

//

KURZUS: Matematika II.
MODUL: Valószínűség-számítás

22. lecke: A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Tananyag: Kiss Béla - Krebsz Anna: Lineáris algebra, többváltozós függvények, valószínűség-számítás, **4.7. fejezet**

Elméleti összefoglaló

B_1, B_2, \dots, B_n események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$ és $B_i \cdot B_j = \emptyset$, ha $i \neq j$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$).

[Másképpen $P(B_1) + \dots + P(B_n) = 1$ és $P(B_i \cdot B_j) = 0$]

A teljes valószínűség tétele

Ha a B_1, B_2, \dots, B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_i) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), akkor tetszőleges A esemény valószínűségére érvényes a következő: $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

A Bayes-tétel

Ha a B_1, B_2, \dots, B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(B_i) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), továbbá A tetszőleges olyan esemény, amelyre $P(A) \neq 0$, akkor $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$.

Kidolgozott feladatok

22.1. Egy gyárban 4 gépsoron ugyanazt a terméket készítik. Az elsők készült darabok 5%-a, a másodikon készültek 8%-a, a harmadikon és negyediken készültek 10%-a hibás. A gépek az összes termelésnek rendre 40, 30, 20, 10 százalékát adják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék hibás?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: a választott termék hibás

B_1 : a választott termék az 1. gépen készült

B_2 : a választott termék a 2. gépen készült

B_3 : a választott termék a 3. gépen készült

B_4 : a választott termék a 4. gépen készült

A, B_1, B_2, B_3, B_4 események teljes eseményteret alkotnak, hisz egymást kizáróak és összegük a biztos esemény (egy munkadarab csak egy gépen készül).

A feladat szerint $P(B_1)=0,4$, $P(B_2)=0,3$, $P(B_3)=0,3$ és $P(B_4)=0,1$.

Mi lehet $P(A|B_1)$? Ez annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a termék hibás, feltéve, hogy az 1. gépen készült. Mivel az 1. gép 5%-ban termel selejtet, ezért $P(A|B_1)=0,05$. Hasonlóan $P(A|B_2)=0,08$, $P(A|B_3)=0,1$ és $P(A|B_4)=0,1$.

Így felírhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) + P(A|B_4) \cdot P(B_4) =$$

$$0,05 \cdot 0,4 + 0,08 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,074$$

Tehát a véletlenszerűen kiválasztott termék 0,074 valószínűséggel hibás.

22.2. Eltévettünk a piacon. A közelünkben négy ruhaárus, egy újságos és két virágáros van. A távolkeleti ruhákat menedzselők 0,6 valószínűséggel tudják megmondani a helyes irányt, a virágáros nénik 0,7 valószínűséggel, Józsi bácsi, az újságos szinte biztosan, 0,95 valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy helyes útbaigazítást kapunk, ha a közülük véletlenszerűen kérdezzük meg valakit?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: jó útra térítenek

B_1 : valamelyik ruhaárustól kérdezzük

B_2 : valamelyik virágárustól kérdezzük

B_3 : Józsi bácsit kérdezzük

Összesen $4+2+1=7$ árus van a környéken. Annak a valószínűsége, hogy ruhaárust választunk: $P(B_1) = \frac{4}{7}$; hogy virágárust választunk $P(B_2) = \frac{2}{7}$; hogy Józsi bácsit választjuk $P(B_3) = \frac{1}{7}$. A feladat szövege szerint annak a valószínűsége, hogy helyes útbaigazítást kapunk feltéve, hogy ruhaárustól kérdezzük: $P(A|B_1)=0,6$. A többi: $P(A|B_2)=0,7$ és $P(A|B_3)=0,95$.

Írjuk fel a teljes valószínűség tételét:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = 0,6 \cdot \frac{4}{7} + 0,7 \cdot \frac{2}{7} + 0,95 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4,75}{7} \approx 0,678$$

Vagyis 0,678 valószínűséggel kapunk helyes útmutatást.

