Gyakorló feladatok

2006. november 7.

1. Feladatok

1. (Korongrendezés)
   Reprezentáld a következő problémát!

   Adott $n \in \mathbb{N}$ és $k \leq n^2$, valamint k darab 1 átmérőjű korong a $[0, n+1] \times [0, n+1]$ négyzeten $q_1, \ldots, q_k$ középpontokkal úgy, hogy azok nem lógnak egymásra, és nem lógnak túl. Egy lépésben egy korongot emelhetünk fel és tehetünk át egy másik helyre, de csak úgy, hogy lerakás után is fennálljon a fenti tulajdonság. Célunk a mozgatások össztávolságát minimalizálva úgy átrendezni a korongokat, hogy végül mindnek rácsponton legyen a középpontja.

2. (Szétszóródott Hanoi-tornyok)
   Reprezentáld a következő problémát!

   Adott egy gráf, melynek csúcsaiba 1-1 tányér van lerakva. A tányérok tömege (dkg-ban megadva) 1 és k közötti egész szám, és tudjuk, hogy mindenféle tányér előfordul legalább egyszer. Egy tányért csak akkor tudunk felvenni, ha nagyobb tányér még nincs nálunk. Célunk a v_o csúcsból elindulva k darab különböző súlyú tányér összegyűjtése a lehető legkisebb összmunkával, ahol egy élen átjutni $w_1, \ldots, w_t$ súlyú tányérokkal a kezünkben $w_1 + \ldots + w_t$-vel arányos munkavégzéssel jár.

3. (Doboz világ)

   (a) Reprezentáld a következő problémát!
   Adott négy raklap, azokon pedig különböző színű dobozok egymás

tetejére rakva a következőképpen:

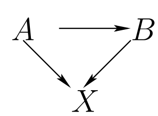
$$\begin{array}{cccc} & k & k & \\ & z & z & z \\ p & p & z & p \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \end{array}$$

A betűk a ládák színét jelentik (p: piros, k: kék, z: zöld). Egy lépésben egy dobozt lehet átrakni egy oszlop tetejéről egy másik oszlop tetejére. A cél: minél kevesebb lépésből elérni, hogy egy-egy oszlop csak azonos színű dobozokból álljon.

(b) Adj minél jobb megengedhető (nem-konstans!) heurisztikát a fenti problémához!

4. (Szerencsejáték) Egy adott játékban a játék kimenetelére (X) fogadhatunk egy dollárban. X a játék két paraméterétől, A-tól és B-től a lenti Bayes-hálóban megadott módon függ. (X és A a 0 és 1 értékeket vehetik fel, míg B a 0, 1 és 2 értékeket.) A játék során először választanunk kell a két paraméter közül egyet, annak értékét megmondja nekünk a játékmester, majd ezek után meg kell tippelnünk X értékét. Ha eltaláltuk, nyerünk 1 dollárt, ha nem, veszítünk egyet. Mely paraméter választásával maximalizáljuk nyereményünk várható értékét, és mennyi lesz ez az érték?

$\mathbb{P}(A = 0) = 0,7$



a	$\mathbb{P}(B = 0 \mid A = a)$
0	0,4
1	0,1

a	b	$\mathbb{P}(X{=}0 \mid A{=}a, B{=}b)$
0	0	0,6
0	1	0,2
1	0	0,5
1	1	0,6

5. Mutasd meg rezolúciót alkalmazva, hogy az $(x \vee \overline{y}), (y \vee \overline{z}), (z \vee \overline{x})$ és $(x \vee y \vee z)$ formuláknak logikai következménye $x \wedge y \wedge z$!

