

Magyar Tudományos Akadémia Doktora értekezés tézisei

**Egy folytonos logikai osztály és alkalmazása a
többtényezős döntések területén:
rugalmas rendszerek**

Dombi József

Szeged, 2009. február

Tartalomjegyzék

1. Az értekezés célkitűzései	1
2. A tudományos kutatások során alkalmazott módszerek	4
3. Az értekezésben közölt tudományos eredmények összefoglalása	5
3.1. DeMorgan azonosságok vizsgálata	5
3.1.1. Főbb eredmények:	8
3.2. Aggregáció	8
3.2.1. Főbb eredmények:	10
3.3. Operátorok súlyozása	10
3.3.1. Főbb eredmények:	11
3.4. Származtatott operátorok: implikáció és preferencia	12
3.4.1. Főbb eredmények:	13
3.5. Felfújó (distending) függvény	13
3.5.1. Főbb eredmények:	14
3.6. Bizonytalanság mértéke	15
3.6.1. Főbb eredmények:	15
3.7. Operátor családok	16
3.7.1. Főbb eredmények:	17
3.8. Rugalmas rendszer egy alkalmazása	18
3.8.1. Főbb eredmények:	18
Irodalomjegyzék	19

1. fejezet

Az értekezés célkitűzései

A számítási intelligens módszerek egyre jelentősebb szerepet játszanak a műszaki rendszerek létrehozásában, működtetésében. Az utóbbi évtizedben olyan számítástechnikai modellek és technikák születtek, amelyekkel a megnövekedett bonyolultsági rendszerek mérnöki szempontból kezelhetőek. A fuzzy elmélet (amely már 40 éves múltra tekint vissza) jelentős szerepet játszik ezen feladatok műszaki megoldásaiban. Napjainkban az elmélet teljesen szerteágazó diszciplínává vált és szoros kapcsolatban van a folytonos illetve a többértékű logikával. Az alkalmazás szempontjából különösen hasznosnak bizonyult a szigorú monoton tulajdonsággal rendelkező operátorokhoz kapcsolódó irányzatok: így a fuzzy irányításhoz [H18], [H59], lekérdezésekhez [H19], szabály alapú rendszerekhez [H4], neurális hálókhoz [H38], stb.

A szigorúan monoton logikai operátorok és belső összefüggéseik elméleti szempontból még mindig részben feltáratlanok és a következő kérdések merülnek fel:

1. A negációra vonatkozólag Trillas [H82] adott egy általános reprezentációs tételt. A negáció ilyen formában azonban alkalmatlan a szigorú monoton operátorokra való alkalmazásra. A DeMorgan azonosság vizsgálata adhat lehetőséget a negáció meghatározására szigorú monoton operátorok esetén. A negáció ilyen reprezentációs tétele szükséges egy egységes logikai rendszer felépítéséhez, de ilyen irányú eredmény hiányzik.
2. Az intelligens rendszerek nem csak a logikához kapcsolódnak, hanem a nem-logikai művelet az aggregáció is része, ugyanúgy mint a preferencia. Ezen műveletek is a szigorú monoton logikai operátorok kapcsolata beleértve a negációt is, feltáratlan terület. A preferencia és az aggregáció a többtényezős döntések fogalmi struktúrájához tartozik. Az általános vizsgálat tárgya lehet tehát a logikai és döntési operátorok kapcsolata.
3. A folytonos logika alapját képező konjunkció, diszjunkció és negációs operátor mellett az implikáció is fontos szerepet játszik, és a diszjunkció és negáció meghatározza, szigorú monoton operátorok esetén az implikáció legfontosabb tulajdonsága nem teljesül: az azonosság elve:

$$x \rightarrow y = 1 \quad \text{iff} \quad x \leq y$$

A folytonos és többértékű logikába (és fuzzy elméletbe) az azonosság elveinek eleget tevő implikáció bevezethető (rezidu-ális implikáció [H26], [H65]), azonban ez nem folytonos. Kérdés hogy másképp lehetséges az azonosság elvét - akár csak részben megőrző implikációt - bevezetni, úgy, hogy a diszjunkcióval és negációval való kapcsolat is megmaradjon?

4. A többtényezős döntéseknél a súlyozás (fontosság) fogalma meghatározó. A szigorú monoton operátorok súlyozására több megoldás született. Az általánosított közepesek [H31] vizsgálatai segítségével jellemezhetőek, másrészt Kolmogorov [H37] és Nagumo [H56] matematikai tulajdonságokkal bizonyította előállításukat. Többtényezős döntési szempontból azonban nincs leírásuk. A szigorú monoton logikai és döntési operátorok súlyozása csak úgy lenne megoldható, ha döntésekre vonatkozó tulajdonságokkal jellemeznénk.
5. A fuzzy elmélet kulcsfogalma a halmazhoztartozási függvény (membership function). Ezen fogalom értelmezése váltja ki a legtöbb vitát. Az operátor struktúrák és a halmazhoztartozási függvények kapcsolata ugyanis nem tisztázott. Egy egységes elmélet kialakításának szempontjából elengedhetetlenül szükséges lenne ilyen irányú vizsgálatokra.
6. Abban egyetértés van, hogy a halmazhoztartozási függvény a bizonytalanság leírását adja. A bizonytalanság mérésére a fuzziság mértéket vezették be, ami operátor és halmazhoztartozási függvénytől független, ezért egy operátorokkal felírt kifejezés fuzziság mértékére nem lehet becslést adni (ismerve a bemenő adatok fuzziságát). Reményteljes a tétel felállítása és bizonyítása, ha operátor és bizonytalanság mérték összekapcsolható, azaz az operátor indukálja a mértéket, ekkor azonban bizonytalanság mértéket kell bevezetni.
7. A szigorú monoton operátorok izomorfak és az izomorfiát biztosító generátor függvény alakja adja meg speciális alakjukat. A gyakorlatban alkalmazott operátor családok száma csak néhány nevezetesen korlátozódik és ezért nagy jelentősége van az operátor generátor függvényének megválasztásának. Külön jelentősége lenne olyan paraméteres operátor családok konstruálásának, amelyeknél a paraméter változtatás a leggyakrabban alkalmazott operátorokat speciális esetként tartalmazná és szorosan kapcsolódva a többtényezős döntésekhez.
8. A folytonos logikai operátorok az alkalmazás szempontjából különösen fontosak. Ha analitikus tulajdonságokkal rendelkeznek (többszörösen differenciálhatók), akkor optimalizálásra (gradiens képzés lehetősége miatt) alkalmasak. A tanuló algoritmusok - ami manapság az egyik fő kutatási irány és gyakran paraméterek optimalizálására vezethetők vissza - jól modellezhetőek ezen operátor családdal. Vizsgálat tárgya, hogy vajon az egyik leggyakrabban használt heurisztikus tanuló algoritmus, a döntési fák képzése milyen formulizmussal írható le szigorú monoton operátorokkal.

Az értekezésben a felmerült (1-8) feladatok vizsgálata történt meg.

Az értekezésben az 1-7. fejezetben tárgyalt összes eredmény a szerző eredménye. A 8. fejezetben a szerző munkája volt meghatározó.

A kialakított operátorstruktúra részletes elemzése és gyakorlati alkalmazásai megtalálhatók a www.inf.u-szeged.hu/~dombi/dr/book.pdf oldalon.

A doktori értekezés ennek lényeges részeit tartalmazza.

Az értekezésben bemutatom a szigorú monoton folytonos logika egy felépítési lehetőségét, ahol a konjunkciós és diszjunkciós operátor generátor függvényeik reciprokos összefüggésben állnak (rugalmas rendszer). Ebben az osztályban az aggregációs, preferencia, implikáció, bizonytalansági mérték egységesen kezelhető.

