változók, ezért a kritikus út teljes ideje várható értéke és annak szórásnégyzete a kritikus út szakaszaira kapott értékek összege lesz. Tekintsük az (1,2) és (2,4) szakaszokból álló kritikus utat:

$$\sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} E(T_{ij}) = E(T_{1,2}) + E(T_{2,4}) = 1 + 3 = 4,$$

a teljes idő varianciája pedig

$$\sum_{(i,j) \in \text{kritikus út}} \text{var } T_{ij} = \text{var } T_{12} + \text{var } T_{24} = 0.028 + 0.111 = 0.139.$$

Ugyanezeket az értékeket kapjuk a másik, (1,3), (3,4) kritikus útra is. A varianciából a megfelelő szórás  $\sqrt{0.139} = 0.373$ . Eszerint a kritikus utakon a várható értéktől való eltérés várható értéke ez a 0.373.

Feltételezve, hogy a teljes kritikus út megtételéhez szükséges idő normális eloszlású (ez példánkra aligha teljesülhet), meghatározhatjuk annak a valószínűségét, hogy a teljes projekt befejeződik adott idő, mondjuk 5 nap alatt.

Ez a valószínűség  $P(CP \leq 5)$ . Standardizáljuk a normális eloszlású valószínűségi változónkat:

$$P(CP \leq 5) = P\left(\frac{CP - 4}{0.373} \leq \frac{5 - 4}{0.373}\right) = P(Z \leq 2.681) = 0.996.$$

Itt az  $F(2.681) = 0.996$  értéket a standard normális eloszlás táblázatából olvastuk ki<sup>11</sup>. Itt  $F(x)$  a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A PERT szerint tehát a megadott feltevések mellett annak a valószínűsége, hogy a teljes projekt 5 nap alatt befejeződik, 99.6%.

<sup>11</sup>Elérhető a jegyzet függelékében is, de az interneten is pl. a „normal distribution table” szavakra keresve.

## PROGRAM KIÉRTÉKELÉS ÉS FELÜLVIZSGÁLAT, PERT PÉLDA III.

A standard normális eloszlás megfelelő értékét a táblázat használata helyett megtudhatjuk:

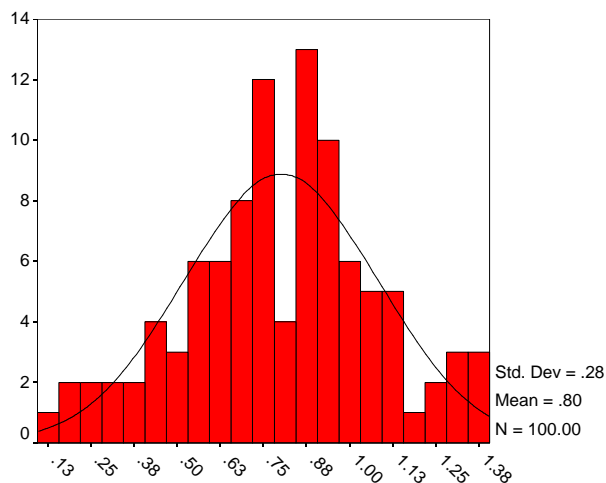
- az Excel `NORM.ELOSZL` függvényét használva,
- az SPSS nevű statisztikai program `CDF.NORMAL(2.681, 0, 1)` utasításával,
- a Matlab `0.5*erfc(-2.681/1.414)` parancsával (ehelyett persze a Matlab statisztikai csomagja `normcdf` utasítása a jobb megoldás – már ha az elérhető),
- a Maple pedig a `stats[statevalf, cdf, normald](2.681)`; utasítással adja a kért valószínűségi értéket.

A PERT alkalmazása során tett feltevések nehezen teljesíthetők.

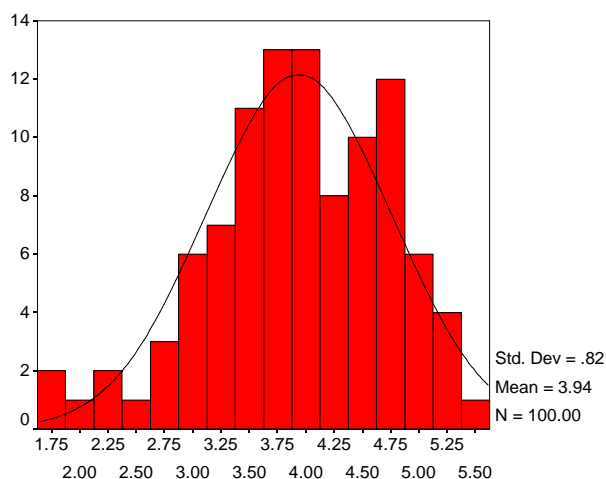
- Így nem könnyű igazolni, hogy az egyes tevékenységek időtartamai egymástól függetlenek.
- Sokszor a munkafolyamatok ideje nem béta eloszlást követ.
- A centrális határeloszlás tétel feltételei teljesüléséhez lehet, hogy nincs elegendő tevékenység a vizsgált útban.
- Gyakran előfordul, hogy a várható időtartamokra alkalmazott CPM eljárás eredménye nem marad kritikus út a véletlen események hatására.

Az utolsó probléma megoldására alkalmazhatunk Monte Carlo szimulációt annak meghatározására, hogy az egyes tevékenységek milyen valószínűséggel kritikusak, illetve hogy mennyi lehet a teljes projekt teljesülése idejének várható értéke és szórása.

## BÉTA ELOSZLÁSÚ VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÖSSZEGE



KETTO



TIZ

Itt az első ábra mutatja két béta eloszlással generált (RV.BETA(2,3)) véletlen szám összegének eloszlását az SPSS nevű program hisztogram rajzoló utasítása eredményeként. Be van rajzolva az illeszkedő normális eloszlás sűrűségfüggvénye is. A következő ábra tíz béta eloszlású véletlen szám összegének eloszlását mutatja. Mindkét megjelenített eloszlás eltér a normálistól.

## SZTOCHASZTIKUS KÉSZLETMODELLEK, AZ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA

Számos közgazdasági probléma fogalmazható meg, vagy vezethető vissza arra a feladatra, amikor azt szeretnénk meghatározni, hogy mekkora raktárkészletet tartsunk fenn, illetve rendeljünk meg, ha mind a raktáron tartásnak, mind a túl kicsi készletnek ismert költsége van. A döntéshozó célja nyilván a lehetséges legnagyobb nyereség elérése, illetve a költségei minimalizálása.

Az *újságárus problémának* azokat a feladatokat nevezzük amelyek elegettesznek a következő feltételeknek:

- Arról kell dönteni, hogy mennyi árut rendeljünk. Legyen ennek mennyisége  $q$ .
- A  $d$  egységnyi kereslet a beszerzett árura egy ismert,  $p(d)$  valószínűséggel fordulhat elő. Itt  $d$  nemnegatív szám, és a  $D$  valószínűségi változó reprezentálja a keresletet.
- A  $d$  és  $q$  értékekre vonatkozóan egy  $c(d, q)$  költség merül fel.

Egy újságárus valóban a fenti problémával szembesül. Ha az adott napi forgalmat alulbecsli, akkor egyes vevőket nem tud kiszolgálni, így lehetséges nyereségtől esik el. Másrészt ha túl sokat rendel, akkor annak a költségeit fizetnie kell, és az el nem adott példányok alapján nyilván nem jut nyereséghez. Ha a kereslet diszkrét valószínűségi változó, akkor a *diszkrét keresletű újságárus problémáról* van szó.

A költségfüggvény alakja arra az esetre, amikor a készlet nem kisebb, mint az igény ( $d \leq q$ ):

$$c(d, q) = c_o q + a,$$

ahol  $c_o$  az *egységnyi túlkészletezés* költségét. Itt tehát  $c_o$  az a pozitív költség, amivel számolni kell akkor, ha a már így is túlzott készletet még egy egységgel növeljük.  $a$  a  $q$ -tól nem függő tagokat jelzi. A később bemutatott eljárás miatt ennek részletezése nem szükséges.

Abban az esetben, amikor a megrendelt áru mennyisége kisebb, mint az igény ( $d \geq q + 1$ ), akkor a költségfüggvény:

$$c(d, q) = -c_u q + b,$$

ahol  $c_u$  a pozitív *egységnyi alulkészletezési költség*. Ez az az összeg, amivel a költségeinket csökkenteni tudjuk, ha egy egységgel több a készletünk. Itt  $b$  a  $q$ -tól nem függő tagokat jelzi.

## AZ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA II.

Az újságárus probléma elemzése során tekintsük most a költségfüggvény változását. Ha  $E(q)$  a költségfüggvény várható értéke abban az esetben, ha  $q$  egységnyi rendeltünk az áruból, akkor a feladat olyan  $q^*$  optimális rendelés meghatározása, amely minimalizálja  $E$  értékét.

Amennyiben az  $E(q)$  konvex függvény, akkor elegendő az  $E(q + 1) - E(q)$  értékeket meghatározni. Konvex függvény esetén ugyanis a feladatunk annak a legkisebb  $q$ -nak a megkeresésére egyszerűsödik, amelyre  $E(q + 1) - E(q)$  pozitív. Azt az eljárást, amely ez alapján az  $E(q + 1) - E(q)$  ismételt kiértékelésével határozza meg a keresett optimális megrendelést, *határelemzésnek* nevezik. Alkalmazásának feltétele, hogy a célfüggvény konvex legyen, és hogy az említett különbség könnyen számítható legyen.

Az  $E(q + 1) - E(q)$  különbség meghatározásához két esetet kell megvizsgálni:

1. Amikor  $d \leq q$ . Ekkor egy újabb egység megrendelése további túlkészletezést okoz. Ez  $c_o$ -al növeli a költséget. Ennek az esetnek a bekövetkezési valószínűsége  $P(D \leq q)$ , ahol  $D$  a kereslet valószínűségi változója.

2. A másik eset az, amikor  $d \geq q + 1$ . Ekkor egy további egység megrendelése csökkenti a hiányt, és így csökkenti a költséget is  $c_u$ -val. A második eset bekövetkeztének valószínűsége  $P(D \geq q + 1) = 1 - P(D \leq q)$ .

A fentiek alapján tehát az összes eset  $100 \cdot P(D \leq q)$  százalékában a  $q + 1$  egység megrendelése  $c_o$ -val kerül többbe, mint  $q$  egység rendelése, és az esetek  $100 \cdot (1 - P(D \leq q))$  százalékában a  $q + 1$  egységnyi készlet költsége  $c_u$ -val kevesebbe kerül, mint  $q$  egységnyié. Ezek alapján átlagosan a  $q + 1$  áruegység megrendelése

$$E(q + 1) - E(q) = c_o P(D \leq q) - c_u (1 - P(D \leq q)) = (c_o + c_u) P(D \leq q) - c_u$$

költséggel kerül többbe, mint a  $q$  egység rendelése. Mivel a  $P(D \leq q)$  valószínűség  $q$  növekedésével nő, ezért ha  $c_o + c_u$  nemnegatív (ez az esetek többségében reális feltételezés), akkor a fenti különbség monoton nőni fog, így teljesül a határelemzés feltétele.

## AZ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA, PÉLDA

Ha  $E(q + 1) - E(q) \geq 0$ , akkor  $(c_o + c_u)P(D \leq q) - c_u \geq 0$ -ból  $P(D \leq q) \geq c_u/(c_o + c_u)$  adódik. Ha  $F(q) = P(D \leq q)$  a kereslet eloszlásfüggvénye, akkor azt a minimális  $q$  értéket keressük, amire még teljesül

$$F(q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u}.$$

Tekintsük azt a feladatot, amikor egy jegyzet kiadásakor a nyomtatott példányszámról kell dönteni. A hallgatóság létszáma ismeretében a várható igényeket többé-kevésbé jól lehet becsülni. A kérdés nyilván az, hogy hány példányban készüljön a jegyzet ahhoz, hogy például a három éven belüli teljes költség minimális legyen.