2. Megoldások

1. Jelölje $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ az Euklideszi távolságot.

$$S := \left\{(p_1,\dots,p_k) : p_1,\dots,p_k \in \left[\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right]^2 \ \&\ i \neq j \Rightarrow d(p_i,p_j) \geq 1\right\},$$

$$s := (q_1,\dots,q_k),$$

$$C := \big\{(p_1,\dots,p_k) \in S : p_i \in \mathbb{N}^2\big\},$$

$$\mathrm{Op} := \{(P,Q) : P,Q \in S \ \&\ P \vdash Q\},$$

ahol $P = (p_1,\dots,p_k) \in S$ és $Q = (q_1,\dots,q_k) \in S$ esetén $P \vdash Q$ akkor és csakis akkor, ha van olyan $i \in \{1,\dots,k\}$, hogy $p_j = q_j$, $j = 1,\dots,i-1,i+1,\dots,k$. Ezen P, Q pár esetén az átmenet költsége

$$\mathrm{KTG}(P,Q) := d(p_i,q_i).$$

2. Legyen a feladatban adott gráf (V,E), és legyen $\ell : V \to \{1,\dots,k\}$ az a függvény, melynek értéke egy $v \in V$ pontban megadja a csúcsban lévő tányér súlyát.

$$\begin{aligned} S &:= V \times \{0,\dots,k\},\\ s &:= (v_0, k+1),\\ C &:= V \times \{1\},\\ \mathrm{Op} &:= \{(a,b) \in S \times S : a \vdash b\}, \end{aligned}$$

ahol $a = (v,i) \vdash b = (u,j)$ akkor és csakis akkor, ha $(v,u) \in E$, és $i = j$ vagy $i+1 = j = \ell(v)$. Végül

$$\mathrm{KTG}\big((v,i),(u,j)\big) := j(j+1)/2.$$

3. (a) Legyen $\Sigma = \{p,k,z\}$, és jelölje λ az üres szót. Jelölje továbbá szimbólumok egy tetszőleges Q (véges) halmaza esetén Q^* a Q elemeiből képezhető összes véges hosszúságú szó halmazát.

$$\begin{aligned} S &:= \{(w_1,w_2,w_3,w_4) : w_i \in \Sigma^*\},\\ s &:= \lambda,\\ C &:= \Big\{(w_1,w_2,w_3,w_4) : w_i \in \{p\}^* \cup \{k\}^* \cup \{z\}^*\Big\},\\ \mathrm{Op} &:= \{(w,u) \in S \times S : w \vdash u\}, \end{aligned}$$

ahol $(w_1, w_2, w_3, w_4) \vdash (u_1, u_2, u_3, u_4)$, ha van olyan $1 \leq i, j \leq 4$, illetve $\alpha \in \{p, k, z\}$, hogy

- $w_i = u_i\alpha$
- $w_j\alpha = u_j$
- $w_k = u_k$, $k \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$.

Végül pedig

$$\mathrm{KTG} \equiv 1.$$

(b) $h'\Big((w_1, w_2, w_3, w_4)\Big) = \sum_{i=1}^{4} \mathcal{I}(w_i)$, ahol $\mathcal{I}(w)$ azt mutatja meg, hogy w jobb oldalátol milyen messze van a legtávolabbi olyan elem, ami különbözik jobb oldali szomszédjától. Ha nincs ilyen elem, akkor $\mathcal{I}(w)$ értéke legyen 0.

4. $B=0$ illetve $B=1$ események valószínűsége:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B=0)=&\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=0|A=a)\\ =&0,7\cdot 0,4+0,3\cdot 0,1=0,31\\ \mathbb{P}(B=1)=&1-\mathbb{P}(B=0)=0,69\end{aligned}$$

Most számoljuk ki, hogy a különböző paraméterek értékének ismeretében mi az alkalmazandó stratégia!