Az értekezés eredményei gyakorlati szempontból alkalmazhatóak. A DataScope adatbányászati szoftverért a szerző 1997-ben az Európai Információ Technológiai díjat vette át az akkori Európai Unió elnökétől. Hasonló kitüntetésben eddig csak két magyarországi szoftver részesült (Graphisoft és Recognita). Ugyanez a szoftver az Egyesült Államokban 1999-ben az év legjobb szoftver díját kapta, ahol a Microsoft Office lett a 2. helyezett.

A szerző 3 szabadalmat jegyez, amelyből kettőt a Nokia kutatóival nyújtott be. A harmadik szabadalom az értekezés 8. fejezetének eredményeivel kapcsolatos és a bőrelváltások diagnózisára vonatkozik.

A 3.2 fejezet eredményét, a szerző által bevezetett operátort melynek általánosítása a 3.7 fejezetben található, Dombi operátorként monográfiák is tartalmazzák. (Így megtalálható a Bronstein-Szemengyajev matematikai kézi-könyvben.) A Wolfram internetes matematikai enciklopédiában és a Mathematica7 szoftverben is Dombi operátorként szerepel.

Az értekezésben tárgyalt rugalmas rendszerek egy másik gyakorlati alkalmazása a protein osztályozásban való használat [S11] (3.4 fejezet eredménye).

Mobilszolgáltatások elégedettségének vizsgálatára az aggregációs operátort használtuk [S1].

A hangfelismerésben való sikeres alkalmazása a [S10]-ben található meg.

Többtényezős döntések területén [S21] való alkalmazásokkal foglalkoznak az alábbiak: [S3], [S9], [S21], [S22], [S29].

Az Európai Űrügynökség (ESA) számára a Bécsi Egyetemmel együttműködve a szerző részvételével egy 100 oldalas tanulmány [H57] és prototípus szoftver készült, ami a Neumaier által bevezetett felhő (cloud) koncepción [H58] alapul és a rajta végzett adequat műveletek a Dombi operátorok.

2. fejezet

A tudományos kutatások során alkalmazott módszerek

Az értekezésben közölt eredmények jelentős része a matematikai kutatás eszköztárát használja. A tételek nagy része függvényegyenletek megoldására vezethetők vissza, de az egyenlőségek és azok vizsgálata is megjelenik a 6. fejezetben.

Az operátor struktúra felépítése során ügyeltünk arra, hogy azok egységes rendszert alkossanak és a kapcsolataikat megfelelő tételek biztosítsák. Ezáltal a konjunkcióhoz és a diszjunkcióhoz a negációt a DeMorgan azonosság kapcsolja össze (1. fejezet).

Az aggregáció generátor függvénye szorosan kapcsolódik a konjunkcióhoz és diszjunkcióhoz, mert az additív reprezentáció generátor függvényét reprezentációként szorzat alakban felírva kapjuk az aggregációt. Az így kapott aggregációból származtatott negáció (ön-DeMorgan tulajdonság) alapján ugyanazt a negációt adja meg mint a korábban bevezetett logikai operátorokból származtatott negáció. Az implikáció, preferencia szintén ebből az operátorosztályból származtatható, ugyanúgy mint a bizonytalanság mérték (vagueness measure). Így egyetlen generátor függvényből származtatható az összes operátor beleértve a bizonytalanság mérték is.

Az egységes struktúra tette lehetővé, hogy egy operátorokból alkotott kifejezés változásainak bizonytalanság mértéke becslési alapot szolgáltatson az egész kifejezés értékének bizonytalansági mértékéhez.

A pliant rendszer speciális esete a szerző által az irodalomban Dombi operátorként ismert műveleteknek [S38], illetve az általa bevezetett aggregációnak is [S37].

Az alkalmazás során az ID3 algoritmusának adaptálását végeztük el (8. fejezet), ügyelve a lépésenkénti megfelelésre.

3. fejezet

Az értekezésben közölt tudományos eredmények összefoglalása

3.1. DeMorgan azonosságok vizsgálata

A folytonos logika (fuzzy elmélet) szigorú monoton operátorai asszociatívak és mivel a szigorú monotonitás érvényes csoport struktúrát alkot [H28], amit az asszociatív függvényegyenlet megoldása is tükröz [H3].

$$h(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

Logikai operátorok esetén a következő feltételeinknek eleget tevő operátorokat vizsgáltuk:

1. $c: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ folytonos
2. Szigorúan monoton
 $c(x, y) < c(x, y')$ if $y < y'$ $x \neq 0$
3. Kompatibilitás a kétértékű logikával
 $c(0,0) = 0$ $c(1,1) = 1$
 $c(0,1) = 0$ $c(1,0) = 0$
4. Asszociatív
 $c(x, c(y, z)) = c(c(x, y), z)$
5. Arkhimedeszi
 $c(x, x) < x$.

A diszjunkció esetében a kompatibilitási feltétel értelemszerűen változik és az Arkhimedeszi-ségre

$$d(x, x) > x$$

feltétel teljesül.

A logikai operátorok esetében ha $f_c(x)$ jelöli a konjunkciós és $f_d(x)$ a diszjunkciós operátort, akkor érvényes:

- | | |
|---|--|
| 1. f_c folytonos, | f_d folytonos, |
| 2. f_c szigorúan monoton csökkenő, | f_d szigorúan monoton növekvő, |
| 3. $f_c: (0,1] \rightarrow R^+$, | $f_d: [0,1) \rightarrow R^+$, |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x) = \infty$, | $\lim_{x \rightarrow 1} f_d(x) = \infty$, |
| 5. $f_c(1) = 0$, | $f_d(0) = 0$. |

Egy n -változós konjunktív illetve diszjunktív operátor alakja:

$$c(\mathbf{x}) = f_c^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_c(x_i) \right)$$

$$d(\mathbf{x}) = f_d^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_d(x_i) \right)$$

A konjunkció és diszjunkció súlyozott általánosítása:

$$c(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = f_c^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i f_c(x_i) \right)$$

$$d(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = f_d^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i f_d(x_i) \right)$$

A negációra a következő feltételezéseket tesszük:

- C1: $\eta: [0,1] \rightarrow [0,1]$ folytonos
 C2: Szigorúan monoton csökkenő
 $\eta(x) < \eta(y)$ for $x > y$
 C3: Kompatibilis a kétértékű logikára
 $\eta(0) = 1, \eta(1) = 0$
 C4: Involutív
 $\eta(\eta(x)) = x$

A negáció jellemezhető a fixpontjával és a döntési küszöbvel

$$\eta(\nu_*) = \nu_*$$

ahol ν_* a fixpont. Legyen ν_0 neurális érték és ν ahol ezt az értéket felveszi

$$\eta(\nu) = \nu_0.$$

A következő tétellel megmutattuk, hogy a DeMorgan azonosság meglepte milyen összefüggést követel meg a generátor függvényektől ha az általánosított konjunkciót és diszjunkciót alkalmazzuk.