A konkrét szám adatok legyenek a következők: az előállítási költség 900 Ft, az eladási ár 1500 Ft. A harmadik év végén a teljes maradék készlettel megszabadulunk féláron: eladjuk őket egy nagykereskedőnek (750 Ft). A három éven belül eladható példányok valószínűsége:

| eladott jegyzet | valószínűség |
|-----------------|--------------|
| 50              | 0.30         |
| 100             | 0.20         |
| 150             | 0.20         |
| 200             | 0.10         |
| 250             | 0.10         |
| 300             | 0.10         |

A jelölésünk kövesse a bevezetőt: legyen  $q$  a megrendelt jegyzetek száma,  $d$  pedig a három éven belül ténylegesen eladottak száma. Amennyiben az eladott példányok száma kevesebb, mint a megrendelteké ( $d < q$ ), akkor a teljes költség a következők szerint alakul:

| tevékenység                     | költség         |
|---------------------------------|-----------------|
| $q$ darab jegyzet vásárlása     | 900 $q$         |
| $d$ darab jegyzet eladása       | $-1500 d$       |
| $q - d$ jegyzet eladása féláron | $-750 (q - d)$  |
| teljes költség                  | $150 q - 750 d$ |

A további vizsgálatunk szempontjából ebből az a fontos, hogy a  $q$  egységnyi növelése 150 Ft-nyi költségnövekedést jelent (hiszen 900-ért állítják elő a jegyzetet, és a fölös példányoktól csak 750-ért tudunk megszabadulni).



## AZ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA, PÉLDA II.

Vegyük észre, hogy a jegyzet előállításának a példányszámtól nem függő költségei az optimális példányszámot nem befolyásolják, hiszen ezeket minden  $q$ -ra azonos módon kell megfizetni.

Amennyiben az igényelt példányok száma legalább annyi, mint a megrendeltéké ( $d \geq q$ ), akkor a teljes költség a következők szerint alakul (a negatív költséget nyereségként értelmezzük):

| tevékenység                 | költség   |
|-----------------------------|-----------|
| $q$ darab jegyzet vásárlása | $900 q$   |
| $q$ darab jegyzet eladása   | $-1500 q$ |
| teljes költség              | $-600 q$  |

Ebben az esetben a  $q$  egységnyi növelése a költségeket 600 forinttal csökkenti (a nyereséget 600 Ft-al növeli). Az eddigi költségelemzés alapján a túlkészletezési költség  $c_o = 150$ , az alulkészletezési költség pedig  $c_u = 600$ .

Alkalmazzuk most az optimális megrendelésre vonatkozó levezetett feltételt:

$$F(q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{600}{150 + 600} = \frac{600}{750} = 0.8.$$

A megadott valószínűségek alapján példánkban 200 darab jegyzet megrendelése az optimális, mert erre adódik először a kapott  $0.3+0.2+0.2+0.1 = 0.8$  eloszlásfüggvény érték.

A kapott eredmény illusztrálásaként határozzuk meg az egyes költség eltéréseket

$$E(q+1) - E(q) = (c_o + c_u)P(D \leq q) - c_u$$

alapján az egymásra következő eltérések rendre:

$$E(51) - E(50) = (150 + 600) \cdot 0.3 - 600 = 225 - 600 = -375,$$

$$E(101) - E(100) = 750 \cdot 0.5 - 600 = 375 - 600 = -225,$$

$$E(151) - E(150) = 750 \cdot 0.7 - 600 = 525 - 600 = -75,$$

$$E(201) - E(200) = 750 \cdot 0.8 - 600 = 600 - 600 = 0,$$

$$E(251) - E(250) = 750 \cdot 0.9 - 600 = 675 - 600 = 75,$$

$$E(301) - E(300) = 750 \cdot 1.0 - 600 = 750 - 600 = 150.$$

## AZ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA, FOLYTONOS KERESLET

Bizonyos értelemben az előző példában is feltételeztük a kereslet finomabb felbontását, mint az épp definiáltat. Mégis, az az eset külön tárgyalandó, amikor a  $D$  keresletet egy folytonos valószínűségi változóval reprezentáljuk. Az előző modellre használt határelemzési eljárást ennek megfelelően módosítani kell.

Eszerint a döntéshozó várható költségét az a  $q^*$  megrendelés minimalizálja várható értékben, ahol  $q^*$  az a legkisebb megrendelési érték, amelyre teljesül

$$P(D \leq q) = \frac{c_u}{c_o + c_u}.$$

A feltételben az egyenlőséget az tette lehetővé, hogy a kereslet most folytonos valószínűségi változó. Egyszerűen belátható, hogy a fenti feltétel ekvivalens az

$$P(D \geq q) = \frac{c_o}{c_o + c_u}$$

egyenlettel.

PÉLDA. A légitársaságok nemrég még bevett gyakorlatavolt, hogy a legnagyobb lehetséges nyereség elérése érdekében több jegyet adtak el, mint ahány utas az adott gépre felfér – arra számítva, hogy nem minden utas fog ténylegesen utazni, egyesek lemondják az utat különböző okok miatt. Vizsgáljuk meg az újságáros probléma modelljével, hogy egy adott esetben hogyan határozható meg az optimális *túlfoglalás*.

A Fokker F70 gép 79 utast tud szállítani. Tegyük fel, hogy egy járatra a jegy ára 40 eFt, a túlfoglalás miatt a gépről lemaradó utas kárpótlás és egy másik járat drágább ára miatt 20 eFt többletköltséget jelent (és visszatérítik a teljes jegyárát). A tapasztalatok szerint a jeggyel rendelkező, de meg nem jelent utasok száma közel normális eloszlást követ 10 várható értékkel és 3 szórással.

Legyen most  $q$  a légitársaság által az adott járatra eladott jegyek száma,  $d$  pedig a meg nem jelent utasok száma (ez eltér a korábban szokásos jelentéstől). Ekkor  $q - d$  lesz a ténylegesen utazásra jelentkezők száma. Ha  $q - d \leq 79$ , akkor mindenki utazhat, és ekkor a légitársaság költsége  $-40(q - d)$  (ezer Forintban). Ha  $(q - d) > 79$ , akkor 79 utas lesz a gépen (ennek költsége  $-79 \cdot 40$ ), és  $q - d - 79$  utas kap kárpótlást fejenként 20 eFt értékben. Ekkor tehát a légitársaság teljes költsége  $20(q - d - 79) - 40 \cdot 79 = 20q - 20d - 60 \cdot 79 = 20q - 20d - 4740$ .

## A FOLYTONOS KERESLETŰ ÚJSÁGÁRUS PROBLÉMA, PÉLDA

Amennyiben  $q = 79$  a döntési változónk, akkor egy folytonos keresletű újságáros problémát kell megoldani. A fenti adatok alapján  $c_u = 40$ , és  $c_o = 20$ . Az optimális döntés feltétele:

$$P(D \leq q - 79) = \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{40}{20 + 40} = \frac{2}{3}.$$

Standardizáljuk a  $D$  valószínűségi változónkat a 10 várható érték és a 3 szórás felhasználásával:

$$P\left(\frac{D - 10}{3} \leq \frac{q - 79 - 10}{3}\right) = 0.6.$$

Bevezetve a  $Z = (D - 10)/3$  standard normális eloszlású valószínűségi változót, optimalitási feltételnek azt kapjuk, hogy

$$P\left(Z \leq \frac{q - 79 - 10}{3}\right) = 0.6.$$

A standard normális eloszlás táblázatából megtudhatjuk, hogy  $P(Z \leq 0.43) = 0.6664$  (és a következő értékre, 0.44-re már 0.67 valószínűség adódik). Innen a közelítő optimális megoldás

$$0.43 = \frac{q - 79 - 10}{3},$$

azaz

$$q = (0.43 \cdot 3) + 89 = 90.29.$$

Eszerint a légitársaságnak az adott feltételek mellett a legelőnyösebb 90 vagy 91 jegyet eladnia a 79 tényleges férőhelyre. Természetesen ha az igény ennél kisebb, akkor annyi jegyet érdemes kiadni.  $\square$

## SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELLEK

Ahogy az újságárus probléma példáján is látszott, egy *sztochasztikus programozási probléma* szokás szerint egy alapul szolgáló *determinisztikus feladatra* épül. Miután kiderült, hogy valamely változó valójában egy valószínűségi változóval adható meg, egy újabb, *sztochasztikus optimalizálási modellt* fogalmazzunk meg.

A *modell* és *feladat* szavakat szinonimaként használhatjuk. Szigorúbb értelemben a modell adja meg a feladatra vonatkozó feltételezéseket, és határozza meg azokat a matematikai objektumokat, amik a rendszerünk paramétereinek megfelelnek. Ez alapján aztán felírhatjuk a konkrét megoldandó feladatot, majd az eredményt alkalmazhatjuk leírasi vagy működtetési céljainkra.

Abban az esetben, amikor a modellre vonatkozó döntést a véletlen esemény előtt kell meghozni, *statikus modellről* beszélünk. Ide tartozik az újságárus probléma is. Ezzel szemben *dinamikus modellnek* nevezünk olyan modelleket, amelyek olyan rendszerekre vonatkoznak, amelyek állapotaikat időben változtatják. Amennyiben a rendszer viselkedését nem befolyásolják véletlen folyamatok, akkor az *optimális vezérlést* a rendszer indulása előtt meg lehet határozni.

A *sztochasztikus dinamikus rendszer* esetén az optimális működtetéshez szükség van a valószínűségi változók aktuális értékeinek megfigyelésére, és a rendszer működésére való hatásuk megállapítására.

Az alapul vett determinisztikus feladatokra a következő két példa szolgál kiindulási pontként:

Meghatározandó olyan  $x$ , hogy

$$g_1(x, \xi) \geq 0, \quad g_2(x, \xi) \geq 0, \quad \dots, \quad g_r(x, \xi) \geq 0,$$

$$x \in D,$$

ahol  $D$  egy adott, nem véletlen halmaz, amit gyakran véges sok  $x$ -re vonatkozó egyenlőtlenség határoz meg. A  $\xi$  szimbólum olyan vektort jelöl, amelynek komponensei majd valószínűségi változók lesznek.

## SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELLEK II.

A második determinisztikus feladat egy szélsőérték keresés:

$$\min h(x, \xi)$$

feltéve, hogy

$$g_1(x, \xi) \geq 0, \quad g_2(x, \xi) \geq 0, \quad \dots, \quad g_r(x, \xi) \geq 0,$$

$$x \in D,$$

ahol  $D$  ismét egy adott, nem véletlen halmaz, amit gyakran véges sok  $x$ -re vonatkozó egyenlőtlenség határoz meg. A  $\xi$  szimbólum itt is olyan vektort jelöl, amelynek komponensei majd valószínűségi változók lesznek.

Ezeknek a feladatoknak fontos speciális esetei az alábbi problémák:

Meghatározandó olyan  $x$ , hogy

$$Tx \geq \xi, \quad (\text{vagy} \quad Tx = \xi),$$

$$Ax = b \quad \text{és} \quad x \geq 0,$$

illetve az, hogy

$$\min h(x, \xi)$$

feltéve, hogy

$$Ax = b \quad \text{és} \quad x \geq 0,$$

ahol esetleg nem csak  $\xi$ , de a  $T$  mátrixok egyes elemei is véletlen valószínűségi változók.

A legelső determinisztikus problémának felel meg például a következő *valószínűség maximalizálási feladat*:

$$\max P(g_1(x, \xi) \geq 0, \quad g_2(x, \xi) \geq 0, \quad \dots, \quad g_r(x, \xi) \geq 0),$$

úgy, hogy  $x \in D$ .

## KORLÁTOZÁS NÉLKÜLI NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

A korlátozás nélküli nemlineáris optimalizálási feladatok gyakorlati problémákban gyakran lépnek fel. Általános alakjuk

$$\min f(x),$$

ahol a célfüggvény kétszer folytonosan differenciálható ( $f \in C^2$ ),  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A megoldás egyik módszere az, hogy az eredeti nemlineáris függvényt a megoldáshoz tartó pontokban kvadratikus függvényekkel közelítjük, és a következő iterált a közelítésből kapott megoldás lesz.

A feladat megoldásához *helyi kereső eljárások*at szokás használni, amelyek az indulóponthoz tartozó *helyi minimumpont* megkeresésére vállalkoznak, általában monoton nem növekvő célfüggvényérték mellett.