22.3. Egy rekeszben (20 üveg) fele-fele arányban van barna és világos sör. Az üvegeket véletlenszerűen választva elkezdjük pusztítani a készletet. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik kivett üveg barna nedűt tartalmaz?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: a 3. üvegben barna sör van

B_1 : a 3. sör előtt 10 világos és 8 barna sör van a rekeszben

B_2 : a 3. sör előtt 9 világos és 9 barna sör van a rekeszben

B_3 : a 3. sör előtt 8 világos és 10 barna sör van a rekeszben

C_1 : elsőre világos sört választunk

C_2 : másodikkra világos sört választunk

C_1^- : elsőre barna sört választunk

C_2^- : másodikkra barna sört választunk

B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszert alkotnak. Fejezzük ki ezeket C_1 és C_2 -vel!

$$P(B_1) = P(C_1^- \cdot C_2^-) = P(C_2^- | C_1^-) \cdot P(C_1^-) = 9/19 \cdot 10/20 = 9/38$$

$$P(B_2) = P(C_1 \cdot C_2^- + C_1^- \cdot C_2) = P(C_1 \cdot C_2^-) + P(C_1^- \cdot C_2) = P(C_2^- | C_1) \cdot P(C_1) + P(C_1^- | C_2) \cdot P(C_2) = 10/19 \cdot 10/20 + 10/19 \cdot 10/20 = 20/38$$

$$P(B_3) = P(C_1 \cdot C_2) = P(C_2 | C_1) \cdot P(C_1) = 9/19 \cdot 10/20 = 9/38$$

$$P(A|B_1) = 8/18, P(A|B_2) = 9/18, P(A|B_3) = 10/18$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i) \cdot P(B_i) = 8/18 \cdot 9/38 + 9/18 \cdot 20/38 + 10/18 \cdot 9/38 = 8+20+10/76 = 1/2$$

(Megjegyzés: Az eredmény nem meglepő, ha belegondolunk.)

22.4. Egy évfolyamon a lányok 0,7, a fiúk 0,6 valószínűséggel vizsgáznak sikeresen egy bizonyos tárgyból. Mi lehet az évfolyam százalékos összetétele, ha tudjuk, hogy az évfolyam 63%-a vizsgázik sikeresen?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: sikeresen vizsgázik egy hallgató $P(A) = 0,63$

B_1 : egy véletlenszerűen választott hallgató lány $P(B_1) = p$

B_2 : egy véletlenszerűen választott hallgató fiú $P(B_2) = 1-p$

$$P(A|B_1) = 0,7$$

$$P(A|B_2) = 0,6$$

A teljes valószínűség tételét alkalmazva:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot p + P(A|B_2) \cdot (1-p) \Rightarrow 0,63 = 0,7 \cdot p + 0,6 \cdot (1-p) \Rightarrow 0,03 = 0,1 \cdot p \Rightarrow$$

$$p = 0,3$$

$$1-p = 0,7$$

Vagyis az évfolyam 30%-a lány, 70%-a pedig fiú.

22.5. Egy üzemben 3 gépsor gyártja ugyanazt a terméket. Az első a termékek 30%-át, a második az 50%-át, a harmadik a 20%-át adja. Az elsőn készült termékek 5%-a, a másodikon készültek 7%-a, a harmadikon készültek 3%-a selejt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott selejtes termék az első gépsoron készült?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: a termék selejt

B_1 : a termék az 1. gépsorral készült

B_2 : a termék a 2. gépsorral készült

B_3 : a termék a 3. gépsorral készült

Így a feladatban megadott valószínűségek:

$$P(B_1) = 0,3, P(B_2) = 0,5, P(B_3) = 0,2.$$

$$P(A|B_1) = 0,05, P(A|B_2) = 0,07, P(A|B_3) = 0,03.$$

Ezekre alkalmazva a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0,05 \cdot 0,3}{0,05 \cdot 0,3 + 0,07 \cdot 0,5 + 0,03 \cdot 0,2} = \frac{0,015}{0,015 + 0,035 + 0,006} = \frac{0,015}{0,056} \approx 0,268.$$

Tehát 0,268 a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott selejtes termék az első

gépsoron készült.