3.1. Tétel. *Az általánosított DeMorgan azonosság akkor és csak akkor teljesül, ha*

$$f_c^{-1}(x) = \eta(f_d^{-1}(ax)) \quad a \in R^+$$

Így ha adott $f_d(x)$ és $\eta(x)$, képezhető $f_c(x)$, hogy a három operátor DeMorgan osztályt alkosson. $\eta(x)$ -re a következő összefüggést kaptuk:

3.2. Tétel.

$$\begin{aligned} \eta(x) &= f_d^{-1} \left(\frac{f_d(\nu_*)}{f_c(\nu_*)} f_c(x) \right), \\ \eta(x) &= f_c^{-1} \left(\frac{f_c(\nu_*)}{f_d(\nu_*)} f_d(x) \right). \end{aligned}$$

A következő tétellel azt mutattuk meg, hogy $\eta(x)$ ami a DeMorgan azonosságból származtatható, mikor involutív:

3.3. Tétel. *$\eta(x)$ akkor és csak akkor lehet involutív, ha*

$$f_c(x) = k(f_d(x)),$$

ahol $k : R^+ \rightarrow R^+$ is szigorúan monoton csökkenő és $k(k(x)) = x$.

$k(x)$ segítségével $\eta(x)$ kifejezhető:

3.4. Tétel.

$$\eta(x) = f^{-1}(k(f(x)))$$

ahol $f(x) = f_c(x)$ vagy $f(x) = f_d(x)$, a negáció ugyanaz.

Tehát $k(x)$ segítségével operátortól független negációt kaptunk.

A negáció reprezentáció tételére Trillas [H82] mondott ki tételt, ami szerint minden negáció előállítható

$$\eta(x) = f^{-1}(1 - f(x)),$$

ahol $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ szigorú monoton függvény. A generátor függvény teljesen más alakú, mint a szigorú monoton osztály operátorai. Így itt ezen a területen nem alkalmazható. Megmutattuk, hogy

3.5. Tétel. *Minden negáció reprezentálható*

$$\eta(x) = f^{-1}(k(f(x)))$$

alakban, ahol $f(x)$ konjunkciós vagy diszjunkciós generátor függvény alakú és

$$k(k(x)) = x.$$

$k(x)$ speciális választása esetén kaptuk a rugalmas rendszer (pliant) operátorokat.

3.6. Definíció. Az operátor rendszer pliant, ha

$$k(x) = \frac{1}{x}.$$

Ami ekvivalens azzal, hogy:

$$f_c(x)f_d(x) = 1.$$

A rugalmas rendszerre a következő tétel érvényes:

3.7. Tétel. Legyen

$$o_\alpha(x, y) = f^{-1} \left((f^\alpha(x) + f^\alpha(y))^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

ahol $f(x) = f_c(x)$. Ekkor

$$\eta_{\nu, \nu_0}(x) = f^{-1} \left(f(\nu_0) \frac{f(\nu)}{f(x)} \right)$$

$$\eta_{\nu_*}(x) = f^{-1} \left(\frac{f^2(\nu_*)}{f(x)} \right)$$

és

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 & \quad o_\alpha(x, y) = c(x, y) \\ \alpha \leq 0 & \quad o_\alpha(x, y) = d(x, y) \\ \alpha = \infty & \quad o_{+\infty}(x, y) = \min(x, y) \\ \alpha = -\infty & \quad o_{-\infty}(x, y) = \max(x, y) \end{aligned}$$

3.1.1. Főbb eredmények:

- A DeMorgan azonosság szükséges és elégséges feltételének megadása.
- A negáció szigorú monoton operátok esetén való reprezentációjának megadása.
- A pliant (rugalmas) rendszer megadása és egyetlen generátor függvény segítségével való reprezentálhatósága.

3.2. Aggregáció

Az aggregáció első fogalmának bevezetése 1982-ben [S37]. Több mint 10 évvel később uninorma névvel újra felfedezték és általánosították. Az aggregáció nem logikai operátor és legfőbb jellemzője, hogy ön-DeMorgan, azaz:

$$\eta(a(x, y)) = a(\eta(x), \eta(y)).$$

Mivel az asszociativitás feltételezett, ezért

$$a(x, y) = f_a^{-1} (f_a(x) + f_a(y))$$

alakban előáll, ahol a generátor függvényre érvényes, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

Az asszociatív függvényegyenlet additív reprezentációja mellett egyrészt át lehet térni a multiplikatívra, ekkor

$$a(x, y) = f_a^{-1}(f_a(x)f_a(y)).$$

A multiplikatív reprezentációban $f_a(x)$ generátor függvény alakja megegyezik a konjunkció illetve a diszjunkció másrészt az ön-DeMorgan tulajdonságból látható, hogy az aggregáció és a negáció sorosan kapcsolódik.

Megmutattuk, hogy az aggregációból származtatott negációra érvényes:

3.8. Tétel.

$$\eta(x) = f_a^{-1}\left(\frac{f_a^2(\nu_*)}{f_a(x)}\right),$$

Ha a konjunktív és diszjunktív operátorból indulunk ki, akkor a multiplikatív reprezentációt használva aggregációs operátorokat kapunk. (Az így kapott operátorokat Pan-operátoroknak ismeri az irodalom [H49].)

Kérdésként merül fel, hogy az így kapott aggregációk mikor azonosak.

3.9. Tétel. *Legyen $f_c(x)$ és $f_d(x)$ a konjunktív és diszjunktív operátor additív generátor függvénye. A hozzá társított $a_c(x, y)$ és $a_d(x, y)$ akkor és csak akkor azonos, ha*

$$f_d(x) = f_c^k(x)$$

ahol k negatív konstans.

Ha megköveteljük, hogy $a_c(x, y)$ és $a_d(x, y)$ -hoz társított negációk is azonosak legyenek, továbbá ezen $c(x, y)$ és $d(x, y)$ erre a negációra DeMorgan osztályt alkosson, akkor

$$k = -1,$$

azaz egy ilyen rendszer rugalmas (pliant) rendszert alkot. Ezzel megadtuk a rugalmas rendszer szükséges és elegendő feltételeit.

Az aggregáció másképp is kapcsolódik a logikai operátorokhoz:

A társított negáció neutrális értéke feletti rész diszjunkciós operátorként viselkedik, a neutrális érték alatti rész pedig konjunkciós. Az aggregáció így konjunkciós döntési operátor, ha $\nu = 1$ és diszjunkciós, ha $\nu = 0$.

Az aggregációval eltolási transzformációval logikai műveletek végezhetők. Az értékek neutrális érték fölé transzformálva majd elvégezve az aggregációt és visszatranszformálva diszjunkciót hajthatunk végre. Lefelé való transzformálással pedig hasonló módon konjunkciót kaphatunk.

Megmutattuk, hogy a transzformáció az alábbi alakú:

3.10. Tétel. Az aggregációból konjunkció és diszjunkció transzformáltja

$$t_\alpha(x) = f^{-1} \left(e^{\beta f^\alpha(x)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

alakú, ahol $\beta \neq 0$ és α előjele határozza meg a művelet típusát.

($\alpha > 0$ konjunkció, $\alpha < 0$ diszjunkció)

Ha $f(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^\alpha$ generátor függvény a Dombi operátort adja, így

$$o_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1-x_i}{x_i} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \quad \alpha > 0 \text{ konjunkciós operátor}$$

$\alpha < 0$ diszjunkciós operátor

$$a(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \prod_{i=1}^n \frac{1-x_i}{x_i}} \quad \text{aggregációs operátor}$$

$$\eta(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\nu_*}{\nu_*} \right)^2 \frac{x}{1-x}} \quad \text{negációs operátor}$$

3.2.1. Főbb eredmények :

- Az aggregáció származtatása logikai operátorokból.
- Az aggregáció és a negáció kapcsolata.
- Aggregáció segítségével logikai műveletek nyerhetők.
- Rugalmas rendszer jellemzésére operátorok kapcsolatával.