Amennyiben a második derivált, a  $H_{ij}(x) = \partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_j$  képlettel adott Hesse mátrix ismeretes, akkor a leghatékonyabb a *Newton módszer*. Ez az *érintő-módszer* alapján működik, ami egydimenziós nemlineáris egyenletet old meg az  $x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$  iterációs képlettel. A többdimenziós optimalizálási feladatra ennek a következő formula felel meg:

$$x_{k+1} = x_k - H^{-1}(x_k) \nabla f(x_k),$$

ahol  $\nabla f(x_k)$  az  $f(x)$  függvény gradiense az  $x_k$  pontban.

A korszerű számítógépes megvalósításokban a megadottnál kisebb lépést szokás tenni. Az ilyen Newton módszerre bizonyos feltételek teljesülése esetén *kvadratikus konvergencia* érvényes, azaz egy megfelelő  $x^*$  helyi minimumpontra

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq C \|x^* - x_k\|^2$$

érvényes egy alkalmas pozitív  $C$  konstansra.

Gyakran a Hesse mátrix nem állítható elő egyszerűen, vagy pedig numerikus differenciálással jól közelíthető. Az erre az esetre módosított Newton módszernek *quasi-Newton eljárás* a neve. Erre kvadratikus konvergencia már nem érvényes, csak a *szuperlineáris konvergencia*, azaz teljesül

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^* - x_{k+1}\|}{\|x^* - x_k\|} = 0.$$

## GRADIENS MÓDSZER

Amennyiben csak a gradiensértékre lehet támaszkodni, akkor olyan eljárást is fel lehet építeni, amely az adott iterációs pontból a negatív gradiens irányában lép tovább:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k),$$

ahol  $\lambda$  a lépésköz. Az olyan módszereket, amelyek keresési iránya a negatív gradienssel pozitív belső szorzatot ad, *gradiens módszereknek* nevezzük.

A gradiens módszernek is vannak olyan változatai, amelyek nem igénylik a célfüggvény deriváltjának ismeretét, ennek megfelelő közelítését maga az eljárás állítja elő.

A gradiens módszer családjában általában csak lineáris konvergenciát mutat, de a konjugált gradiens módszerrel bizonyos feladatosztályon el lehet érni a szuperlineáris konvergenciát.

PÉLDA. Tekintsük az  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$  függvényt. Ennek a célfüggvénynek a minimuma az  $x_1 = 1, x_2 = 1$  pontban van, értéke 0. A gradiens

$$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1) + 2(x_1 + x_2 - 2), 2(x_1 + x_2 - 2))^T,$$

a Hesse mátrix és inverze pedig

$$H(x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad H(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján a Newton módszer adta iteráció az  $x_0 = (3, 3)^T$  pontból indulva:

$$x_1 = x_0 - H^{-1}(x_0) \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 4 \end{pmatrix}.$$

Innen

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ -6 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát ez alkalommal egy lépésben megkaptuk az  $(1, 1)^T$  optimális megoldást. Ez a jelenség a lényegében kvadratikus függvényekre fordulhat elő.

## GRADIENS MÓDSZER, PÉLDA

Tekintsük az előző példát, és oldjuk meg a gradiens módszerrel! Minimalizálandó tehát az  $f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 2)^2$  függvény. Ennek minimuma az  $x_1 = 1, x_2 = 1$  pontban van, értéke 0. A gradiens

$$\nabla f(x) = (2(x_1 - 1) + 2(x_1 + x_2 - 2), 2(x_1 + x_2 - 2))^T.$$

Vegyünk egy viszonylag kis lépésközt,  $\lambda = 0.1$ -et, és ismét az  $x_0 = (3, 3)^T$  indulópontot. Az iterációs sorozat első lépései ezzel az

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$$

képlet alapján:

$$x_1 = x_0 - \lambda \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.2 \end{pmatrix}.$$

A következő iterált pontok a Matlab

```
>> x = x - 0.1*[2*(x(1)-1)+2*(x(1)+x(2)-2); 2*(x(1)+x(2)-2)]
```

utasításával kiszámítva:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.24 \\ 1.80 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.984 \\ 1.592 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.8720 \\ 1.4768 \end{pmatrix}.$$

A következő néhány kiválasztott közelítő vektor:

$$x_{10} = \begin{pmatrix} 0.8359 \\ 1.2722 \end{pmatrix}, \quad x_{20} = \begin{pmatrix} 0.9245 \\ 1.1221 \end{pmatrix}, \quad x_{50} = \begin{pmatrix} 0.9930 \\ 1.0113 \end{pmatrix}, \quad x_{100} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 1.0002 \end{pmatrix}.$$

Az iterált vektorok lineáris konvergenciára utalnak.



## KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER

A *konjugált gradiens módszer* optimalizálásra és szimmetrikus pozitív definit mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására alkalmas. Pontos aritmetikával ugyan véges sok lépésben megtalálná a megoldást, de a kerekítési hibák miatt mégis iterációs eljárásnak kell tekinteni. Számos variánsa ismert.

Legyen  $A$  egy szimmetrikus, pozitív definit mátrix, akkor a

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b$$

kvadratikus függvénynek egyetlen  $x^*$  minimumpontja van, és erre  $Ax^* = b$  teljesül. Más szóval az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer megoldása ekvivalens a  $q(x)$  kvadratikus függvény minimumpontjának meghatározásával.

A többdimenziós optimalizálási eljárások rendszerint az

$$x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$$

alakban keresik az új közelítő megoldást, ahol  $s_k$  egy *keresési irány*, és  $\alpha$  a *lépésköz*. A kvadratikus függvények optimalizálása során a következő észrevételeket tehetjük:

- (i) A negatív gradiens (amelyik irányában a célfüggvény csökken) a *reziduális vektor*:  $-\nabla q(x) = b - Ax = r$ .
- (ii) Adott keresési irány mentén nem kell adaptív módon meghatározni a lépésközt (mint általános nemlineáris minimalizálás esetén kellene), mert az optimális  $\alpha$  közvetlenül megadható. A keresési irány mentén ott lesz a célfüggvény minimális, ahol az új reziduális vektor merőleges  $s_k$ -ra:

$$0 = \frac{d}{d\alpha} q(x_{k+1}) = \nabla q(x_{k+1})^T \frac{d}{d\alpha} x_{k+1} = (Ax_{k+1} - b)^T \left( \frac{d}{d\alpha} (x_k + \alpha s_k) \right) = -r_{k+1}^T s_k.$$

Az új reziduális vektort ki lehet fejezni a régivel és a keresési iránnyal:

$$r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = b - A(x_k + \alpha s_k) = (b - Ax_k) - \alpha A s_k = r_k - \alpha A s_k.$$

Balról beszorozva  $s_k^T$ -vel, és megoldva ezt az egyenletet  $\alpha$ -ra azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \frac{r_k^T s_k}{s_k^T A s_k}.$$

## KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER / 2

Ezzel megkaptuk a szimmetrikus, pozitív definit mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló konjugált gradiens módszert. Egy adott  $x_0$  indulópontra legyen  $s_0 = r_0 = b - Ax_0$ , és iteráljuk  $k = 1, 2, \dots$  értékekre az alábbi lépéseket, amíg a megállási feltételek nem teljesülnek:

1.  $\alpha_k = (r_k^T r_k) / (s_k^T A s_k)$  (a lépéshossz meghatározása)
2.  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$  (iterált közelítő megoldás)
3.  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A s_k$  (az új reziduális vektor)
4.  $\beta_{k+1} = (r_{k+1}^T r_{k+1}) / (r_k^T r_k)$  (segédváltozó)
5.  $s_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} s_k$  (az új keresési irány)

Vegyük észre, hogy az  $\alpha$  értékét most kicsit más formában határoztuk meg ( $r_k^T s_k$  helyett  $r_k^T r_k$  áll). Érvényes viszont, hogy

$$r_k^T s_k = r_k^T (r_k + \beta_k s_{k-1}) = r_k^T r_k + \beta_k r_k^T s_{k-1} = r_k^T r_k,$$

mivel az  $r_k$  reziduális vektor merőleges az  $s_{k-1}$  keresési irányra.

A korábbi gradiensmódszerek egyszerűen a negatív gradienst követték minden iterációs lépésben, de felismerték, hogy ez a meredek falú enyhén lejtő völgyszerű függvények esetén szükségtelenül sok iterációs lépést követelt a völgy két oldalán való oda-vissza mozgással. A kisebb meredekséggel rendelkező irányban viszont lényegesen gyorsabban lehetett volna haladni a megoldás felé. A konjugált gradiens módszer ezzel szemben a lépésenkénti megfelelő irányváltatással kiküszöböli ezt a hátrányt (innen a neve).

A megállási feltétel szokás szerint az, hogy a felhasználó előírja, hogy az utolsó néhány iterált közelítés eltérése és a lineáris egyenletrendszer két oldala különbsége normája ezekben a pontokban adott kis pozitív értékek alatt maradjanak.

A konjugált gradiens módszer nemlineáris optimalizálásra is alkalmas, ha minden iterációs lépésben az eredeti célfüggvény kvadratikus modelljére alkalmazzuk (az adott pontbeli függvényértékre, a gradiensre és a Hesse mátrixra vagy ezek közelítésére támaszkodva).

## A KONJUGÁLT GRADIENS MÓDSZER A MATLABBAN

A konjugált gradiens módszer egy egyszerű megvalósítása a Matlabban:

```
function x = kg(A,b,x);
s = b-A*x;
r = s;
for k=1:20
    a = (r'*r) / (s'*A*s);
    x = x+a*s;
    rr = r-a*A*s;
    s = rr+s*((rr'*rr) / (r'*r));
    r = rr
end
```

Az áttekinthetőség kedvéért a megállási feltételeket elhagytuk a programból, ezek akkor állították meg az iterációt, ha a keresési irány, vagy a reziduális vektor normája, illetve ha a megoldás utolsó két iteráltjának eltérése normája kisebb volt, mint 0.00001. A kiindulási adatok:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy a megoldás  $x^* = [1, 1]^T$ . A kapott eredmény két iteráció után:

```
r =
    1.0e-014 *
   -0.1554
   -0.0888
ans =
    1.0000
    1.0000
```

Tehát a lineáris egyenletrendszer bal- és jobb oldalának eltérése már a szám-ábrázolás határán volt, és az eredmény is nagyon közeli az elméleti megoldáshoz. Ez teljes összhangban van a módszer (pontos aritmetika használata esetén érvényes) véges számú lépésben való konvergenciájával, de látszik a kerekítési hibák hatása is.

## EGYENLETRENDSZEREK ITERÁCIÓS MÓDSZEREI / MATLAB

A lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló iterációs Matlab eljárásokat összegeztük az alábbi táblázatban:

| függvény | mátrix típus         | módszer                                  |
|----------|----------------------|--|
| bicg     | általános            | bikonjugált gradiens módszer             |
| bicgstab | általános            | stabilizált bikonjugált gradiens módszer |
| cgs      | általános            | négyzetes konjugált gradiens módszer     |
| gmres    | általános            | általánosított minimum-reziduál módszer  |
| minres   | Hermite-szimmetrikus | minimum-reziduál módszer                 |
| lsqr     | általános            | konjugált gradiens normális egyenletekre |
| pcg      | Herm. poz. def.      | prekondicionált konjugált gradiens       |
| qmr      | általános            | kvázi-minimál reziduál módszer           |
| symmlq   | Hermite-szimmetrikus | szimmetrikus LQ módszer                  |

Ezek a függvények (a gmres kivételével) azonos hívási formátumot használnak. A legegyszerűbb hívási mód az

$$x = \text{solver}(A, b),$$

ahol `solver` a táblázatban szereplő egyik eljárás neve. Ha a megállási feltételben a toleranciát módosítani szeretnénk, akkor a hívási forma

$$x = \text{solver}(A, b, \text{tol}),$$

ahol a `tol` érték az a szám, amellyel a  $\text{norm}(b - A \cdot x) \leq \text{tol} \cdot \text{norm}(b)$  feltétel teljesülését követeljük meg. A tolerancia alapbeállítása  $1e-6$ .

