

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE ÉS BAYES-TÉTEL

A TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

Egy király úgy szeretné izgalmasabbá tenni az elítélteinek kivégzését, hogy három ládikába elhelyez 25 arany és 25 ezüst érmét. Ha a kivégzésre szánt célszemély aranyat húz, akkor a várakozással ellentétben mégsem végzik ki, de ha ezüstöt, akkor igen. A király a nagyobb izgalom kedvéért mindig máshogy osztja szét az érméket a ládákban. Egyik alkalommal így:

16 arany 4 ezüst	8 arany 12 ezüst	1 arany 9 ezüst
---------------------	---------------------	--------------------

A kérdés, hogy mekkora esélye van az elítéltnak a megmenekülésre.

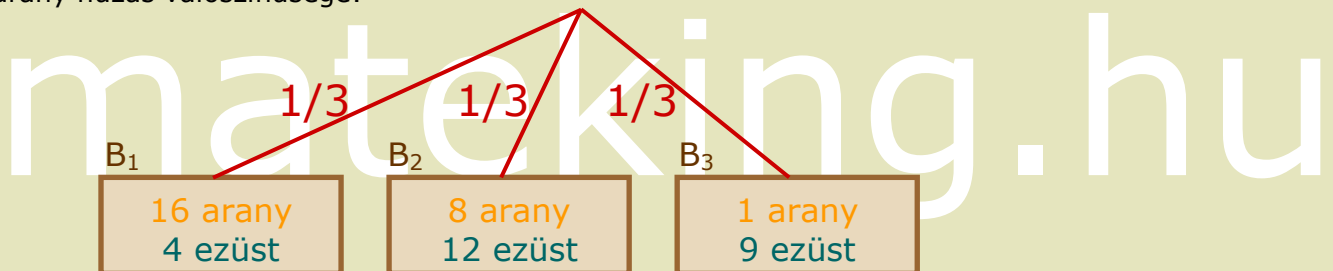
Az egyes ládikákból aranyat húzni

$$\frac{16}{20}$$

$$\frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{10}$$

valószínűséggel lehet, de csak akkor, ha az orra elé rakják az adott ládát. Ahhoz, ugyanis hogy emberünk mondjuk az első ládából aranyat húzzon, két dolog kell. Először is kell $1/3$ esély arra, hogy egyáltalán az első ládát válassza és további $16/20$, hogy abból aranyat húzzon. Vagyis az arany húzás valószínűsége:



$$P(A) = \frac{16}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}$$

Nos éppen ezt mondja a teljes valószínűség tétele:

Legyen B_1 , B_2 és B_3 teljes eseményrendszer, vagyis páronként kizáró események, melyek összege a biztos esemény. Esetünkben B_1 , B_2 és B_3 azt jelenti, hogy 1-es, 2-es és 3-as láda. Ekkor

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

Vagyis

$$P(A) = \frac{16}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{26}{60}$$

A BAYES TÉTEL

Egy zöldséges három helyről szerez be almákat. Az első helyről a készlet 20%-át szerzi be, ezek mind jók. A második helyről a 30%-át és itt 5% romlott, de nem baj mert ezt is el tudja adni néhány vak öregasszonynak. A harmadik helyről a maradék 50%-ot szerzi be, és itt 15% romlott.

Kiválasztunk egy almát, amiről kiderül, hogy romlott. Mekkora valószínűséggel származik a hármastermelőtől?

ELSŐ TERMELŐ: B_1 20% 0% rossz

MÁSODIK TERMELŐ: B_2 30% 5% rossz

HARMADIK TERMELŐ: B_3 50% 15% rossz

A hármastermelő a készlet 50%-át hozza, így minden alma 0,5 valószínűséggel van tőle. Csak hogyha kiderül az almáról, hogy rossz, ez a valószínűség megváltozik.

Az első termelő például a készlet 20%-át hozza, tehát minden alma 0,2 valószínűséggel tőle van. Ha viszont kiderül az almáról, hogy rossz, ez a valószínűség 0-ra csökken, semmiképp sem hozhatta azt az első termelő, mert az csak jót hoz. Vagyis ez a plusz információ, hogy az alma rossz, a kezdeti 20%, 30%, 50% valószínűségeket megváltoztatja. Az első termelő esélyét 0%-ra változtatja, a harmadik termelő esélyét pedig növeli, hiszen ő az aki leginkább gyanús.

A kezdeti valószínűségeknek ezt a megváltozását írja le a Bayes tétel. Akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében. Ha B_1 , B_2 és B_3 teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)}$$

Most a hármastermelő esélyeit (B_3) szeretnénk tudni, feltéve, hogy az alma rossz. (A =rossz)

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)} = \frac{0,15 \cdot 0,5}{0 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,5}$$

Nos ez a valószínűség

$$P(B_3|A) = 0,83$$

Vagyis a hármastermelő kezdeti 50%-os valószínűsége 83%-ra nőtt amiatt, mert megtudtuk, hogy az alma rossz. Korábban tisztáztuk, hogy

$$P(B_1|A) = 0$$

tehát az első termelő esélye nulla, ha az alma rossz.