3.3. Operátorok súlyozása

A többtényezős döntések során az objektum különböző tulajdonságainak értékelése mellett a döntés során ezen tulajdonságok különböző fontosságúak lehetnek. A súlyozás szoros kapcsolatban van a közepekkel. A súlyozott operátorok egyenlőtlenségeivel és tulajdonságaival Hardy-Littlewood-Pólya könyve [H31] foglalkozik. Kolmogorov [H37] és Nagumo [H56] algebrai tulajdonságok segítségével adott szükséges és elegendő feltételt reprezentálásukra. Többtényezős döntések szempontjából való jellemzésük azonban eddig hiányzott. A súlyozás szemantikus jellemzése mellett megadtuk főbb tulajdonságait. Legyen $\omega(w, x) = x'$, ami x érték w súllyal vett transzformáltja, akkor a következő tulajdonságok teljesülése feltételezett:

1. $\omega : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ folytonos

2. Monoton x -ben:

$$\omega(w, x_1) < \omega(w, x_2) \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad x_1 < x_2$$

3. Monoton w -ben:

a) $w_1 \leq w_2$ és $\nu < x$ akkor $\omega(w_1, x) \leq \omega(w_2, x)$

b) $w_1 \leq w_2$ és $\nu > x$ akkor $\omega(w_1, x) \geq \omega(w_2, x)$

4. Perem feltételek teljesülése:

a) $\omega(1, x) = x$

b) $\omega(0, x) = \nu$

5. Neutrális tulajdonság:

$$\omega(w, \nu) = \nu$$

6. Disztributivitás:

$$\omega(w, o(x_1, x_2)) = o(\omega(w, x_1), \omega(w, x_2))$$

7. Additív tulajdonság:

$$\omega(w_1 + w_2, x) = o(\omega(w_1, x), \omega(w_2, x))$$

8. Multiplikatív tulajdonság:

$$\omega(w_1, w_2, x) = \omega(w_1, \omega(w_2, x))$$

9. Negáció reprezentációja negatív súllyal aggregációs esetben:

$$\omega(-w, x) = \omega(w, \eta(x))$$

ahol ν érték az aggregáció alapján értelmezett, azaz ha $\nu = 1$, akkor az operátor konjunkció, ha $\nu = 0$, akkor az operátor diszjunkció és ha $\nu \in (0, 1)$, akkor aggregáció.

Megadtuk a bevezetett szigorú monoton operátorokra a súlyozás szükséges és elégséges feltételeit:

3.11. Tétel.

$$\omega(w, x) = f^{-1}(wf(x))$$

akkor és csak akkor, ha a 4.a és 7. tulajdonság érvényes.

A súlyozott operátorok szoros kapcsolatban vannak a közepekkel, a konjunkció a számtani, míg a diszjunkció a harmonikus és az aggregáció a geometriai közép általánosítása.

Az értekezésben megmutattuk, hogy a súlyokban az operátorok linearizálhatók és így lineáris egyenletrendszer megoldásaként megkaphatók, vagy optimalizálásnál a korlátozó feltételek lineárisakként kezelhetők.

3.3.1. Főbb eredmények:

- Megadtuk a bevezetett operátorok súlyozási eljárását.

3.4. Származtatott operátorok: implikáció és preferencia

A folytonos logikák legfontosabb művelete az implikáció. Általános elvárás, hogy az azonosság elve teljesüljön, azaz

$$x \rightarrow y = 1 \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad x \leq y.$$

A diszjunkció is negáció segítségével származtatott implikáció nem tesz eleget az azonosság elvének, ezért helyette a rezolúciós implikációt alkalmazzák [H65]. A rezolúciós implikáció szigorúan monoton operátor esetén nem folytonos. Ha azonban ν neutrális értékkel, mint küszöb-bel adjuk meg az azonosság elvét, az implikáció és a diszjunkció is negációval megadható az $i(x, y) = d(\eta(x), y)$ definícióval.

3.12. Tétel. *Ha $x \leq y$, akkor $i(x, y) \geq \nu_0$.*

Megjegyezzük, hogy a küszöbvel megadott implikáció esetén nem igaz a fordított irány

$$i(x, y) > \nu_0, \quad \text{akkor} \quad x \leq y.$$

Ha $d(x, y)$ helyett a közép operátort $\bar{d}(x, y)$ -t használjuk, akkor $\bar{i}(x, y)$ -ra is igaz a tétel. Beláttuk, hogy a modus ponens is érvényes, azaz ha

$$\begin{array}{c} x \geq \nu_0 \\ x \rightarrow y \geq \nu_0 \\ \hline y \geq \nu_0 \end{array}$$

A logika másik származtatott operátora az ekvivalencia operátor. Az irodalomban mindig azzal a feltevessel élnek, hogy $e(x, x) = 1$. A másik irányú feltevés, azaz hogy $e(\eta(x), x) = 0$, hiányzik. A két feltevés egyszerre a folytonos logikák esetén nem teljesülhet. Az implikációhoz hasonlóan a küszöb segítségével adhatunk ekvivalencia operátort.

$$e(x, x) > \nu_0, \quad e(\eta(x), x) < \nu_0.$$

Megmutattuk, hogy a bevezetett ekvivalencia reláció tulajdonságaira teljesül:

1. $e(x, y) = e(y, x)$
2. $e(1, 1) = 1, \quad e(0, 0) = 0, \quad e(\nu_0, \nu_0) = \nu_0$
3. $e(\eta(x), \eta(y)) = e(x, y)$
4. $e(1, x) = x, \quad e(0, x) = \eta(x)$
5. $e(x, y) > \nu_0$ és $e(y, z) > \nu_0$, akkor $e(x, z) > \nu_0$

Az implikációt az azonosság elve miatt preferencia relációként alkalmazzák [H26]. Megmutattuk, hogy a rugalmas rendszerben a preferencia az aggregációhoz kapcsolható és a preferenciára vonatkozó tulajdonságok teljesülnek.

Az aggregáció segítségével a következő módon vezethető be a preferencia operátort:

$$p(x, y) = a(\eta(x), y).$$

Az így bevezetett preferencia a többtényezős döntések során feltételezett tulajdonságoknak eleget tesz. Az értekezés 86-88 oldalán 22 db tulajdonság felsorolása és bizonyítása történt meg.

A legfontosabb, hogy a preferenciára érvényes:

1. **Tranzitivitás:**

$$p(x, y) \geq \nu_0 \quad \text{and} \quad p(y, z) \geq \nu_0 \quad \text{then} \quad p(x, z) \geq \nu_0$$

2. **Teljesség:**

$$p(x, y) > \nu_0 \quad \text{or} \quad p(x, y) = \nu_0 \quad \text{or} \quad p(x, y) < \nu_0$$

3. **Antiszimmetria:**

$$\begin{aligned} c(p(x, y), p(y, x)) &\leq \nu_0 & \bar{c}(p(x, y), p(y, x)) &\leq \nu_0 \\ d(p(x, y), p(y, x)) &\geq \nu_0 & \bar{d}(p(x, y), p(y, x)) &\geq \nu_0 \end{aligned}$$

3.4.1. Főbb eredmények:

- Megadtunk egy új implikáció definíciót, amely kapcsolható az azonosság elvéhez.
- Az implikáció alapján bevezetésre került egy új ekvivalenci areláció.
- Az aggregáció alapján definiált preferenciáról beláttuk, hogy tranzitív, antiszimmetrikus és hogy szigorúan teljes.

3.5. Felfújó (distending) függvény

A fuzzy elmélet egyik legvitatottabb kérdése a halmazhoz tartozási (membership) függvény megadása és értelmezése. Vannak, akik valószínűségi interpretációt tartanak elfogadhatónak, szubjektív értékelés vagy szociológiai mérés eredményeként is értelmezik, stb. Legtöbbször trianguláris függvényt használnak, függetlenül az alkalmazott operátoroktól. Az értekezésben azzal a feltételezéssel élünk, hogy a súlyozott aggregált felfújó függvény eredménye is a súlyozott közép felfújó függvénye kell, hogy legyen.