Egy adott  $n \times n$ -es  $A$  mátrix nemnulla elemei százalékos arányát a következő Matlab utasítás adja:

```
>> nnz(A) / n^2
```

## EGYENLETRENDSZEREK ITERÁCIÓS MÓDSZEREI / MATLAB / 2

A gyakrabban használatos, érdekes mátrixok, vektorok közvetlenül is elérhetők a Matlabban:

```
>> b = ones(n,1);
```

az egyesekből álló  $n$  hosszú oszlopvektort adja.

```
>> A = gallery('wathen',12,12); n = length(A)
```

```
n =
```

```
481
```

```
>> nnz(A)/n^2
```

```
ans =
```

```
0.0301
```

a  $481 \times 481$ -es Wathen mátrixot generálja, amelynek rögzített ritkasági szerkezete van véletlen elemekkel. A nemnulla elemek aránya kb. 3%. A prekondicionált konjugált gradiens módszer a következő eredményt adja a fentiekben definiált lineáris egyenletrendszerre.

```
>>x = pcg(A,b);
```

```
pcg stopped at iteration 20 without converging to the
desired tolerance 1e-006 because the maximum number of
iterations was reached.
```

```
The iterate returned has relative residual 0.063
```

Ez azt jelenti, hogy az előírt megállási feltétel nem teljesült még a reziduálra, több iteráció végrehajtását kell ehhez engedélyezni.

```
x = pcg(A,b,1e-6,100);
```

```
pcg converged at iteration 86 to a solution with relative
residual 8.8e-007
```

Nagyon tanulságos a 12 helyett nagyobb paraméterrel futtatni a fenti utasításokat. 40 esetén az  $n$  már közel 5000, a nem nulla mátrixelemek aránya 3 ezrelék. Erre a feladatra a pcg eljárás kb. 6 másodpercig futott,  $x = b \setminus A$  pedig hétszer tovább.

## EGYENLETRENDSZEREK ITERÁCIÓS MÓDSZEREI / MATLAB / 3

Az iteratív eljárások a hatékony működéshez általában prekondicionálást igényelnek, az eredeti

$$Ax = b$$

egyenlet helyett az  $M_1$  és  $M_2$  mátrixokkal, illetve az  $M = M_1M_2$  mátrixszal a következő egyenleteket fogják használni:

$$M_1^{-1}AM_2^{-1} \cdot M_2x = M_1^{-1}b,$$

vagy pedig

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b.$$

Az átalakítás célja az, hogy az eredménymátrix bizonyos értelemben közel legyen az egységmátrixhoz. A jó prekondicionáló mátrixok meghatározása nehéz feladat, és általában az adott alkalmazás ismeretét kívánja meg, amiből a lineáris egyenletrendszer származik.

Az általunk vizsgált  $A$  mátrixnak egy jó prekondicionálója az

$$M = \text{diag}(\text{diag}(A))$$

mátrix, az  $A$  mátrix főátlója elemeiből álló diagonális mátrix. Ezzel mint ötödik argumentummal felhívva a `pcg` eljárást, lényegesebben gyorsabban kapunk a megállási feltételnek megfelelő megoldást:

```
>> [x, flag, relres, iter] = pcg(A, b, 1e-6, 100, diag(diag(A)));
>> flag, relres, iter
flag =
    0
relres =
    9.0568e-007
iter =
    28
```

Vegyük észre, hogy amikor egynél több eredmény-argumentumot kérünk, akkor nem jönnek üzenetek. A `flag` nulla értéke azt mutatja, hogy a megoldás teljesíti az előírt megállási feltételt `iter` darab iterációs lépés után.

## AUTOMATIKUS DIFFERENCIÁLÁS / MOTIVÁCIÓ

A numerikus algoritmusok gyakran támaszkodnak valamely függvény deriváltjára. A következő eljárásokat szokás használni:

1. Az illető függvény "kézzel", papíron való deriválása, majd a megfelelő szubrutin megírása.
2. Numerikus deriválás: amikor a felhasználó vagy a számítógépes program maga ad egy numerikus közelítést (a differencia-hányadost) a derivált aktuális pontbeli értékére:  $f'(x) \approx (f(x+h) - f(x))/h$ . Ha lehet választani, akkor az algoritmusba beépített közelítést válasszuk!
3. A vizsgált függvény szimbolikus deriválása valamely számítógépes algebra rendszerben (DERIVE, REDUCE, MATHEMATICA, MAPLE, ...).
4. Az alább részletezendő automatikus differenciálás.

A numerikus derivált használatának előnye (+) és hátránya (-):

- + nincs előzetes munkaráfordítás a deriváltak "kézzel" történő előállítására,
- + emiatt javítani sem kell az azok programozása során elkövetett hibákat, és
- + akkor is működik, ha az illető függvény képletét nem ismerjük, csak a kiszámolására szolgáló szubrutin adott.
- a levágási hiba miatt sok értékes jegy veszik el. Ez a jelenség csak bonyolult, és nem is minden számítógépes környezetben rendelkezésre álló eszközökkel csökkenthető (változó méretű számábrázolás, racionális aritmetika stb.),
- a gyorsan változó deriváltak becslésére alkalmatlan.

A „kézzel” való deriválás és a megfelelő rutinok megadása előnye és hátránya:

- + a levágási hiba nem jelentkezik, a kiszámított deriváltértékek általában csak nagyon kis kerekítési hibával terheltek, és
- + a gyorsan változó deriváltértékek is jól meghatározhatók.
- a deriváltak képletének meghatározása munkaigényes, és a "kézzel" való előállítás esetén gyakran komoly hibaforrás, valamint
- csak a képlettel adott függvények deriváltja határozható meg ilyen módon, tehát a kizárólag algoritmussal adottakat általában nem lehet így deriválni.

## AUTOMATIKUS DIFFERENCIÁLÁS

A szimbolikus deriválási lehetőségek mellett (amelyek a képletet igénylik), olyan módszer is kellett, amely az előző módszerek előnyeit képes egyesíteni a hátrányok elhagyásával, tehát:

- + lényegében nem igényel előzetes ráfordítást a deriváltak "kézzel-" vagy akár számítógépes algebrarendszerrel, szimbolikus manipulációval való meghatározására,
- + emiatt nem is kell a megfelelő szubrutinokat programozni és javítani,
- + akkor is működik, ha csak az illető függvény kiszámolására szolgáló szubrutin adott, de a függvény képlete nem ismert,
- + a levágási hiba miatt nem vesznek el értékes jegyek,
- + a gyorsan változó deriváltak meghatározására is alkalmas, és
- + a deriváltak kiszámításának műveletigénye általában kisebb, mint a numerikus deriválásé, illetve az analitikus deriváltakat kiszámító szubrutinoké.

### A MÓDSZER:

Ha egy  $f(x)$  függvény képlettel megadható, illetve rendelkezésre áll az őt kiszámító szubrutin, akkor a következő eljárással egyszerűen lehet a derivált értékét (nem numerikus becsléssel) meghatározni.

1. A függvény minden változója és konstansa helyett használjunk olyan adatszerkezetet, amely két valós számból áll. Az első felel meg a korábbi változóértéknek, a második pedig egy deriváltértéknek.

2. Minden változóra ez a második valós legyen kezdetben egy. Minden, a függvény kiszámításához használt konstans új adatszerkezetében a második érték legyen nulla.

3. Ezután csak olyan szabályokra van szükség, amelyek minden műveletre megadják a megfelelő operációt az első tagon, és a deriválási szabályoknak megfelelő lépést a második tagon.



## AUTOMATIKUS DIFFERENCIÁLÁS / MŰVELETIGÉNY

Például, ha  $f(x) = g(x) * h(x)$ , akkor a szokásos programsor  $F = G * H$  lenne. Az automatikus differenciálás megfelelő művelete ezzel szemben

$$F(1) = G(1) * H(1),$$

és

$$F(2) = G(1) * H(2) + G(2) * H(1).$$

Szabályok néhány alpművelet és elemi függvény differenciálásához:

|            |           |         |        |            |           |           |            |
|------------|-----------|---------|--------|------------|-----------|-----------|------------|
| $y = f(x)$ | $a \pm x$ | $a * x$ | $a/x$  | $\sqrt{x}$ | $\log(x)$ | $\exp(x)$ | $\cos(x)$  |
| $f'(x)$    | $\pm 1$   | $a$     | $-y/x$ | $0.5/y$    | $1/x$     | $y$       | $-\sin(x)$ |

Vegyük észre, hogy a derivált értékének kiszámítása során se jelenik meg a deriváltfüggvény képlete. Az automatikus differenciálásnak két végrehajtási módja van:

1. a sima, egyszerű változat követi az alapfüggvény kiszámításának sorrendjét, az argumentumoktól halad a függvényérték felé,

2. a fordított módszer ezzel szemben először meghatározza a függvény kiszámítási fáját, majd ennek ismeretében, a redundanciák kihasználásával fordított sorrendben haladva határozza meg a függvény és deriváltja értékét.

A fordított algoritmus előnyének az az ára, hogy a tárigénye magasabb, és a sima algoritmus egymenetes végrehajtásával szemben két menetet igényel.

A fontosabb automatikus differenciálási feladatok művelet- és tárigénye:

| Feladat             | Algoritmus                    |  |
|---------------------|-------------------------------|--|
|                     | sima                          | fordított                                    |
| $L(f, \nabla f)$    | $\leq 4nL(f)$                 | $\leq 4L(f)$                                 |
| $L(f, \nabla f, H)$ | $\mathcal{O}(n^2L(f))$        | $\leq (10n + 4)L(f)$                         |
| $L(\mathbf{f}, J)$  | $\mathcal{O}(nL(\mathbf{f}))$ | $\leq (3m + 1)L(\mathbf{f})$                 |
| $S(f, \nabla f)$    | $\mathcal{O}(S(f))$           | $\mathcal{O}(S(f) + L(f))$                   |
| $S(f, \nabla f, H)$ | $\mathcal{O}(S(f))$           | $\mathcal{O}(S(f) + L(f))$                   |
| $S(\mathbf{f}, J)$  | $\mathcal{O}(S(\mathbf{f}))$  | $\mathcal{O}(S(\mathbf{f}) + L(\mathbf{f}))$ |

Magyarázat:  $f$ : egy  $n$ -változós függvény,  $\mathbf{f}$ :  $m$  darab  $n$ -változós függvény,  $\nabla f$ : az  $f$  gradiense,  $H$ : az  $f$  Hesse-mátrixa,  $J$ : az  $\mathbf{f}$  Jacobi-mátrixa,  $L(\cdot)$ : az argumentumok meghatározásának műveletigénye a  $\{+, -, *, /, \sqrt{\cdot}, \log, \exp, \sin, \cos\}$  alpműveletek felett, és  $S(\cdot)$ : az argumentumok meghatározásának tárigénye.

## AUTOMATIKUS DIFFERENCIÁLÁS / PÉLDA

Az automatikus differenciálás számítógépes megvalósítását könnyíti, hogy a sima változat ideálisan alkalmas objektum orientált környezetben operátor túltöltéssel való elegáns megoldásra. Számos professzionális megvalósítás született, pl. a PASCAL-XSC, C-XSC, ADOL-C, ADIFOR, JAKEF rendszerek. Megemlítenődő, hogy a legkorszerűbb jelenlegi megoldások több százezer soros programokkal megadott függvények differenciálását teszik lehetővé ezen a módon.

PÉLDA.

Határozzuk meg az  $f(x) = (x - 1)^2$  függvény deriváltját az  $x = 2$  pontban! A differenciálhányados-függvény  $f'(x) = 2(x - 1)$ , a keresett deriváltérték pedig 2.

A változónkhoz tartozó pár  $(2, 1)$ , a függvényben szereplő konstanshoz tartozó pedig  $(1, 0)$ . A zárójelen belüli kifejezés  $f(x)$  képletében a

$$(2, 1) - (1, 0) = (1, 1)$$

párt eredményezi. A négyzetreemelést szorzással értelmezve az

$$(1, 1) * (1, 1) = (1, 2)$$

párt kapjuk, amelyből kiolvasható, hogy  $f(2) = 1$ , és  $f'(2) = 2$ .

## KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS MÓDSZERE

Olyan optimalizálási feladatok megoldására, amelyeket közvetlenül nem lehet valamely bevett eljárással megoldani, hasznos az eredeti feladat egyszerűbb részfeladatokra való felbontása. Ide tartozik az egészértékű lineáris optimalizálási feladatok köre, és a nemlineáris programozás is.