22.6. Egy gyárban készült termékek 70%-a másodosztályú, 30%-a első osztályú. A termékek minősítésekor a következő hibát követik el: első osztályú terméket 5% valószínűséggel minősítenek másodosztályúnak, másodosztályú terméket 2% valószínűséggel minősítenek első osztályúvá. Mi a valószínűsége annak, hogy egy első osztályúnak minősített termék valóban első osztályú?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

B_1 : a termék első osztályú

B_2 : a termék másodosztályú

A: a terméket első osztályúnak minősítik

A valószínűségek:

$$P(B_1) = 0,3$$

$$P(B_2) = 0,7$$

$$P(A|B_1) = 1 - 0,05 = 0,95$$

$$P(A|B_2) = 0,02$$

Ezekkel a Bayes-tétel:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)} = \frac{0,95 \cdot 0,3}{0,95 \cdot 0,3 + 0,02 \cdot 0,7} = \frac{285}{285 + 14} \approx 0,953$$

Tehát 0,953 a valószínűsége annak, hogy egy első osztályúnak minősített termék valóban első osztályú.

22.7. Négy doboz mindegyikében 4 golyó van, melyek közül rendre 1, 2, 3, 4 piros. Kiválasztunk egy dobozt és abból visszatevéssel háromszor húzunk. Azt találjuk, hogy mindhárom kihúzott golyó piros. Mi a valószínűsége, hogy a dobozban levő golyók közül éppen kettő volt piros?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: mindhárom kihúzott golyó piros.

B_1 : az 1. dobozt választjuk $P(B_1) = \frac{1}{4}$

B_2 : a 2. dobozt választjuk $P(B_2) = \frac{1}{4}$

B_3 : a 3. dobozt választjuk $P(B_3) = \frac{1}{4}$

B_4 : a 4. dobozt választjuk $P(B_4) = \frac{1}{4}$

Az 1. dobozban 1 db piros golyó van, a 2.-ban 2, a 3.-ban 3, a 4.-ben pedig 4.

Annak a valószínűsége, hogy egy húzásra az 1. dobozból piros golyót húzunk: $\frac{1}{4}$.

Annak a valószínűsége, hogy egy húzásra a 2. dobozból piros golyót húzunk: $\frac{2}{4}$.

Annak a valószínűsége, hogy egy húzásra a 3. dobozból piros golyót húzunk: $\frac{3}{4}$.

Annak a valószínűsége, hogy egy húzásra a 4. dobozból piros golyót húzunk: $\frac{4}{4}$.

Annak a valószínűsége, hogy háromszor egymás után húzva piros golyót húzunk:

- az 1. dobozból: $(1\ 4) \cdot 3 = P(A|B_1)$;
- a 2. dobozból: $(2\ 4) \cdot 3 = P(A|B_2)$;
- a 3. dobozból: $(3\ 4) \cdot 3 = P(A|B_3)$;
- a 4. dobozból: $(4\ 4) \cdot 3 = P(A|B_4)$.

Ezekkel a Bayes-tétel:

$$P(B_2|A) = P(A|B_2) \cdot P(B_2) \sum_{i=1}^4 P(A|B_i) \cdot P(B_i) = 8 \cdot 64 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 64 \cdot 1 \cdot 4 + 8 \cdot 64 \cdot 1 \cdot 4 + 27 \cdot 64 \cdot 1 \cdot 4 + 64 \cdot 64 \cdot 1 \cdot 4 = 8 \cdot 1 + 8 + 27 + 64 = 8 \cdot 100 = 0,08 .$$

Tehát 0,08 a valószínűsége, hogy a dobozban levő golyók közül éppen kettő volt piros.

22.8. Labdarúgó edzésen jártunk. Tudjuk, hogy a résztvevő 20 játékos közül a csatárok (5 fő) 0,9 valószínűséggel, a középpályások (7 fő) 0,8, a védők (6 fő) 0,75, a kapusok (2 fő) 0,7 valószínűséggel lövik be a büntetőt. Látunk egy játékost, aki kihagyja a büntetőjét. Mi a valószínűsége, hogy ő csatár?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

A: a játékos kihagyja a büntetőt.