3.13. Tétel.

$$a(\mathbf{w}, \delta(t_1), \delta(t_2) \dots \delta(t_n)) = \delta \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)$$

akkor és csak akkor, ha

$$\delta(t) = f^{-1}(e^{\lambda t})$$

A tétel alapján a halmazhoztartozási függvény fogalmát rögzítettük.

A fentiek alapján a felfújó függvény általános definíciója:

$$\delta_a^{(\lambda)}(x) = f^{-1}(e^{-\lambda(x-a)})$$

ahol f az operátor generátor függvénye.

A felfújó függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

A felfújó függvény interpretációja:

$$\text{truth}(a < x) = \delta_a^{(\lambda)}(x)$$

Amennyiben x helyett egy $g(\mathbf{x})$ többváltozós korlátos függvényt helyettesítünk:

$$\text{truth}(a < g(\mathbf{x})) = \delta_a^{(\lambda)}(g(\mathbf{x}))$$

függvényt kapjuk, ahol $\delta_a^{(\lambda)}(g(\mathbf{x})) > \nu_0$ ha $a < g(\mathbf{x})$.

Míg a halmazhoztartozási függvény mindig egy dimenziós, a felfújó függvény így több dimenzióssá tehető.

A felfújó függvényeket a rugalmas rendszer kifejezéseibe helyettesítve megkaphatjuk az egyenlőtlenségek által meghatározott lehetséges megoldás tartomány felfújttartományát.

A felfújó függvény preferenciaként is értelmezhető:

$$P^{(\lambda)}(x, y) = \delta_y^{(\lambda)}(x).$$

A $P^{(\lambda)}(x, y)$ az értekezés 5.8 fejezetébn leírt tulajdonságokat teljesíti.

A felfújó függvény a Dombi operátor osztály esetén a szigmoid függvény:

$$\delta_a^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(x-a)}}$$

A fuzzy aritmetikai műveleteket a halmazhoztartozási szintvonalakon végzett intervallumos aritmetikaként értelmezhető. A distending függvényekről megmutatható, hogy zártak az összeadásra és konstanssal való szorzásra. Végtelen sorok konvergenciája is vizsgálható és a szerzőnek Győrbíróval készült e témában cikke [S18].

3.5.1. Főbb eredmények:

- Operátor osztály által indukált "halmazhoztartozási" distending függvény bevezetése.
- A felfújás több dimenzióra való kiterjesztése.
- A felfújó függvény preferenciaként való értelmezése és tulajdonság bizonyítása.

3.6. Bizonytalanság mértéke

A fuzzy elmélet kialakulása után közvetlenül bevezetésre került a fuzziság mértéke, ami a halmazhoztartozási függvények karakterisztikus függvényétől való távolságának mértéke.

DeLuca és Termini diszkrét fuzzy értékek esetén az entrópia segítségével definiálták a mértéket:

$$F(\mu) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \ln x_i + (1 - x_i) \ln(1 - x_i)).$$

Az értekezés egyik fő célja az volt, hogy logikai változók és logikai formula kiértékelésekor kapott érték kapcsolatát meg lehessen határozni vagy erre becslést lehessen adni. Ha azonban a fuzziság mértéke nem függ az operátor osztály választásától, reménytelen hasznos eredményt kapni. A fuzziság mértéke helyett bizonytalanság (vagueness) mértékét vezetjük be, ami a konjunkciós operátor és negáció segítségével képezhető, és a generátor függvény segítségével felírt alakja:

$$V(x) = f^{-1} \left(\frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) \right) = \bar{c}(x, \eta(x)).$$

Megmutattuk, hogy $V(x)$ eleget tesz a fuzziság mérték alapvető kívánalmainak. Mivel az operátor és a bizonytalanság mértéke szorosan összefügg, felmerül a kérdés, hogy a DeLuca és Termini által alkalmazott entrópiának milyen logikai osztály feleltethető meg. Megmutattuk, hogy ez az osztály a Lukosiewicz logika.

Az értekezés egyik fő eredménye, hogy bebizonyítottuk, hogy a változók bizonytalansági mértékének konjunkciója és diszjunkciója alsó és felső korlátja tetszőleges, ezen logikai változók feletti logikai kifejezés bizonytalanság mértékének.

Végezetül megadtuk az alsó és felső korlát preferencia index korlátját:

$$P(c(w, x), d(w, x)) < \nu$$

ahol

$$\nu = g^{-1} \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{g(x^*)}{g(x_*)}} + \sqrt{\frac{g(x_*)}{g(x^*)}} \right) \right)$$

3.6.1. Főbb eredmények:

- Az új fuzziság mérték bevezetése (bizonytalanság mértéke), amit az operátor generátor függvénye határoz meg.
- Megmutattuk, hogy az entrópia mérték a Lukosiewicz operátorokhoz rendelhető.
- Becslést adtunk tetszőleges logikai kifejezések bizonytalanságainak mértékére.
- Megadtuk a konjunktív és diszjunktív kifejezés preferenciájának felső korlátját.

3.7. Operátor családok

A fuzzy elméletben a különböző gyakorlati problémák megoldására csak néhány nevezetes operátor osztályt alkalmaznak, ezért a generátor függvények, illetve az operátorok konkrét alakja is fontos. A fejezet a szerő cikkére [S13] támaszkodik.

A többtényezős döntések egyik első nagy összefoglaló monográfiájában Keeney és Raiffa [H35] a leggyakrabban alkalmazott eljárást, az értékelési pontok súlyozott összeadásának elméleti megalapozását vizsgálta. Megmutatta, hogy egy másik alternatív döntési eljárás is megoldása a feltételeknek, mégpedig a multiplikatív hasznosság függvény:

$$u_M(\mathbf{z}) = \frac{1}{k} \left(\prod_{i=1}^n (1 + k k_i u_i(z_i)) - 1 \right).$$

Az értekezésben megmutattuk, hogy ez a formula az asszociatív függvényegyenlet segítségével is előállítható. Általánosságban, ha $g(x)$ generátor függvénye egy operátornak, akkor

$$f(x) = \ln(1 + \gamma g(x))$$

is generátor függvénye lesz és ekkor az operátor alakja:

$$o(x_1, \dots, x_n) = g^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} \left(\prod (1 + \gamma g(x_i)) - 1 \right) \right).$$

Megmutattuk, hogy ha $g(x)$ az Dombi operátor generátor függvénye, akkor az általánosított operátor a leggyakrabban alkalmazott operátorokat leírja.

A 7. fejezetben a következő eredmények találhatóak:

1. Bebizonyítottuk, hogy a multiplikatív hasznossági függvény asszociatív.
2. Bevezettünk egy új operátort:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma} \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma \left(\frac{1-x_i}{x_i} \right)^\alpha \right) - 1 \right) \right)^{1/\alpha}}.$$

3. Megadtuk a racionális involutív negáció új formáját:

$$n_{\nu, \nu_0}(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-\nu_0}{\nu_0} \frac{1-\nu}{\nu} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{-1}}.$$

4. Megadtuk a racionális negáció és az operátor osztály DeMorgan azonosságának szükséges és elegendő feltételeit:

$$\frac{\gamma_d}{\gamma_c} = \left(\frac{1-\nu_0}{\nu_0} \cdot \frac{1-\nu}{\nu} \right)^\alpha.$$

5. Megmutattuk, hogy Dombi operátor esetén minden ν -re DeMorgan osztályt kapunk.
6. Megmutattuk, hogy az általánosított operátor a következő tulajdonságokkal rendelkezik, azaz a legfontosabb operátorok származtathatók segítségével:

Operátor típusok	γ érték	α érték	
		konj.	diszj.
Dombi	0	$0 < \alpha$	$\alpha < 0$
Product	1	1	-1
Einstein	2	1	-1
Hamacher	$\gamma \in (0, \infty)$	1	-1
Drastic	∞	$0 < \alpha$	$\alpha < 0$
Min-max	0	∞	$-\infty$

A táblázatból látható, hogy ha α pozitív, akkor konjunkciós operátort kapunk, míg ha α negatív, diszjunkciós operátort.