Az alapötlet az eredeti feladat szisztematikus felosztása olyan kisebb, valamely szempontból kezelhetőbb részfeladatokra, amelyek bizonyos értelemben a teljes leszámolás egy hatékony megvalósítását adják. A megoldott részfeladatok eredményeit természetesen megfelelően összegezni kell. A módszer erejét az adja, hogy minden lépése automatizálható.

Tekintsük azt a feladatot, amelyben

$$\min f(x)$$

az optimalizálási cél, és a lehetséges megoldásokat azonos dimenziójú, egész koordinátájú  $x$  vektorok egy véges és nem üres  $L$  halmaza adja meg.

Ennek a feladatnak nyilvánvalóan van optimális megoldása, hiszen a véges sok lehetséges vektor között nyilván kijelölhető az, amelyiknél kisebb célfüggvényértéket a többi nem ad. Sok esetben a lehetséges megoldások száma nagyon nagy. Így például az  $n \times n$ -es hozzárendelési feladat esetén  $n!$  darab lehetséges megoldást kellene ellenőrizni.

A korlátozás és szétválasztás módszere két függvényre támaszkodik:

- a  $\phi$  szétválasztási függvény az  $L$  lehetséges megoldási halmaz egy tetszőleges  $L'$  (amire  $|L'| > 1$ ) részhalmazának megadja egy valódi osztályozását.
- a  $g$  korlátozó függvény pedig az  $L$  egy tetszőleges  $L' \neq \emptyset$  részhalmazához hozzárendeli az  $f(x)$ ,  $x \in L'$  célfüggvényértékek egy alsó korlátját. Amennyiben  $L'$  egy  $x$  lehetséges vektorból áll, akkor  $g(x) = f(x)$ .

Erre a két függvényre alapozva már fel lehet építeni a korlátozás és szétválasztás módszer egy változatát.

Gyakran hasznos a lehetséges megoldások  $L$  halmazát befoglalni egy könnyebben kezelhető halmazba, és a felosztást azon végigkövetni.

## KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS MÓDSZERE, II.

A korlátozás és szétválasztás (angolul branch-and-bound, B&B) módszere egy *leszámlálási fát* épít fel a következők szerint:

- 0. lépés** Az előkészítés során határozzuk meg a  $g(L)$  értéket, és legyen  $L$  a leszámlálási fa gyökere. Legyen  $k = 1$ . Címkezzük meg a gyökeret a  $g(L)$  értékkel.
- 1. lépés** Az aktuális fa levelein határozzuk meg a címkék minimumát, és választunk ki egy minimális címkéjű  $L'$  levelet.
- 2. lépés** Amennyiben  $L'$  már csak egy vektorból áll ( $L' = \{\bar{x}\}$ ), akkor vége az eljárásnak,  $\bar{x}$  optimális megoldás.
- 3. lépés** Bővítsük az aktuális fát  $\phi(L')$  elemeivel, legyenek ezek  $L'$  leszármazottjai az épített keresési fában. Az új levelekre határozzuk meg az alsó korlátokat a  $g$  függvény segítségével, és rendeljük őket címkéként a megfelelő levelekhez. Növeljük a  $k$  iterációs számot eggyel, és térjünk rá a következő iterációs lépésre (1. lépés).

Az eljárás *végessége* abból adódik, hogy a  $\phi$  definíciója alapján minden  $L'$  részfeladatnak legfeljebb  $|L'|$  leszármazottja van, és hogy az algoritmus futásának minden fázisában az eredeti  $L$  lehetséges megoldási halmaz egy osztályozását jelentik az aktuális levelek. A szétválasztási függvény tulajdonságán múlik, hogy minden újabb szétválasztás valódi osztályozást ad. Ebből az adódik, hogy a keresési fa maximális mélysége  $|L|$ . A fa végességéből már következik az eljárás végessége is.

Az algoritmus *helyessége* azon múlik, hogy minden iterációs fázisban a lehetséges megoldásoknak az aktuális levelek által meghatározott osztályozása rész-halmazaira ismert alsó korlátok legkisebbike alsó korlátja lesz az optimális cél-függvényértéknek. A megálláskor tehát  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  adódik az  $\bar{x}$  vektorra. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy  $\bar{x}$  optimális megoldás.

Érdeemes az alaplómódszer indítása során egy lehetséges megoldásra vonatkozó (és ezért pontos) felső korlátot adni az optimum értékére. Ennek segítségével a számontartott részfeladatok számát csökkenteni lehet.

## KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS MÓDSZERE, PÉLDA

Tekintsük a következő egyszerű 0-1 értékű lineáris programozási feladatot:

$$\min -4x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

feltéve hogy a

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 5$$

feltétel teljesül, és  $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 4$ .

Ebben az esetben a lehetséges megoldások halmaza:  $L = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ .

Az  $L$ -en a célfüggvény alsó korlátjának vegyük azon célfüggvény együtthatók összegét, amelyekre van egyes valamely vektorban (ennél kisebb érték nem fordulhat elő):  $g(L) = -7$ .

Tegyük fel, hogy a szétválasztási függvény  $L$ -et olyan két halmazra bontja, hogy  $L_1$ -be kerüljenek azok a vektorok, amelyekre  $x_1 = 0$ ,  $L_2$ -be pedig azok, amelyekre  $x_1 = 1$ . Ekkor

$$L_1 = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\},$$

és  $g(L_1) = -3$ , illetve

$$L_2 = \{(1, 0, 0, 0)\},$$

és  $g(L_2) = -4$ .

Mivel a következő lépésben az  $L_2$  levelet kellene tovább osztani, és az már csak egy vektort tartalmaz, ezért  $\bar{x} = (1, 0, 0, 0)$  az optimális megoldás.

Vegyük észre, hogy a fenti gyors megoldást csak az tette lehetővé, hogy a lehetséges megoldások halmazából egy lépésben sikerült elkülöníteni egy egyelemű részhalmazt, amelyre a célfüggvény értéke nem volt nagyobb, mint a többi, a lehetséges megoldások közé tartozó vektor célfüggvény értéke.

Gyakorlati feladatokban persze lényegesen nagyobb számú iteráció kell a megoldáshoz – másrészt ezzel együtt is hatásos és hatékony eszköz lehet a korlátozás és szétválasztás módszere.

## INTERVALLUM ARITMETIKA

A valós számokra végzett műveleteket ki lehet terjeszteni intervallumokra is, és ha valamely mennyiségről nem egy konkrét valós számmal való egyenlőségét, hanem egy intervallumba való tartozását ismerjük, akkor az intervallumokra végrehajtott műveletek eredménye tartalmazza az intervallumokban lévő valós értékekre vonatkozó műveletek értékét is.

HALMAZELMÉLETI DEFINÍCIÓ:  $A \circ B := \{a \circ b : a \in A, b \in B\}$ ;  $A, B \in \mathbb{I}$ , ahol  $\mathbb{I}$  a valós kompakt intervallumok halmaza (azaz olyan  $[i, j]$  intervallumoké, amelyekre  $i, j \in \mathbb{R}$ , és  $i \leq j$ ).

ARITMETIKAI DEFINÍCIÓ:

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c, b + d], \\ [a, b] - [c, d] &= [a - d, b - c], \\ [a, b] * [c, d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a, b] / [c, d] &= [a, b] * [1/d, 1/c], \text{ ha } 0 \notin [c, d]. \end{aligned}$$

Az osztás definiálásánál a  $0 \notin [c, d]$  feltétel gyakran előforduló megszorításnak tűnik, de a tapasztalatok szerint nem az.

ÁLLÍTÁS. Az aritmetikai definíció megfelel a halmazelméletinek, és viszont. Tehát az intervallum-aritmetika ebben az értelemben pontos.

A bizonyítás az állításban szereplő műveletek monotonitásán múlik.

Az alaplóműveleteken túl a standard függvényeket is ki lehet terjeszteni intervallumokra. Azt az eljárást, amelynek során egy valós függvény műveleteit és standard függvényeit rendre intervallumos megfelelőjükre cseréljük, *természetes intervallum kiterjesztésnek* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy egy  $f(x)$  valós függvény *befoglaló függvénye* az  $F(X)$ , ha minden  $x \in X$  valósra  $f(x) \in F(X)$ , ahol  $X \in \mathbb{I}^n$ . A természetes intervallum kiterjesztés befoglaló függvényt ad. Az  $f(x)$  függvény *értékkészletét* az  $X$  intervallumon  $f(X)$ -el jelöljük.

PÉLDA. Az  $x - x^2$  értékkészlete a  $[0, 2]$  intervallumon  $[-2, 0, 25]$ . Ezzel szemben az intervallum-kiterjesztéssel adódó intervallum  $[-4, 2]$ .

## AZ INTERVALLUM-ARITMETIKA ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI

- az  $+$  és a  $-$ , illetve a  $*$  és az  $/$  nem inverzei egymásnak, ha intervallumokra alkalmazzuk őket. Például  $[0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$ , és  $[1, 2]/[1, 2] = [1/2, 2]$ . Valamint  $[0, 0] + [0, 1] - [0, 1] = [-1, 1]$  és az eredmény nem  $[0, 0]$ .
- érvényes az ún. szubdisztribúciós törvény, azaz  $A(B + C) \subseteq AB + AC$ . Például  $[0, 1]([1, 1] - [1, 1]) = [0, 0] \subseteq [0, 1][1, 1] - [0, 1][1, 1] = [-1, 1]$ . Másrészt viszont az  $a \in \mathbb{R}$  konstansra  $a(B + C) = aB + aC$ .
- érvényes az az általános szabály is, hogy a 0-szélességű intervallumokra (amelyekre  $w(A) = 0$ , ahol  $w(A) = b - a$ , ha  $A = [a, b]$ ) az intervallumműveletek megegyeznek a valós számokon szokásos műveletekkel.
- az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív. Az egyetlen egységelem az  $[1, 1]$ , az egyetlen zéruselem a  $[0, 0]$ .
- érvényes az intervallum-műveletek befoglalási izotonitása:  $A \subseteq B, C \subseteq D$ -ből következik, hogy  $A \circ C \subseteq B \circ D$ . (Persze csak akkor, ha az illető műveletek definiáltak.)
- definiáljuk az  $n$ -dimenziós  $A \in \mathbb{I}^n$  intervallum szélességét a koordinátánkénti intervallumok szélességének maximumaként:  $w(A) := \max(w(A_i))$   $i = 1, \dots, n$ , ha  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathbb{I}^n$ . Ekkor teljesülnek a következők:
  1. ha  $A \subseteq B$ , akkor  $w(A) \leq w(B)$ ,
  2.  $w(C + D) = w(C) + w(D)$  (az egy dimenziós esetben),
  3.  $w(aB) = |a| w(B)$ .
- Definiáljuk az  $A$  intervallum  $m(A)$  középpontját a következők szerint:  $m(A) = (a+b)/2$ , ha  $A \in \mathbb{I}$ , és  $m(A) = (m(A_1), m(A_2), \dots, m(A_n))$ , ha  $A \in \mathbb{I}^n$ . Ekkor  $m(A \pm B) = m(A) \pm m(B)$ , ha  $A, B \in \mathbb{I}^n$ .

A gépi számokkal végzett intervallumos műveletek során gondoskodni kell arról, hogy a kerekítés során a befoglalási tulajdonság ne vesszen el. Ehhez elegendő az ún. kifelé kerekítést alkalmazni, azaz az eredmény intervallumok alsó végpontját lefelé, a felsőt felfelé kell kerekíteni. Ezek a kerekítési módokat egy IEEE szabvány biztosítja, de számos programozási nyelv teljes intervallum kiterjesztést ad, pl. C-XSC, INTLAB, PROFIL/BIAS.

## PÉLDA AZ INTERVALLUM-ARITMETIKÁN ALAPULÓ KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS MÓDSZERRE

Tekintsük a  $\min f(x) = x^2$  feladatot az  $X = [-2, 10]$  intervallumon. A szélsőérték nyilván a 0 pontban van. Az  $f(x)$  függvény befoglaló függvényértéke a kiindulási intervallumon  $[-2, 10] * [-2, 10] = [-20, 100]$ .