Ha pedig az első termelő 0%, a harmadik pedig 83%, akkor a második termelő 17% eséllyel hozza a rossz almát.

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

BAYES-TÉTEL

Akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében. Ha B_1, B_2 és így tovább B_n teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

2.1. Egy alkatrészt három különböző helyről szerzünk be. Az első helyről, ahol a selejtek aránya 3% 12 darab származik. A második helyről 5 darab, és itt 4% selejt, míg a harmadik helyről 3 darab és itt 95% nem selejt. Kiválasztunk egy alkatrészt. Mi a valószínűsége, hogy selejtes?

2.2. Két gépen azonos típusú alkatrészeket gyártanak, az első gépen háromszor annyit, mint a másodikon. Az első gép termékeinek 4%-a, selejt, a másodikénak 95%-a nem selejt. Kiválasztunk véletlenszerűen egy alkatrészt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az selejtes?

2.3. Egy géphez szükséges alkatrészt két helyről szerzünk be, az egyik helyről szállítottak hibátlan működésének valószínűsége 0,9, a másik helyről származóknál pedig 96%. Jelenleg az első típusúból 8, a második fajtából 12 darab van összekeverve. Találomra kiveszünk egy alkatrészt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az nem hibátlan?

2.4. Egy kereskedő 3 termelőtől szerez be almákat. A vásárolt mennyiség 45%-a az első termelőtől származik, ennek fele első osztályú. A második termelőtől az összes mennyiség 35%-át szerzi be, ennek 70%-a első osztályú, míg a harmadik termelő csak első osztályú árut szállított. Kiválasztunk egy almát és az nem első osztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a második termelőtől származik?

2.5. Egy kiadásra részben lejárt tapétaragasztókat árulnak. A készlet negyedében a lejárt ragasztók aránya 20%. A készlet 20%-ban illetve 30%-ban rendre 4/5 illetve 3/4 a nem lejártak aránya. A fennmaradó részben minden harmadik lejárt. Mi a valószínűsége, hogy a teljes árukészletből kiválasztva egy ragasztót az lejárt?

2.6. Valamely üzletbe három termelőtől szállítanak egy terméket, amelynek 2%-a selejtes. A második termelőtől kétszer annyi terméket szállítanak, mint az elsőtől. A selejtarány az első termelőnél 4% a másodiknál 2%, míg a harmadiknál minden századik termék selejtes.

- Egy terméket véletlenszerűen kiválasztva mi a valószínűsége, hogy azt a harmadik termelőtől szállították?
- Mekkora a valószínűsége, hogy 15 terméket visszatevéssel kivéve a selejtesek száma pontosan 3?

2.7. Valamely üzletbe három termelőtől szállítanak egy terméket, amelynek 40%-a első osztályú. Az első termelőtől kétszer annyi terméket szállítanak, mint a másodiktól. Az első osztályúak aránya az első termelőnél 10% a másodiknál 60%, míg a harmadiknál 80%.

- a) Egy terméket véletlenszerűen kiválasztva mi a valószínűsége, hogy azt a harmadik termelőtől szállították?
- b) Mekkora a valószínűsége, hogy 15 terméket visszatevéssel kivéve az első osztályúak száma pontosan 3?

2.8. Egy üzemben 3 gépen gyártanak azonos típusú csavarokat. A termelés 25%-át az első, 30%-át a második, a többit a harmadik gép adja. Az első gép 2%, a második 4%, a harmadik 6% selejttel dolgozik. A teljes termelésből kiválasztunk egy alkatrészt, ami selejtes. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem az első gépen készült?

2.9. Egy kereskedő 3 termelőtől szerez be gyümölcsöket. A vásárolt mennyiség 30%-a az első termelőtől származik, ennek fele első osztályú. A második termelőtől az összes mennyiség 40%-át szerzi be, ennek 70%-a első osztályú, míg a harmadik termelő csak első osztályú árut szállított. Kiválasztunk egy gyümölcsöt és az első osztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy nem a második termelőtől származik?

2.10. Egy alkatrészt száz darabos tételekben szállítanak. Az egyes tételekben azonos arányban fordul elő három, kettő és egy hibás alkatrészt tartalmazó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tételből 2 alkatrészt véletlenszerűen kiválasztva mindkettő hibátlan lesz?

2.11. Egy vizsgán a hallgatók 60%-a első éves, 30%-uk másodéves, a többiek felsőbb évesek. Annak a valószínűsége, hogy egy hallgató vizsgán elért eredménye legalább közepes, rendre $\frac{6}{25}$, $\frac{9}{20}$, és $\frac{3}{5}$. Ha egy találmásra kiválasztott hallgató eredménye közepesnél gyengébb, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető első éves?

2.12. Egy terméket 50 darabos csomagolásban szállítanak. Ismert, hogy a csomagok egynegyede egy hibásat, másik negyede két hibásat tartalmaz, míg a többiben nincs hibás. Egy találmásra kiválasztott csomagból kiveszünk 2 terméket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkettő hibátlan?