7. Megadtuk a Hamacher operátor új általános alakját:

$$o_H^{(\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\gamma_d} \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \gamma_d \left(\frac{1-x_i}{x_i} \right)^\alpha \right) - 1 \right) \right)^{1/\alpha}}.$$

8. Megadtuk az Einstein operátor új alakját:

$$o_{GD,2}^{(\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{1 + 2 \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + 2 \left(\frac{1-x_i}{x_i} \right)^\alpha \right) - 1 \right)^{1/\alpha}}.$$

9. Megmutattuk, hogy az Einstein-féle relativitás elméletben több relatív sebesség esetén a tényleges sebesség hogyan adható meg:

$$v = \frac{c}{1 + 2 \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + 2 \frac{v_i}{c-v_i} \right) - 1 \right)^{-1}}.$$

3.7.1. Főbb eredmények:

- Egy új operátort vezettünk be, ami összekapcsolja a többtényezős döntések multiplikatív hasznosság függvényét, a fuzzy operátorokat és az Einstein-féle relativitási elméletet.
- Bebizonyítottuk ezen operátor tulajdonságait.

3.8. Rugalmas rendszer egy alkalmazása

A rugalmas rendszer alkalmazásának lehetőségei közül a döntési fákat képező eljárásra való adaptációját tárgyaltuk. Az ID3 algoritmus diszkrét értéket felvevő tulajdonságok felett értelmezett. A C4.5 eljárás folytonos argumentum tulajdonságok kezelésére is alkalmas. A rugalmas rendszer esetében tetszőlegesen rögzített paraméterrel ellátott korlátos feltétel szerepelhet. Így hipersíkokra vagy gömbökre, stb. vonatkozó egyenlőtlenségek feletti logikai kifejezés keresését teszi lehetővé. Az értekezés ezen fejezete a szerző cikkeire [S24], [S27] épül.

A következő jelöléseket alkalmaztuk: $|S|$ a példák száma, $|S^+|$ a pozitív példák száma, $|S^-|$ a negatív példák száma. Ha C_k tulajdonság $S_{k_1} \dots S_{k_{n_k}}$ értékeket veheti fel, akkor $|S_{k_i}^+|$ jelenti azok számát, amelyek pozitívak és $|S_{k_i}^-|$ azok számát, amelyek negatívak.

A következő jelöléseket használjuk még:

$$w^+ = \frac{|S^+|}{S} \quad w^- = \frac{|S^-|}{S}$$

$$x^+_{kl} = \frac{|S^+_{kl}|}{|S^+|} \quad x^-_{kl} = \frac{|S^-_{kl}|}{|S^-|}$$

Az ID3-ban használt heurisztikán megalapozott entrópia függvénye helyett a Dombi operátorból származtatott bizonytalanság mértéket alkalmaztuk, amiből

$$V(x) = 2x(1 - x)$$

adódott. Az ID3 eljárás menetét követve megmutattuk, hogy az $E(C_k)$ minimális érték kiválasztása a döntési fa következő csomópontja, azaz

$$K = \arg \min_k \sum_{i=1}^{n_k} c_D(w^+, x_{k_i}^-; w^-, x_{k_i}^+)$$

ahol c_D a konjunkciós Dombi operátornak adódott!

Amennyiben az $x^+_{k_i}$ és $x^-_{k_i}$ értékek egy paraméteres felfújó függvény alapján számíthatódnak ki, úgy a paraméter szerinti optimalizálás után kell a minimális k -t meghatározni.

A 8. fejezetben a bizonytalan értékek kezelésére és a kontroll változó bizonytalanságának kezelésére is kitértünk. Az eljárás hatékonyságát többtényezős döntések területén vizsgáltuk és jelentős pontosság növekedést értünk el. A döntési fa mélysége is nagy mértékben csökkent.

3.8.1. Főbb eredmények:

- Megmutattuk, hogy az ID3 algoritmus az entrópiát a bizonytalanság mértékre kicserélve a Dombi operátort adja.
- A döntési fa konstrukcióját általánosítottuk.
- Az algoritmus n dimenziós tér egyenlőtlenségek feletti logikai kifejezésekkel meghatározott térrészét képes lokalizálni.

Irodalomjegyzék

Az értekezés témakörében megjelent saját tudományos publikációk

Könyv fejezetek

- [S1] K. Vanhoof, P. Pauwels, J. Dombi, T. Brijs, G. Wets. *Penalty-reward analysis with uninorms: a study of customer (dis)satisfaction*. D. Ruan, C. Chen, E. Kerre, G. Wets (eds.) *Intelligent Data Mining: Techniques and Applications*, 237–252, 2005.
- [S2] J. Dombi. *Theoretical concept of modifiers and hedges*. *On the Edge of fuzziness, Studies in honor of J. K. Mattila on his sixtieth birthday*, 79–84, 2004.
- [S3] J. Dombi. *A common preference model for various decision models*. *Principles of fuzzy preference modelling and decision making*, 143–164, 2003.
- [S4] J. Dombi. *Adatbányászat* Mesterséges Intelligencia szerk. Futó Iván, 569–581, 1999.
- [S5] J. Dombi. *General framework for the utility-based and outranking methods*. B. Bouchon-Meunier, R. R. Yager, L. A. Zadeh (eds.) *Fuzzy Logic and Soft Computing*. World Scientific, 202–208, 1995.
- [S6] T. Solymosi, J. Dombi. *Fitting functions to data with error bounds: Fuzzy regression with ERRGO*. J. Kacprzyk, M. Fedrizzi (eds.) *Fuzzy Regression Analysis*. Omnitech Press, 101–115, 1992.

Cikkek

- [S7] J. Dombi. *The Generalized Dombi operator family and the multiplicative utility function*. *Under referee process*, 2009.
- [S8] J. Dombi, J. D. Dombi. *Semantic construction and decomposition of functions using aggregation operator*. *Under referee process*, 2009.
- [S9] A. Kertész, J. D. Dombi and J. Dombi. *Adaptive scheduling solution for grid meta-brokering*. *Acta Cybernetica, article is press*, 18 pages, 2009.