A kiindulási intervallumot osszuk fel két egyenlő részre. A kapott intervallumokra adódó korlátok:

$$f([-2, 4]) = [-8, 16], \quad f([4, 10]) = [16, 100].$$

Ebből az adódik, hogy a teljes feladatra vonatkozó alsó korlátunk -20-ról -8-ra javul. Vegyük észre, hogy a második részintervallumon a célfüggvényünk monoton, ezért a befoglaló függvényünk pontos.

A következő iterációs lépésben a legígéretesebb részintervallum a  $[-2, 4]$ . Osszuk fel most ezt. Az ezután meglévő részintervallumokra a korlátok:

$$f([-2, 1]) = [-2, 4], \quad f([1, 4]) = [1, 16], \quad f([4, 10]) = [16, 100].$$

Mivel egy részintervallumon ( $[-2, 1]$ ) kapott felső korlát kisebb, mint egy másik részintervallumra ( $[4, 10]$ ) érvényes alsó korlát, ezért az utóbbi törölhető a keresési tartományból, hiszen nem tartalmazhat optimális megoldást.

A következő néhány iteráció utáni még figyelembe veendő részintervallumok a hozzájuk tartozó korlátokkal:

$$f([-2, -0, 5]) = [0, 25, 4], \quad f([-0, 5, 1]) = [-0, 5, 1], \quad f([1, 4]) = [1, 16],$$

$$f([-2, -0, 5]) = [0, 25, 4], \quad f([-0, 5, 0, 25]) = [-0, 125, 0, 25], \\ f([0, 25, 1]) = [0, 0625, 1], \quad f([1, 4]) = [1, 16],$$

$$f([-0, 5, -0, 125]) = [0, 015625, 0, 25], \quad f([-0, 125, 0, 25]) = [-0, 03125, 0, 0625], \\ f([0, 25, 1]) = [0, 0625, 1].$$

Az optimális célfüggvényértékre vonatkozó bizonytalanság 5 iterációs lépés alatt 120-ról 0,1 alá csökkent. Az optimum helye bizonytalansága 12-ről 1,5-re alakult.



## INTERVALLUM-FELOSZTÁSI ALGORITMUS

Az intervallum-felosztási (Moore-Skelboe) algoritmus adott nemlineáris függvény valamely intervallumon vett globális minimumának alsó- és felsőbecslését adja meg. A kezdeti  $X$  intervallumban egy olyan  $X'$  részintervallumot keres meg, hogy  $F(X')$  tartalmazza a globális minimum értékét, és az  $F(X')$  intervallum szélessége kisebb legyen, mint egy előre adott  $\varepsilon$  pozitív konstans. Az algoritmus a következő:

1. Legyen  $Y := X$  és  $y := \min F(X)$ . Inicializáljuk az  $L = ((Y, y))$  listát.
2. Válasszunk egy olyan  $k$  koordinátát, amellyel párhuzamosan az  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ -nek maximális hosszúságú éle van.
3. Vágjuk ketté  $Y$ -t a  $k$  irány mentén: így olyan  $V_1$  és  $V_2$  boxokat kapunk, amelyekre  $Y = V_1 \cup V_2$ .
4. Számítsuk ki  $F(V_1)$ -et és  $F(V_2)$ -t, és legyen  $v_i = \min F(V_i)$   $i = 1, 2$ -re.
5. Töröljük  $(Y, y)$ -t az  $L$  listából.
  - (a) Monotonitási-vizsgálat: töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $0 \notin F'_j(V_i)$  valamely  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ )-re és  $i = 1, 2$ -re.
  - (b) Kivágási-vizsgálat: töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $v_i > \tilde{f}$  (ahol  $\tilde{f}$  adott eljárás-paraméter, általában a globális minimum legjobb ismert felső korlátja) és  $i = 1, 2$ .
6. Tegyük a  $(V_1, v_1)$  és  $(V_2, v_2)$  párokból a megmaradtakat a listába. Ha a lista üres, akkor STOP.
7. Jelöljük a lista azon párját, amelynek második eleme a legkisebb,  $(Y, y)$ -al.
8. Ha  $F(Y)$  szélessége kisebb, mint  $\varepsilon$ , akkor nyomtassuk ki  $F(Y)$  és  $Y$  értékét, és STOP.
9. Folytassuk az algoritmust a 2. lépésnél.

## INTERVALLUM-FELOSZTÁSI ALGORITMUS II.

Az 5a pontbeli monotonitási teszt:

töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $0 \notin F'_j(V_i)$  valamely  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ )-re és  $i = 1, 2$ -re

akkor töröl valamely részintervallumot, ha azon az  $f(x)$  függvény szigorúan monoton. Ilyen esetben az adott intervallum nem tartalmazhat a belsejében minimumpontot. Ha az algoritmus azzal áll le, hogy üres lett a lista, akkor meg kell vizsgálni, hogy nem lehetett-e minimumpont az eredeti  $X$  intervallum határán például úgy, hogy az algoritmust újraindítjuk egy  $\hat{X} \supset X$  intervallummal. Másik megoldás lehet, ha az 5a lépésben a törlés helyett az aktuális intervallumot helyettesítjük a megfelelő lapjával. Ekkor nincs szükség az  $\hat{X}$  intervallummal való ellenőrzésre.

Az 5b pontbeli kivágási teszt:

töröljük a  $(V_i, v_i)$  párt, ha  $v_i > \tilde{f}$  (ahol  $\tilde{f}$  adott eljárás-paraméter, általában a globális minimum legjobb ismert felső korlátja),  $i = 1, 2$

olyan részintervallumokat dob el, amelyekre az  $f(x)$  függvény lehetséges legkisebb értéke is nagyobb, mint  $\tilde{f}$ .

Az  $\tilde{f}$  értékét megválaszthatjuk a feladatra vonatkozó előzetes információink alapján, de adaptív módon is: kezdetben legyen  $\tilde{f} = \max F(X)$ , majd minden vágásnál  $\tilde{f} = \min(\tilde{f}, \max F(V_1), \max F(V_2))$ . Algoritmusunk 5b lépése az utóbbi eljárással biztos nem dob ki olyan részintervallumot, amelyben globális minimumpont van. Szokás  $\tilde{f}$  javítása helyi kereső módszerrel (és utána a kapott közelítő optimum intervallumos kiértékeléssel).

## INTERVALLUMOS NEWTON MÓDSZER

Tekintsük most az  $f(x) = 0$  egydimenziós feladatot. Feltételezzük, hogy  $f'(x)$  folytonos függvény az  $[a, b]$  intervallumon, és

$$0 \notin \{f'(x), x \in [a, b]\} \text{ valamint } f(a)f(b) < 0.$$

Ha az  $f(x)$  zérushelyének egy  $X_k$  befoglalása ismert, akkor egy jobb,  $X_{k+1}$  befoglalást a következő iterációs képlettel kaphatunk:

$$X_{k+1} := \left( c(X_k) - \frac{f(c(X_k))}{F'(X_k)} \right) \cap X_k.$$

Itt  $c(X)$  az  $X$  intervallum egy belső pontja (például a középpontja). Tekintsük az  $f(x) = \sqrt{x} + (x + 1) \cos(x)$  függvényt a  $[2, 3]$  intervallumon. A kapott iterációs sorozat az intervallumok  $w(X_k)$  szélességével együtt:

| k | $X_k$                            | $w(X_k)$        |
|---|----------------------------------|-----------------|
| 1 | [2,0, 3,0]                       | 1,0             |
| 2 | [2,0, 2,3]                       | 0,3             |
| 3 | [2,05, 2,07]                     | 0,02            |
| 4 | [2,05903, 2,05906]               | 0,00003         |
| 5 | [2,059045253413, 2,059045253417] | 0,0000000000004 |

Optimalizálási feladatokra nyilván a célfüggvény deriváltjára kell a képleteinket alkalmazni, hiszen annak a zérushelyeit keressük. Ekkor az iterációs formula a következő lesz:

$$X_{k+1} := \left( c(X_k) - \frac{f'(c(X_k))}{F''(X_k)} \right) \cap X_k.$$

Itt  $f'(x)$  a célfüggvény deriváltja,  $F''(X)$  pedig a második derivált befoglaló függvénye. Vegyük észre, hogy az iterációs képletünk nem függ közvetlenül magától a célfüggvénytől. Ez rendben is van abból a szempontból, hogy nyilván azonos iterációs sorozatot várunk  $f(x)$ -re, és annak eltoltjára,  $f(x) + c$ -re.

Amennyiben a célfüggvény többdimenziós, akkor az intervallumos Newton lépés:

$$X_{k+1} := \left( c(X_k) - H^{-1}(X_k) \nabla f(c(X_k)) \right) \cap X_k,$$

ahol  $H(X_k)$  az  $f(x)$  Hesse mátrixa befoglalása az  $X_k$  argumentum intervallumra.

## KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS MÓDSZERE, 2. PÉLDA

Ebben az esetben a feladat egy olyan kellemetlen gyár telepítési helyszín meghatározása volt, amelyre a magyarországi nagyobb városok lakosai számával arányos elutasítás figyelembevételével a lehető legkisebb gondot okozza.

A célfüggvény ennek megfelelően

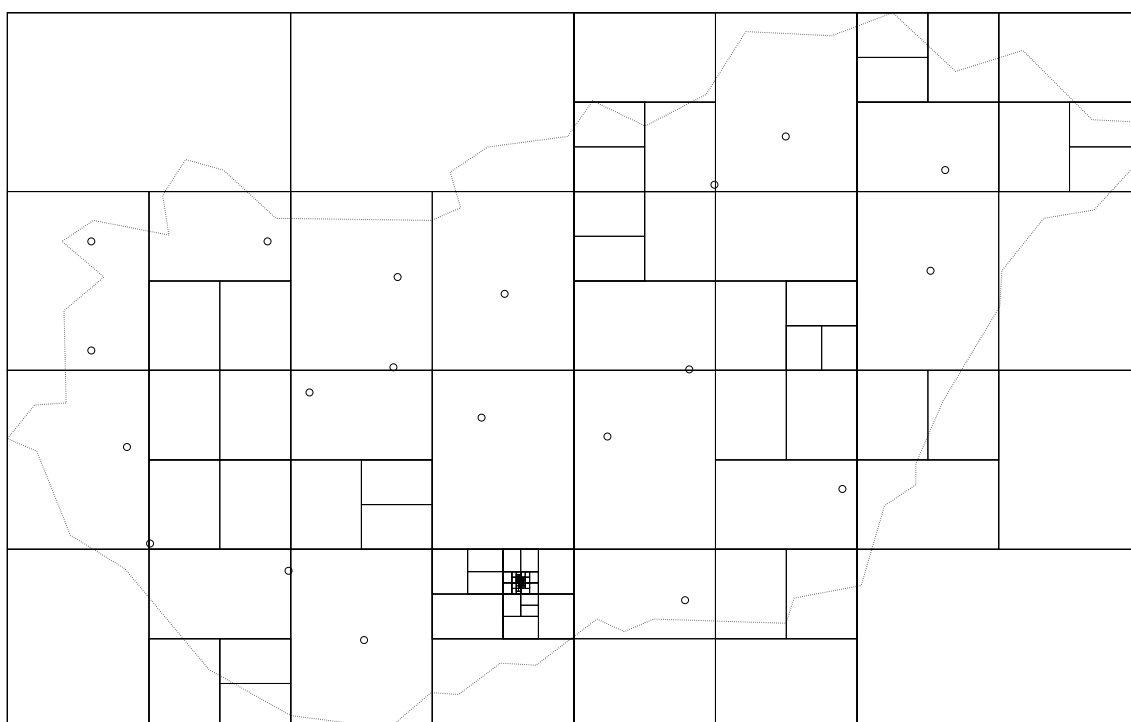
$$f(x) = \sum_i \frac{l_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

ahol  $x$  és  $y$  a telepítés helyszínének koordinátái, az  $i$ -edik város lakosai száma  $l_i$ , koordinátái pedig  $x_i$  és  $y_i$ . Nyilván  $f(x)$  minimalizálása a cél.

Az optimalizálási feladat korlátozását jelentette, hogy

- a gyárnak az országhatárokon belül legalább 50 kilométerre kell lennie,
- a városok 5 kilométeres körzete is kizárt a telepítésből.