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|B=0)=\mathbb{P}(X=0,B=0)/\,\mathbb{P}(B=0)=\\ &\quad=\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a,B=0,X=0)/0,31=\\ &\quad=\frac{1}{0,31}\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=0|A=a)\,\mathbb{P}(X=0|A=a,B=0)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,4\cdot 0,6+0,3\cdot 0,1\cdot 0,5}{0,31}=\frac{0,183}{0,31}\approx 0,5903,\end{aligned}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|B=1)=\mathbb{P}(X=0,B=1)/\,\mathbb{P}(B=1)=\\ &\quad=\frac{1}{0,69}\sum_{a\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=a)\,\mathbb{P}(B=1|A=a)\,\mathbb{P}(X=0|A=a,B=1)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,6\cdot 0,2+0,3\cdot 0,9\cdot 0,6}{0,69}=\frac{0,246}{0,69}\approx 0,3565,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|A=0)=\mathbb{P}(X=0,A=0)/\,\mathbb{P}(A=0)=\\ &\quad=\frac{1}{0,7}\sum_{b\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=b|A=0)\,\mathbb{P}(X=0|A=0,B=b)=\\ &\quad=\frac{0,7\cdot 0,4\cdot 0,6+0,7\cdot 0,6\cdot 0,2}{0,7}=\frac{0,252}{0,7}=0,36,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=0|A=1)=\mathbb{P}(X=0,A=1)/\,\mathbb{P}(A=1)=\\ &\quad=\frac{1}{0,3}\sum_{b\in\{0,1\}}\mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=b|A=1)\,\mathbb{P}(X=0|A=1,B=b)=\\ &\quad=\frac{0,3\cdot 0,1\cdot 0,5+0,3\cdot 0,9\cdot 0,6}{0,3}=\frac{0,177}{0,3}=0,59,\end{aligned}$$

tehát $B = 0$ és $A = 1$ esetén az $X = 0$-ra érdemes tippelnünk, míg $B = 1$ és $A = 0$ esetén az $X = 1$-re. Jelölje Y_B nyereményünket a B paramétert válsztva és a fenti stratégiát alkalmazva (azaz $B = 0$ esetén $X = 0$-ra tippelve, $B = 1$ esetén pedig $X = 1$-re), Y_A pedig jelölje hasonlóképpen nyereményünket az A paremétert válszatva (azaz most $A = 0$ esetén $X = 1$-re tippelve, $A = 1$ esetén pedig $X = 0$-ra). A két stratégia esetén tehát nyereményünk várható értéke (felhasználva a $\mathbb{P}(X = x, Z = z) = \mathbb{P}(X = x|Z = z)\,\mathbb{P}(Z = z)$ összefüggést)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_B) =& 1 \cdot \mathbb{P}(X = 0, B = 0) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 1, B = 0)+\\ &+ (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 0, B = 1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1, B = 1) =\\ =& 0,31 \cdot \left(\frac{0,183}{0,31} - \frac{0,127}{0,31}\right) + 0,69 \cdot \left(-\frac{0,246}{0,69} + \frac{0,444}{0,69}\right) =\\ =& 0,056 + 0,198 = 0,254,\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_A) =& (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 0, A = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1, A = 0)+\\ &+ 1 \cdot \mathbb{P}(X = 0, A = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = 1, A = 1) =\\ =& 0,7 \cdot (-0,36 + 0,64) + 0,3 \cdot (0,59 - 0,41) =\\ =& 0,196 + 0,054 = 0,25.\end{aligned}$$

Tehát a B paraméter értékét érdemesebb megnéznünk.

Megjegyzés: ha egyik paramétert se nézzük meg, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) =& \mathbb{P}(X = 0|B = 0)\,\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(X = 0|B = 1)\,\mathbb{P}(B = 1) =\\ =& 0,183 + 0,246 = 0,429\end{aligned}$$

miatt az optimális döntés az $X = 1$ eseményre tippelni. Ekkor nyereményünk várható értéke

$$\mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 0) = 0,571 - 0,429 = 0,142$$

dollár lesz.

5. Az $(x \vee \overline{y})$, $(y \vee \overline{z})$, $(z \vee \overline{x})$ és $(x \vee y \vee z)$ formuláknak pontosan akkor logikai következménye $x \wedge y \wedge z$, ha az $(x \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{z}) \wedge (z \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$ formula kielégíthetetlen. Ez utóbbi rezolúciós bizonyítása a lenti ábrán követhető.