- [S10] G. Gosztolya, J. Dombi and A. Kocsor. Applying the Generalized Dombi Operator Family to the Speech Recognition Task. *Under referee process*, 2009.
- [S11] J. Dombi, A. Kertész-Farkas. Applying fuzzy technologies to Equivalence Learning in Protein Classification. *Journal of Computational Biology*, 2009.
- [S12] J. Dombi, Zs. Gera. Rule based fuzzy classification using squashing functions. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 19:3–8, 2008.
- [S13] J. Dombi. Towards a General Class of Operators for Fuzzy Systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 16:477–484, 2008.
- [S14] Zs. Gera, J. Dombi. Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, article in press 18 pages, 2008.
- [S15] Zs. Gera, J. Dombi. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, article in press, 19 pages, 2008.
- [S16] J. Dombi, J. D. Dombi. Construction of functions by fuzzy operators. *Acta Polytechnica Hungarica*, 4/4:17–24, 2007.
- [S17] J. Dombi, Cs. Imreh, N. Vincze. Learning Lexicographic orders. *European Journal of Operational Research*, article in press, 9 pages, 2007.
- [S18] J. Dombi, N. Györbíró. Addition of sigmoid-shaped fuzzy intervals using the Dombi operator and infinite sum theorems. *Fuzzy Sets and Systems*, 157:952–963, 2006.
- [S19] J. Dombi, J. D. Dombi. Dynamic system using conjunctive operator. *Acta Polytechnica Hungarica*, 3/1:21–34, 2006.
- [S20] J. Dombi, J. D. Dombi. Cognitive maps based on pliant logic. *International Journal of Simulation*, 6/6:23–33, 2005.
- [S21] J. Dombi, N. Vincze. Lexikografikus döntések egy általános döntési modellben. *Sigma*, 36/3-4:149–162, 2005.
- [S22] J. Dombi, N. Vincze. The lexicographic decision function. *Acta Cybernetica*, 17:95–106, 2005.
- [S23] J. Dombi, Zs. Gera. Approximation of the continuous nilpotent operator class. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2/1:45–58, 2005.
- [S24] J. Dombi, Á. Zsíros. Learning multicriteria classification models from examples: decision rules in continuous space. *European Journal of Operational Research*, 160:663–675, 2005.
- [S25] J. Dombi, Zs. Gera. The approximation of piecewise linear membership functions and Lukasiewicz operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 154:275–286, 2005.
- [S26] Gy. Koch, J. Dombi. SmallSteps: an adaptive distance-based clustering algorithm. *Acta Cybernetica*, 15:241–256, 2001.

- [S27] J. Dombi, Á. Zsíros. Learning decision trees in continuous space. *Acta Cybernetica*, 15:213–224, 2001.
- [S28] J. Dombi, L. Sára. Tools and techniques in simulation of highly complex, dynamic systems. *Periodica Polytechnica - Electrical Engineering* 44/2:121–140, 2000.
- [S29] J. Dombi, N. Vincze. Universal characterization of non-transitive preferences. *Mathematical Social Sciences*, 27/1:91–104, 1994.
- [S30] J. Dombi. *A fuzzy halmazok operátorainak szerkezete a többtényezős döntések szempontjából*. PhD thesis, Attila József University, Szeged, 1993.
- [S31] J. Dombi, Gy. Lencsés. On the boolean structure of fuzzy logical systems: a counter example. *Acta Cybernetica*, 10/4:317–322, 1992.
- [S32] J. Dombi, L. Porkoláb. Measures of fuzziness. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Computatorica*, 12:69–78, 1991.
- [S33] J. Dombi. Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems* 35:1–21, 1990.
- [S34] J. Dombi, C. Iwanski. Rational, not strictly monotonous logic operators. *Control and Cybernetics*, 18/2:179–190, 1989.
- [S35] J. Dombi. Properties of the fuzzy connectives in the light of the general representations theorem. *Acta Cybernetica*, 7/3:313–321, 1986.
- [S36] T. Solymosi, J. Dombi. A method for determining the weights of criteria: the centralized weights. *European Journal of Operational Research* 26:35–41, 1986.
- [S37] J. Dombi. Basic concepts for a theory of evaluation: The aggregative operator. *European Journal of Operational Research* 10:282–293, 1982.
- [S38] J. Dombi. A general class of fuzzy operators, the De Morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:149–163, 1982.
- [S39] J. Dombi, P. Zysno. Comments on the gamma-model. *Cybernetics and Systems Research*, 711–714, 1982.
- [S40] A. Neumaier, M. Fuchs, E. Dolejsi, T. Csendes, J. Dombi, B. Bánhelyi, Zs. Gera. Application of clouds for modeling uncertainties in robust space system design, 100 pages, 2007.

Konferencia kiadványok

A konferencia kiadványokban megjelent cikkek száma körülbelül 80.

Szabadalmak

- [S41] L. Farkas, J. Dombi, Gy. Cséfan. *Predictive, correctional and recommendative text typing, coding and decoding based on local and centralized thesauri.*
- [S42] L. Farkas, J. Dombi, Gy. Cséfan. *Relationship thermometer: method to assess and display social relationship characteristics on mobile phones using 2D shapes.*
- [S43] Dr. Dombi József, Dr. Kemény Lajos, Dr. Gyulai Rolland, Dr. Lázárné Dr. Oláh Judit. *Készülék és rendszer emberi testfelület elváltozásának optikai diagnosztizálására.*

Hivatkozások

- [H1] N.H. Abel. Untersuchungen der funktionen zweier unabhängigen veränderlichen größen x und y wie $f(x, y)$, welche die eigenschaft haben, das $f(z, f(x, y))$ eine symmetrische funktion von x, y und z ist. *J. Reine Angew. Math.*, 1:11–15, 1826.
- [H2] J. Aczél. Sur les opérations définies pour des nombres réels. *Bull. Soc. Math. France*, 76:59–64, 1949.
- [H3] J. Aczél. *Lectures on Functional Equations and Applications.* Academic Press, New York, 1966.
- [H4] V. Belton, J. Branke, P. Eskelinen, S. Greco, J. Molina, F. Ruiz, R. Slowinski. Interactive Multiobjective Optimization from a Learning Perspective. *Multiobjective Optimization*, 405–433, 2008.
- [H5] M. Beuthe and G. Scannella. Comparative analysis of UTA multicriteria methods. *European Journal of Operational Research*, 130:246–262, 2001.
- [H6] C.L. Blake and C.J. Merz. UCI repository of machine learning databases, 1998.
- [H7] D. Bouyssou et al. *Evaluation and Decision Models: a critical perspective.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [H8] L. Breiman, J. Friedman, R. Olshen, and C. Stone. *Classification and Regression Trees.* Wadsworth, Belmont, CA, 1984.
- [H9] T. Calvo, B. De Baets, and J. Fodor. The functional equations of frank and alsina for uninorms and nullnorms. *Fuzzy Sets and Systems*, 120:385–394, 2001.
- [H10] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, editors. *Aggregation Operators. New Trends and Applications.* Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [H11] Krysztof J. Cios and Ning Liu. A machine learning method for generation of a neural network architecture: a continuous ID3 algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(2):280–291, March 1992.

- [H12] A.H. Clifford. Naturally totally ordered commutative semigroups. *Amer. J. Math.*, 76:631–646, 1954.
- [H13] A.H. Clifford and G.B. Preston. The algebraic theory of semigroups. *Amer. Math. Soc.*, 1, 1961.
- [H14] A.C. Climescu. Sur l'équation fonctionnelle de l'associativité. *Bull.École Polytechnique Iassy*, 1:1–16, 1946.
- [H15] S. French. *Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality*. Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [H16] A. DeLuca and S. Termini. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Inform and Control*, 20:301–312, 1972.
- [H17] A. DeLuca and S. Termini. Entropy and energy measures of fuzzy sets, in: M. m. gupta, r.ragade, r.r yager, eds. *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, pages 382–389, 1972.
- [H18] D. Driankov, H. Hellendoor, M. Reinfrank. *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [H19] D. Dubois and H. Prade (Eds.). *Fundamentals of fuzzy sets*. Kluwer, 2000.
- [H20] R. B. Ebanks. On measure of fuzziness and their representations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 94, pages 24–37, 1983.
- [H21] H. Emptoz. Nonprobabilistic entropies and indetermination measures in the setting of fuzzy sets theory. *Fuzzy Sets and Systems* 5, pages 307–317, 1981.
- [H22] F. Esposito, D. Malerba, and G. Semeraro. A comparative analysis of methods for pruning decision trees. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19:476–491, 1997.
- [H23] F. Esteva. On some isomorphisms of demorgan algebras of fuzzy sets. *BUSEFAL*, 8:49–60, 1981.
- [H24] W.M. Faucett. Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:741–747, 1955.
- [H25] J. Fodor, R.R. Yager, and A. Rybalov. Structure of uninorms. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(4):411–427, 1997.
- [H26] J. Fodor, M. Roubens. *Fuzzy Preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [H27] H.J. Frank. On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$. *Aequat.Math.*, 19:192–226, 1979.
- [H28] L. Fuchs. Note on fully ordered semigroups. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 12:255–259, 1961.