A kapott eredményt a következő ábra mutatja – konkrétan a megvizsgált rész-intervallumok jelölésével:



Érdekes, hogy ha a határtól való eltérést nem követeltük meg, akkor az optimális pozíció minden esetben a határra adódott, még akkor is, ha figyelembe vettük a határon túli nagyobb városok taszító hatását is.

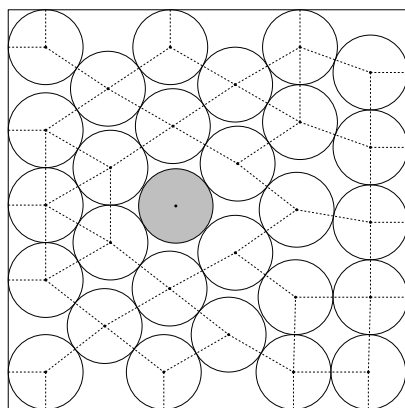
## KÖRPAKOLÁSI FELADATOK MEGOLDÁSA B&amp;B MÓDSZERREL

Két ekvivalens megfogalmazás:

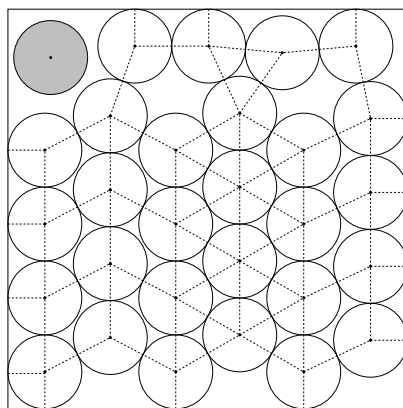
- Helyezzünk el adott  $n$  darab egybevágó kört átlapolás nélkül, maximális sugárral az egységnégyzetben.
- Helyezzünk el adott  $n$  számú pontot az egységnégyzetben úgy, hogy a köztük lévő minimális távolság maximális legyen.

$$\max \min_{1 \leq i \neq j \leq n} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

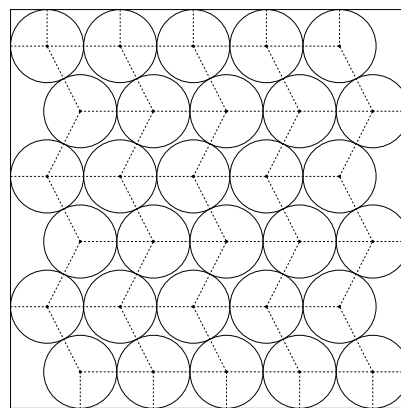
$$\text{ahol } 0 \leq x_i, y_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



n = 28



n = 29



n = 30

A satírozott körök kis mértékben mozgathatók az optimalitás megtartása mellett (a globális minimumpontok halmaza *pozitív mértékű*). Két kör érintkezését az összekötő vonalak jelzik.

Hardver: PC, Pentium IV 1.8 GHz processzor, 1 GB RAM. Szoftver: Linux, GNU C/C++, C-XSC Toolbox, PROFIL/BIAS. A középpontok távolságára kapott korlátok:

$$F_{28}^* = [\underline{0.2305354936426673}, \underline{0.2305354936426743}], \quad w \approx 7 \cdot 10^{-15},$$

$$F_{29}^* = [\underline{0.2268829007442089}, \underline{0.2268829007442240}], \quad w \approx 2 \cdot 10^{-14},$$

$$F_{30}^* = [\underline{0.2245029645310881}, \underline{0.2245029645310903}], \quad w \approx 2 \cdot 10^{-15}.$$

A teljes futási idők:  $\approx 53, 50$ , illetve 21 óra. A feladatok megoldásához kb. egy millió részintervallum kellett. A verifikált eljárás az optimális pakolás helyére vonatkozó bizonytalanságot több mint 711, 764, illetve 872 nagyságrenddel csökkentette.



## G függelék

### Kiegészítő szorgalmi feladatok

1. Először írjunk programot  $N$  valós szám összeadására, majd igazoljuk, hogy már három szám esetén is az illető program által (véges számábrázolás mellett) megadott eredmény és a valódi összeg eltérése lehet pl. 2003-nál nagyobb. Mit lehet tenni?
2. Adott egy körpálya véges sok benzinkúttal, amelyekben pontosan annyi benzin van, amennyivel körbe lehet autózni a pályát. Feltesszük, hogy a benzintartály mérete elegendően nagy ahhoz, hogy akár a teljes benzinmennyiséget befogadja. Igazoljuk, hogy akkor létezik olyan pont (nyilván egy benzinkút, ahol tankolással kezdünk), ahonnan indulva körbe lehet menni anélkül, hogy kifogyna a benzin.
3. Le lehet-e rajzolni (pl.) egy asztalterítőre kontinuum sok (általában különböző méretű) nyolcast anélkül, hogy azok vonala metszené egymást? Nehezebb a feladat három szakaszból álló szimmetrikus csillagokkal, de ugyanaz az eredmény.
4. Adott egy épülőfélben lévő ház, a padláson 3 izzó, a pincében ezekhez három kapcsoló. A pincéből nem lehet látni, hogy világítanak-e a lámpák. Tetszőleges kapcsolgatás után (azt tudhatjuk, hogy melyik a bekapcsolt állapot) a padláson meg kell mondani, hogy melyik kapcsoló melyik körtéhez tartozik. A pincébe tehát nem lehet már visszamenni. Vigyázat, a feladat megoldható, és minél elméletibb megoldást keresünk, annál reménytelenebb!
5. Tekintsük az  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$  levezetést! Melyik egyenlőség a hibás? Egy gúnyos megjegyzés szerint mindegyik helyes, csak az egyenlőség nem tranzitív. Bármilyen hihetetlen, ez nem is áll messze az igazságtól. Érdekességként a Derive nevű szimbolikus matematikai program helyből a harmadik egyenletet véli hamisnak – ami egybevág a hallgatók leggyakoribb tippjével (ez az egyenlőség abszolút rendben van).
6. Vegyünk egy narancsot, tegyük fel, hogy a héj vastagságának aránya állandó a narancs sugarához képest. Igazoljuk azt a meglepő állítást, hogy a narancs dimenziójának növelésével (3, 4, ...) a héj nélküli, ehető rész térfogatának aránya nullához tart!
7. Tekintsünk egy kört, amelybe bele van rajzolva 6 maximális sugarú egybevágó, egymást nem átfedő kisebb kör. Igazoljuk, hogy a nagyba ekkor még egy, az előzőekkel megegyező méretű kis kör is belefér! Még megoldatlan feladat négyzetbe 31 maximális sugarú egybevágó kör rajzolása.
8. (Erdős Pál:) Legyen adott  $2 < N < \infty$  pont a síkban úgy, hogy nem mind esik egy egyenesre. Igazoljuk, hogy akkor van olyan két pont az  $N$ -ből, amelyek által meghatározott egyenesen nincs más pont az eredeti halmazból.



9. Húzzuk be egy tetszőleges háromszög szögharmadoló félegyeneseit. Igazoljuk, hogy ezek metszéspontjai egyenlő oldalú háromszöget alkotnak!
10. Azt kíséreljük meg igazolni, hogy  $90^\circ = 91^\circ$ . Vegyünk egy  $AB$  szakaszt, mérjük fel az  $A$  pontban  $91^\circ$ -ot, a  $B$  pontban pedig  $90^\circ$ -et (úgy, hogy a félegyenések az  $AB$  szakasz azonos oldalára essenek). Mérjük fel ugyanazt a távolságot a félegyenésekre:  $AD = BC$ . Legyen az  $AB$  felezőpontja  $X$ , a  $CD$  felezőpontja  $Y$ . Húzzuk meg ezekben a szakaszfelező merőlegeseket. Legyen ezek metszéspontja  $S$ . (Azt egyszerűen be lehet látni, hogy a felezőmerőlegesek egyetlen pontban metszik egymást.) Ekkor  $AS = BS$ , és  $DS = CS$ , tehát az  $ADS$  háromszög egybevágó a  $BCS$  háromszöggel. Ebből adódik, hogy az  $SAD$  szög megegyezik az  $SBC$  szöggel, amiből kivonva az  $SAB = SBA$  szöveget kapjuk, hogy  $90^\circ = 91^\circ$   
...
11. Szorzás orosz módra (vagy orosz parasztszorzás, 'multiplication a la Russe'): tegyük fel, hogy csak kettővel tudunk szorozni és osztani. Pl. a  $27 \times 13$  helyett így  $54 \times 6$ -ot írunk, és megjegyezzük, hogy a 27-el volt valami bajunk, hiszen a 13 nem osztható kettővel. A következő lépés:  $54 \times 6$  helyett  $108 \times 3$ , majd  $216 \times 1$ , és a 108-al volt bajunk. Innen már csak az eredményt kell leolvasni:  $216 + 108 + 27 = 351$ . Indokoljuk, hogy hogyan jöhetett ki az eredmény, és miért ez a jelenlegi leggyorsabb szorzási eljárás számítógépeken!
12. Egy televíziós vetélkedőben a játék egy fázisában a nyertes választhat három ajtó közül, amelyek mögött egy-egy majom, illetve egy Mercedes autó van. A játékos nyilván az autót szeretné. Mikor a kezét az egyik kilincsre teszi, a játékvezető (minden esetben) felkiált, hogy ne azt válassza. Annak igazolásául, hogy tudja, hogy melyik ajtó mögött mi van, kinyitja az egyik másik ajtót, ami mögött egy majom van (ezt nyilván mindig meg lehet tenni).  
Indokolt-e változtatni az első választáson, és milyen valószínűséggel van autó az egyes ajtók mögött, ha a játék fair, az ajándékok elosztása egyenletes eloszlással történik, és a játék alatt nem változik a helyük?
13. Igazoljuk, hogy minden zárt síkgörbének van olyan négy pontja, amelyek egy négyzetet határoznak meg! (nyitott probléma)
14. Igazoljuk, hogy van olyan, az  $x$  és  $y$  tengelyekkel párhuzamos oldalú, racionális oldalhosszú négyzet, amelyben van olyan pont, amelynek minden csúcstól vett távolsága egész szám! (nyitott)
15. Tekintsünk egy  $a_0, b_0$  oldalú téglalapot. Osszuk fel ezt véges sok téglalapra, és legyenek a kis téglalapok oldalai rendre  $a_i$  és  $b_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Igazoljuk, hogy érvényes a

$$|\sin(a_0)| |\sin(b_0)| \leq \sum_{i=1}^n |\sin(a_i)| |\sin(b_i)|$$

egyenlőtlenség! Nyitott a megfordítása: a megadott egyenlőtlenségeknek elegettevő  $a_i, b_i$  párokhoz milyen további feltételek teljesülése esetén rendelhető megfelelő téglalappakolás?

16. Tekintsük azt a helyzetet, amikor egy 100 ülőhellyel rendelkező repülőgépre minden jegyet eladtak, az utasok beszállásra jelentkeznek, de az első beszállónak nincs meg a beszállókártyája, és így nem tudja hova is kell ülnie. Ezek után ő egy egyenletes eloszlással véletlenül választott helyre ül. Ezt követően minden utas a saját helyére ül ha az üres, illetve

egy egyenletes eloszlással választott még szabad helyre, ha a sajátja foglalt. A kérdés az, hogy az utolsó utas milyen valószínűséggel tud a saját helyére ülni?

*"Tekintsünk egy gömbalakú tehenet."*

(Egy amerikai egyetem alkalmazott matematikai intézete által egy rosszul tejelő tehenekkel megvert gazdálkodó megbízására írt tanulmány első mondata.)



## H függelék

### A 2002-es SIAM numerikus verseny feladatai

2002-ben a SIAM News folyóirat 100 dollár, 100 decimális jegy címmel versenyt írt ki numerikus feladatok megoldására<sup>12</sup>. A maximális pontszámot minden feladatra 10-10 pontos jegy megadásával lehetett elérni. Bár a határidő rég lejárt, érdemes a kitűzött feladatokat megnézni.