2.13. Egy bizonyos készüléket 10-10 darabos tételben szállítanak. A tételek fele csupa hibátlan készüléket tartalmaz, a többi között azonos eséllyel található 1 vagy 2 hibásat tartalmazó tétel. Két készüléket kiválasztunk egy tételből és mindkettőt hibátlanak találjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy olyan tételből választottunk, amelyben 2 hibás volt?

2.14. Golyókat helyezünk el 3 dobozban: az elsőben 4 fehér és 5 piros, a másodikban 5 fehér és 8 piros, a harmadikban 8 fehér és 2 piros golyó van. Az egyik dobozból találmásra kiveszünk egyszerre 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz köztük fehér, ha: a) a dobozokat egyenlő valószínűséggel választjuk; b) a második dobozból való választás háromszor valószínűbb, mint a másik kettőből? c) Ha a második dobozból való választás háromszor valószínűbb, mint a másik kettőből, melyik dobozból húzunk legnagyobb valószínűséggel pirosat?

2.15. Egy 10 kérdésből álló teszt kérdéseire a vizsgázók $\frac{3}{7}$ része helyes választ ad, $\frac{2}{7}$ része nem tudja a választ és tippel: 50%-os valószínűséggel találja el a helyes választ. A többiek azt hiszik, hogy jó a válaszuk, pedig az hibás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgázó legalább nyolc kérdésre ad jó választ?

2.16. Egy gazdaság két almáskertje közül az első negyedakkora, mint a második. Az elsőben az almák 90%-a első osztályú, a másodikban pedig 35% nem első osztályú. Találomra kiválasztunk egy almát, ami első osztályú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első kertben termett? Ha 10 almát választunk ki, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük legfeljebb 2 nem első osztályú?

2.17. Egy üzemben három gépen állítanak elő alkatrészeket. Az első gép a teljes termelés minden negyedik darabját állítja elő és itt a termékek 10%-a nem első osztályú. A második gép a termelés 30%-át adja és az első osztályúak aránya 70%, míg a harmadik gép csak első osztályút állít elő. Mi a valószínűsége, hogy ha egy termék első osztályú, akkor az első gép gyártotta?

2.18. Egy üzemben három gépen állítanak elő csavarokat. Az első gép kétszer annyit állít elő, mint a második, ami harmad annyit, mint a harmadik. A selejtarány rendre 2%, 3% és 5%. Mi a valószínűsége, hogy ha egy csavar selejtes, akkor a második gép gyártotta?

2.19. Három urnába golyókat helyezünk el. Az elsőbe 8 piros, 5 fehér, a másodikba 6 piros, 9 fehér és a harmadikba 10 piros, 7 fehér golyót teszünk. Találomra kiveszünk egyszerre két golyót valamelyik urnából. Mi a valószínűsége, hogy mindkettő fehér lesz? Ha ezt egymás után hatszor megismételjük úgy, hogy a húzás után mindkét golyót visszarakjuk, mi a valószínűsége, hogy legalább az esetek felében mindkettő fehér lesz?

2.20. Egy betegség kimutatásához szűrővizsgálatot végeznek. A vizsgálat a betegséget az esetek 96%-ban képes kimutatni. Ugyanakkor megesik, hogy tévesen betegnek diagnosztizál olyat is, aki egészséges. Ez az esetek 3%-ban fordul elő. A betegség a lakosság 35%-át érinti. Egy lakosról a teszt elvégzése során kiderül, hogy egészséges. Mi a valószínűsége, hogy valóban az?

2.21. Egy biztosító a biztosítandó festmény esetében vizsgálatot végeztet, mert 15% esélyt lát arra, hogy a kép hamis. A szakértőről, akit bevonnak a vizsgálatba, korábbi munkái alapján megállapítható, hogy az eddigi 1000 esetből ötször tévedett. Négy esetben hamisnak állapította meg a festményt, amiről később kiderült, hogy mégis eredeti, míg egyszer eredetinek minősített egy hamisítványt. Munkája során a tévesekkel együtt száz hamisítványt leplezett le. A biztosító megvizsgáltatja vele a képet, amiről megállapítja, hogy eredeti. A következő kérdések merülnek föl: Mi a valószínűsége, hogy egy eredeti festményről azt állapítják meg, hogy valóban az? Mi a valószínűsége, hogy egy hamisról azt állapítják meg, hogy hamis? Mi a valószínűsége, hogy ha azt állapították meg, hogy a kép eredeti, akkor valóban az?

2.22. A leopárd-vadászaton, a vadászt 0,2 valószínűséggel támadja meg a leopárd, és ilyenkor az esetek 80%-ban a vadász belehal a sérüléseibe. Vadászat közben egyéb körülmények miatt a vadász 0,1 valószínűséggel hal meg. Egy alkalommal a vadász a vadászat során meghalt. Mi a valószínűsége, hogy leopárd ölte meg?