- [H29] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 129:1–47, 2001.
- [H30] H. Hamacher. *Über Logische Agregationen Nicht Binar Explizierter Entscheidungskriterien*. Rita G. Fischer Verlage, Frankfurt am Main, 1978.
- [H31] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1934.
- [H32] Shi Kai Hu and Zhong Fu Li. The structure of continuous uni-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 124:43–52, 2001.
- [H33] J. Kay. Comments on esposito et al. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19:492–493, 1997.
- [H34] M.J. Kearns and U.V. Vazirani. *An Introduction to Computational Learning Theory*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.
- [H35] R.L. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with multiple objectives – Preferences and value tradeoffs*. John Wiley and Sons, New York, 1976.
- [H36] E.P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap. *Triangular norms*. Kluwer, 2000.
- [H37] A. N. Kolmogorov. Sur la notion de la moyenne. *R. C. Accad. Lincei (6)*, 12:388–391, 1930.
- [H38] B. Kosko. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, 1992.
- [H39] A. Kuwagaki. Sur l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue de deux variables. *Memoirs of the College of Science, Vol. XXVIII, Mathematics No. 2*, 27:145–151, 1952.
- [H40] Yong Ming Li and Zong Ke Shi. Weak uninorm aggregation operators. *Information Sciences*, 124:317–323, 2000.
- [H41] Yong Ming Li and Zong Ke Shi. Remarks on uninorms aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 114:377–380, 2000.
- [H42] C.H. Ling. Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, 12:189–212, 1965.
- [H43] R.D. Luce. A fundamental axiomatization of multiplicative power relations among three variables. *Philos. Science*, 32:301–309, 1965.
- [H44] Jean Luc Marichal. *Aggregation Operators for Multicriteria Decision Aid*. PhD thesis, University of Liège, 1999.
- [H45] M. Mas, G. Mayor, and J. Torrens. The distributivity condition for uninorms and t-operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 128:209–225, 2002.

- [H46] T. Gal, T.J. Steward, and T. Hanne, editors. *Multicriteria Decision Making: Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [H47] C. Zopounidis and M. Doumpos. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review. *European Journal of Operational Research*, 138:229–246, 2002.
- [H48] K. Menger. Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 28:535–537, 1942.
- [H49] R. Mesiar and J. Rybárik. Pan-operations structure. *Fuzzy Sets and Systems*, 74:365–369, 1995.
- [H50] A.B. Paalman de Miranda. Topological semigroups. *Mathematical Centre Tracts*, 11, 1964.
- [H51] T. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw Hill, 1997.
- [H52] Miquel Monserrat and Joan Torrens. On the reversibility of uninorms and t-operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 131:303–314, 2002.
- [H53] P.S. Mostert and A.L. Shields. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary. *Ann. Math.*, 65:117–143, 1957.
- [H54] V. Mousseau and R. Slowinski. Inferring an ELECTRE TRI model from assignment examples. *Journal of Global Optimization*, 12:157–174, 1998.
- [H55] S.K. Murthy, S. Kasif, and S. Salzberg. A system for induction of oblique decision trees. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 2:1–32, 1994.
- [H56] M. Nagumo. Über eine Klasse von Mittelwerten. *Japanese J. Math*, 7:71–79, 1930.
- [H57] A. Neumaier, M. Fuchs, E. Dolejsi, T. Csendes, J. Dombi, B. Bánhelyi, Zs. Gera. Application of clouds for modeling uncertainties in robust space system design. 100 pages, 2007.
- [H58] A. Neumaier. Fuzzy modeling in terms of surprise. *Fuzzy Sets and Systems*, 135:21–38, 2003.
- [H59] Hung T. Nguyen, M. Sugeno. *Fuzzy Systems: Modeling and Control*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [H60] D.L. Olson. *Decision Aid for Selection Problems*. Springer, 1996.
- [H61] E. Pap. *Null-Additive Set Functions*. Kluwer and Ister Science, 1955.
- [H62] Z. Pawlak and R. Slowinski. Decision analysis using rough sets. *International Transactions in Operational Research*, 1:107–114, 1994.
- [H63] J. Quinlan. *C4.5: Programs for Machine Learning*. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1993.

- [H64] J. Quinlan. Improved use of continuous attributes in C4.5. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 4:77–90, 1996.
- [H65] H. Rasiowa. *An Algebraic Approach to non-classical Logics*. North-Holland, 1974.
- [H66] A.H.G. Rinnoy Kan and G.T. Timmer. Stochastic global optimization methods. *Mathematical Programming*, 39:27–78, 1987.
- [H67] L. Hyafil and R.L. Rivest. Constructing optimal binary decision trees is np-complete. *Information Processing Letters*, 5:15–17, 1976.
- [H68] B. Roy. The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. *Theory and Decision*, 31:49–73, 1991.
- [H69] B. Roy. Decision science or decision aid science? *European Journal of Operational Research*, 66:184–203, 1993.
- [H70] S. Roychowdhury. New triangular operator generators for fuzzy systems. *IEEE Trans. of Fuzzy Systems*, 5:189–198, 1997.
- [H71] S. Russel and P. Norvig. *Artificial Intelligence - A Modern Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [H72] T.L. Saaty. *The analytic hierarchy process*. McGraw Hill, 1980.
- [H73] B. Schweizer and A. Sklar. Espaces métriques aléatoires. *Acad. Sci. Paris*, 247:2092–2094, 1958.
- [H74] B. Schweizer and A. Sklar. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, pages 313–334, 1960.
- [H75] B. Schweizer and A. Sklar. Associative functions and statistical triangle inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, 8:169–186, 1961.
- [H76] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North Holland, 1983.
- [H77] W. Silvert. Symmetric summation: A class of operations on fuzzy sets. *IEEE Trans. SMC*, 9:657–659, 1979.
- [H78] J. Stefanowski. Classification and decision supporting based on rough set theory. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 18(3-4):371–380, 1993.
- [H79] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its application*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [H80] M. Sugeno. Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey. In *Fuzzy Automata and Decision Processes*, pages 89–102. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [H81] Xiaojun Tong, Mianyun Chen, and Hongxing Li. Pan-operations structure with non-idempotent pan-addition. *Fuzzy Sets and Systems*, 145:463–470, 2004.

- [H82] E. Trillas. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos. *Stochastica*, III:47–60, 1979.
- [H83] R. Vetschera. Entropy and the value of information. *Central European Journal of Operations Research*, 8:195–208, 2000.
- [H84] Z. Wang and G.J. Klir. *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York and London, 1992.
- [H85] R.R. Yager. On a general class of fuzzy connectives. Technical report, Iona College.
- [H86] R.R. Yager. Uninorms in fuzzy systems modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, 122:167–175, 2001.
- [H87] Ronald R. Yager and Alexander Rybalov. Uninorm aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 80(1):111–120, 1996.
- [H88] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [H89] H.J. Zimmermann and P. Zysno. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:37–51, 1980.