1. Mi az értéke a  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 x^{-1} \cos(x^{-1} \log x) dx$  integrálnak?
2. Egy foton mozog 1-es sebességgel az  $x - y$  síkon, a  $t = 0$  időpontban indul az  $(x, y) = (0.5, 0.1)$  pontból keletnek. Minden egész koordinátájú  $(x, y)$  pont körül van egy  $1/3$  sugarú kör alakú tükör. Milyen messze van a foton az origótól a  $t = 10$  időpontban?
3. Az  $A$  végtelen mátrix, amelynek komponensei  $a_{11} = 1$ ,  $a_{12} = 1/2$ ,  $a_{21} = 1/3$ ,  $a_{13} = 1/4$ ,  $a_{22} = 1/5$ ,  $a_{31} = 1/6$  stb., korlátos operátor  $\ell^2$ -ben. Mennyi  $\|A\|$ ?
4. Mi a globális optimuma a következő függvénynek:

$$\exp(\sin(50x)) + \sin(60e^y) + \sin(70 \sin(x)) + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x+y)) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)?^{13}$$

5. Legyen  $f(z) = 1/\Gamma(z)$ , ahol  $\Gamma(z)$  a gamma függvény, és legyen  $p(z)$  egy köbös polinom, amely a legjobban közelíti  $f(z)$ -t az egység sugarú körön a  $\|\cdot\|_{\infty}$  supremum normában. Mennyi  $\|f - p\|_{\infty}$ ?
6. Egy bolha a  $(0, 0)$  pontból indul a kétdimenziós egész rácson, és egy torzított véletlen sétát hajt végre: minden lépésben északra vagy délre egyaránt  $1/4$  valószínűséggel ugrik, keletre  $1/4 + \epsilon$ -nal, nyugatra pedig  $1/4 - \epsilon$ -nal. Annak a valószínűsége, hogy a bolha visszatér a  $(0, 0)$  pontba,  $1/2$ . Mennyi  $\epsilon$ ?
7. Legyen  $A$  az a  $20000 \times 20000$ -es mátrix, amelynek elemei nullák a főátlóban lévő  $2, 3, 5, 7, \dots, 224737$  prímekek, és azon egyesek kivételével, amelyek olyan  $a_{ij}$  pozíciókban vannak, amelyekre  $|i - j| = 1, 2, 4, 8, \dots, 16384$ . Mi lesz az  $A^{-1}$  mátrix bal felső eleme?
8. A  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  négyzetes lemez  $u = 0$  hőmérsékletű. A  $t = 0$  időpontban a hőmérsékletet egyik oldalán  $u = 5$ -re emeljük, míg a többi oldalt változatlanul  $u = 0$  hőmérsékleten tartjuk. A meleg a lemez belsejébe áramlik  $u_t = \Delta u$  szerint. Mikor éri el a hőmérséklet az  $u = 1$  értéket a lemez középpontjában?

<sup>12</sup>Nick Trefethen: A Hundred-Dollar, Hundred-digit Challenge. SIAM News 35(2002)

<sup>13</sup>Ezt a feladatot egy intervallum aritmetikán alapuló korlátozás és szétválasztás algoritmus 0.26 másodperc alatt, 1975 függvény-, 1158 gradiens- és 92 Hesse-mátrixhívás áran megoldotta: az optimum befoglalása a következőnek adódott:  $[-3.306868647475316, -3.306868647475196]$

9. Az  $I(\alpha) = \int_0^2 [2 + \sin(10\alpha)] x^\alpha \sin(\alpha/(2-x)) dx$  integrál függ az  $\alpha$  paramétertől. Milyen  $\alpha \in [0, 5]$  értékre lesz  $I(\alpha)$  maximális?
10. Egy részecske Brown-mozgást követ a  $10 \times 1$  téglalap közepéből (azaz 2D véletlen sétát végtelenül kicsi lépésközzel), amíg el nem éri annak határát. Mi a valószínűsége annak, hogy az alsó vagy felső határra ér ki, és nem valamelyik oldalsó szakaszra?

# I függelék

## A standard normális eloszlás táblázata

$$P(0 \leq x \leq a)$$

| a   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

Értelemszerűen, ha a  $P(x \leq a)$  valószínűséget keressük, akkor a táblázatbeli értékekhez 0.5-et hozzá kell adni.

## J függelék

### Kötelező program témák

1. a hátizsák feladat megoldása teljes leszámolással
2. a hátizsák feladat megoldása közvetett leszámolással
3. a hajórakodási feladat megoldása teljes leszámolással
4. a hajórakodási feladat megoldása közvetett leszámolással
5. a fix költség feladat megoldása rácsmenti kereséssel \*
6. az utazó ügynök feladat megoldása teljes leszámolással
7. az utazó ügynök feladat megoldása szimplex módszerrel \*
8. az utazó ügynök feladat megoldása közelítése a hozzárendelési feladat megoldásával (Magyar módszer) \*
9. az utazó ügynök feladat megoldása a legközelebbi város beillesztése heurisztikával
10. az utazó ügynök feladat megoldása a legközelebbi város hozzáadása heurisztikával
11. az utazó ügynök feladat megoldása a legközelebbi város beszúrása heurisztikával
12. az utazó ügynök feladat megoldása a legtávolabbi város beszúrása heurisztikával
13. az utazó ügynök feladat megoldása a legolcsóbb beszúrás heurisztikával
14. az oszlopgenerálás módszere a szabási feladatra \*
15. rendezés nélküli heurisztikák a szabási feladatra
16. rendezéses heurisztika a szabási feladatra
17. online szabási heurisztika (saját szakirodalom feldolgozással) \*
18. a legrövidebb út feladat megoldása a Dijkstra algoritmussal
19. a maximális folyam feladat megoldása a Ford-Fulkerson eljárással
20. a CPM eljárás megvalósítása
21. a projekt lerövidítési feladat megoldása



22. a PERT eljárás megvalósítása
23. a diszkrét keresletű újságáros probléma megoldása
24. a folytonos keresletű újságáros probléma megoldása
25. egyes stochasztikus modellek feladatai megoldása Monte Carlo módszerrel és szimulációval\*
26. a Newton módszer megvalósítása nemlineáris feltétel nélküli optimalizálási feladatok megoldására
27. nemlineáris feltétel nélküli optimalizálási feladatok megoldása gradiens módszerrel
28. a konjugált gradiens módszerek összevetése nemlineáris feltétel nélküli optimalizálási feladatokon
29. automatikus differenciálás az INTLAB csomaggal\*
30. korlátozás és szétválasztás módszere nemlineáris feltételes optimalizálási feladatok megoldására
31. az intervallum aritmetika használata nemlineáris optimalizálásra az INTLAB csomaggal\*

\* Az így megjelölt feladatok megítélésem szerint nehezebbek: aki jobb jegyet ambicionál, annak érdemes ilyent választania, bár az egyszerűbbeket is lehet gyönyörűre megírni...

# Tartalomjegyzék

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Előszó</b>   | <b>3</b>  |
| <b>Jelölések</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1. Bevezetés</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1. Intervallum matematika . . . . .   | 8         |
| 1.1.1. Intervallum-aritmetika és a befoglaló függvények . . . . .             | 8         |
| 1.1.2. Intervallum-felosztási algoritmus . . . . .                            | 12        |
| 1.1.3. Intervallumos Newton módszer . . . . .                                 | 13        |
| 1.1.4. Példák . . . . .   | 15        |
| 1.2. Automatikus differenciálás . . . . .                                     | 17        |
| 1.2.1. Deriváltak a számítógépeken . . . . .                                  | 17        |
| 1.2.2. Az ötlet. . . . .  | 19        |
| 1.2.3. Kiterjesztések. . . . .  | 20        |
| 1.2.4. Az automatikus differenciálás két változata. . . . .                   | 20        |
| 1.2.5. Művelet- és tárigény. . . . .  | 21        |
| 1.2.6. Az automatikus differenciálás veszélyei. . . . .                       | 22        |
| 1.2.7. Az automatikus differenciálás implementálása. . . . .                  | 23        |
| 1.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                       | 24        |
| <b>2. A hátizsák feladat</b>  | <b>27</b> |
| 2.1. A hátizsák feladat megoldása teljes leszámolással . . . . .              | 27        |
| 2.2. A hátizsák feladat megoldása közvetett, implicit leszámolással . . . . . | 28        |
| 2.3. Kapcsolódó feladatok . . . . .   | 30        |
| 2.4. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                       | 32        |
| <b>3. Az utazó ügynök feladat</b>   | <b>35</b> |
| 3.1. Az utazó ügynök feladat heurisztikus algoritmusai . . . . .              | 39        |
| 3.1.1. A távolságvektor szerepe a heurisztikákban . . . . .                   | 41        |
| 3.1.2. A heurisztikus algoritmusok hatásossága vizsgálata . . . . .           | 42        |
| 3.2. Az utazó ügynök feladat megoldása Matlabbal . . . . .                    | 43        |
| 3.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                       | 45        |
| <b>4. A szabási feladat</b>   | <b>47</b> |
| 4.1. Az oszlopgenerálás módszere a szabási feladatra . . . . .                | 49        |
| 4.2. Heurisztikák a szabási feladatra . . . . .                               | 51        |
| 4.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                       | 53        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>5. Hálózati problémák</b>   | <b>55</b>  |
| 5.1. A legrövidebb út probléma . . . . .                                   | 55         |
| 5.2. A maximális folyam probléma . . . . .                                 | 56         |
| 5.3. A Ford-Fulkerson eljárás a maximális folyam meghatározására . . . . . | 58         |
| 5.4. Projektek ütemezése, CPM . . . . .                                    | 60         |
| 5.5. Program kiértékelés és felülvizsgálat, PERT . . . . .                 | 66         |
| 5.6. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                    | 69         |
| <b>6. Sztochasztikus programozás</b>                                       | <b>71</b>  |
| 6.1. Az újságárus probléma . . . . .                                       | 72         |
| 6.2. A folytonos keresletű újságárus probléma . . . . .                    | 75         |
| 6.3. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                    | 76         |
| <b>7. Gradiens módszer</b>   | <b>77</b>  |
| 7.1. Konjugált gradiens módszer . . . . .                                  | 79         |
| 7.2. Ellenőrző kérdések és gyakorló feladatok . . . . .                    | 83         |
| <b>8. A korlátozás és szétválasztás módszere</b>                           | <b>85</b>  |
| 8.1. Körpakolási feladatok . . . . .                                       | 88         |
| <b>Irodalomjegyzék</b>   | <b>91</b>  |
| <b>Tárgymutató</b>   | <b>93</b>  |
| <b>Magyar-angol szószedet</b>  | <b>97</b>  |
| <b>Függelékek</b>  | <b>99</b>  |
| <b>A. Tematika</b>   | <b>99</b>  |
| <b>B. Mintafeladatok a dolgozatokhoz</b>                                   | <b>101</b> |
| 2.1. A tudásfelmérő dolgozat feltételei . . . . .                          | 104        |
| <b>C. Bevezetés a MATLAB használatába</b>                                  | <b>105</b> |
| Aritmetikai műveletek és függvények . . . . .                              | 105        |
| Műveletek mátrixokkal . . . . .  | 107        |
| Megjelenítés . . . . .   | 109        |
| Programok, ciklusok, vezérlés . . . . .                                    | 111        |
| <b>D. Az esszé, illetve kötelező program követelményei, témák</b>          | <b>115</b> |
| <b>E. Egy minta esszé</b>  | <b>121</b> |
| <b>F. Az előadás fóliái</b>  | <b>137</b> |
| 1. óra . . . . .   | 137        |
| 2. óra . . . . .   | 147        |
| 3. óra . . . . .   | 156        |
| 4. óra . . . . .   | 164        |
| 5. óra . . . . .   | 172        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>TARTALOMJEGYZÉK</b>                               | <b>245</b> |
| 6. óra . . . . .                                     | 182        |
| 7. óra . . . . .                                     | 191        |
| 8. óra . . . . .                                     | 199        |
| 9. óra . . . . .                                     | 205        |
| 10. óra . . . . .                                    | 211        |
| 11. óra . . . . .                                    | 219        |
| 12. óra . . . . .                                    | 224        |
| <b>G. Kiegészítő szorgalmi feladatok</b>             | <b>233</b> |
| <b>H. A 2002-es SIAM numerikus verseny feladatai</b> | <b>237</b> |
| <b>I. A standard normális eloszlás táblázata</b>     | <b>239</b> |
| <b>J. Kötelező program témák</b>                     | <b>241</b> |
| <b>Tartalomjegyzék</b>                               | <b>243</b> |