B_1 : a véletlenszerűen választott játékos csatár, $P(B_1) = 5/20 = 0,25$

B_2 : a véletlenszerűen választott játékos középpályás, $P(B_2) = 7/20 = 0,35$

B_3 : a véletlenszerűen választott játékos védő, $P(B_3) = 6/20 = 0,3$

B_4 : a véletlenszerűen választott játékos kapus, $P(B_4) = 2/20 = 0,1$

$$P(A|B_1) = 1 - P(\text{belövi} | B_1) = 1 - 0,9 = 0,1$$

Hasonlóan:

$$P(A|B_2) = 1 - 0,8 = 0,2 ,$$

$$P(A|B_3) = 1 - 0,75 = 0,25 ,$$

$$P(A|B_4) = 1 - 0,7 = 0,3 .$$

Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = P(A|B_1) \sum_{i=1}^4 P(A|B_i) \cdot P(B_i) = 0,1 \cdot 0,25 + 0,1 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,35 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,1 = 1 \cdot 8 = 0,125$$

Tehát az ismeretlen játékos 0,125 valószínűséggel csatár.

22.9. Egy kereskedő négy beszállítótól kap árut. Az első a teljes áru mennyiségének a felét, a másodiktól a negyedét, a harmadiktól és a negyediktől egyaránt a nyolcadát szerzi be. Tapasztalata szerint a legnagyobb szállítótól kapott áru 60%-a első osztályú, a többi másodosztályú. A másodiknál ez az arány 50-50%, a maradék kettőnél 40-60%. A készletéből választott áru mekkora valószínűséggel lesz első osztályú?

Megoldás: Tekintsük a következő eseményeket:

B_1 : az árut az első szállító hozta

B_2 : az árut a 2. szállító hozta

B_3 : az árut a 3. szállító hozta

B_4 : az árut a 4. szállító hozta

A: a választott áru első osztályú

A feladat szövege szerint az első szállító a teljes mennyiség felét adja, tehát annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott áru tőle származik: $P(B_1)=0,5$. Hasonlóan: $P(B_2)=0,25$, $P(B_3)=P(B_4)=0,125$.

Az elsőtől kapott áru 60%-a első osztályú, a többi másodosztályú. Vagyis feltéve, hogy egy áru az 1. szállítótól származik, az 0,6 valószínűséggel első osztályú. Tehát: $P(A|B_1)=0,6$. Hasonlóan a többire: $P(A|B_2)=0,5$, $P(A|B_3)=0,4$, $P(A|B_4)=0,4$.

Most már felírhatjuk a teljes valószínűség tételét:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A|B_i) \cdot P(B_i) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot 0,125 + 0,4 \cdot 0,125 = 0,525$$

Tehát a kereskedőtől vett áru 0,525 valószínűséggel első osztályú.

22.10. Az előbb említett kereskedő a reklamációk miatt szeretné kideríteni, hogy egy véletlenszerűen választott másodosztályú áru mekkora valószínűséggel származik az egyes beszállítóktól. Segítsünk neki!

Megoldás: A kérdés az, mi annak a valószínűsége, hogy az áru az 1. (2., 3., 4.) szállítótól származik, feltéve, hogy másodosztályú.

Használjuk fel az előző példa jelöléseit. Mivel csak első és másodosztályú áru fordul elő, ezért A^- jelöli azt az eseményt, hogy az áru másodosztályú. Ezek szerint a következő valószínűségeket kell meghatározni: $P(B_1|A^-)$, $P(B_2|A^-)$, $P(B_3|A^-)$, $P(B_4|A^-)$.

Az előző példából ismertek az alábbi valószínűségek: $P(B_1)=0,5$, $P(B_2)=0,25$, $P(B_3)=0,125$, $P(B_4)=0,125$, $P(A)=0,525$, tehát $P(A^-)=1-P(A)=0,475$.

Mivel mindenki csak első vagy másodosztályú árut hoz, ezért

$$P(A^-|B_1) = 1 - P(A|B_1) = 0,4$$

$$P(A^-|B_2) = 1 - P(A|B_2) = 0,5$$

$$P(A^-|B_3) = 1 - P(A|B_3) = 0,6$$

$$P(A^-|B_4) = 1 - P(A|B_4) = 0,6$$

Most már minden adott a Bayes-tétel alkalmazásához:

$$P(B_1|A^-) = \frac{P(A^-|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A^-|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,6 \cdot 0,125 + 0,6 \cdot 0,125} = \frac{0,2}{0,475} = 0,421$$

$$P(B_2|A^-) = \frac{P(A^-|B_2) \cdot P(B_2)}{\sum_{i=1}^4 P(A^-|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0,5 \cdot 0,25}{0,475} = \frac{0,125}{0,475} = 0,263$$

$$P(B_3|A^-) = \frac{P(A^-|B_3) \cdot P(B_3)}{\sum_{i=1}^4 P(A^-|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0,6 \cdot 0,125}{0,475} = \frac{0,075}{0,475} = 0,158$$

$$P(B_4|A^-) = \frac{P(A^-|B_4) \cdot P(B_4)}{\sum_{i=1}^4 P(A^-|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0,6 \cdot 0,125}{0,475} = \frac{0,075}{0,475} = 0,158$$

Ellenőrző feladatok

1. feladat



Egy középiskolában 4 érettségiző osztály van. Az egyikben a tanulók negyede, a másikban fele, a harmadikban és a negyedikben ötöde vizsgázott jelesre matematikából. Minden osztályba ugyanannyian járnak. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott érettségiző diák jelesre vizsgázott?

- ☐ 0,2432
- ☐ 0,2500
- ☐ 0,2174
- ☐ 0,2875

2. feladat



Egy üzemben 3 munkás szortírozza az elkészült termékeket. Az egyik 0,05 valószínűséggel hibázik a minősítéskor, a második és a harmadik rendre 0,03, illetve 0,02 valószínűséggel. Egy óra alatt az első átlagosan 28, a második 36, a harmadik 42 terméket vizsgál meg. Ha az üzem termékei közül véletlenszerűen választunk egyet, akkor mi a valószínűsége, hogy az hibás minősítést kapott?

- ☐ 0,033
- ☐ 0,031
- ☐ 0,106
- ☐ 0,096

3. feladat



Egy városban a keresőképes lakosság 28%-a rendelkezik diplomával. A munkanélküliek aránya a diplomások között 5,3%, a többiek között 7,8%. Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy embert, mekkora a valószínűsége, hogy ő munkanélküli?

- ☐ 0,0632
- ☐ 0,0655
- ☐ 0,0710

☐ 0,0682

4. feladat



Az előző feladatban szereplő városban találkoztunk egy emberrel. Megtudtuk, hogy nincs munkája. Mi a valószínűsége, hogy rendelkezik diplomával?

☐ 0,234

☐ 0,838

☐ 0,280

☐ 0,209

5. feladat



Egy nemzetközi kézilabda-kupában a legjobb nyolc közé 1 magyar, 2 spanyol, 2 német, 2 orosz és 1 szlovén csapat jutott, vaksorsolással (kiemelés nélkül) párosítják őket. A magyar csapat spanyol ellenféllel szemben 0,2, némettel szemben 0,5, oroszal szemben 0,45, a szlovénnal szemben pedig 0,7 valószínűséggel szerepel sikeresen. Mi a valószínűsége, hogy továbbjut a magyar gárda?

☐ 0,428

☐ 0,462

☐ 0,264

☐ 0,356

6. feladat



Feltéve, hogy a fenti magyar csapat továbbjutott, mi a valószínűsége, hogy orosz ellenfelet ejtett ki?

☐ 0,300

☐ 0,450

☐ 0,225

☐ 0,150**7. feladat**

Feltéve, hogy nem jutott tovább a magyar csapat, mi a valószínűsége, hogy papíron nála erősebbtől kapott ki?

☐ 0,924☐ 0,675☐ 0,462☐ 0,337