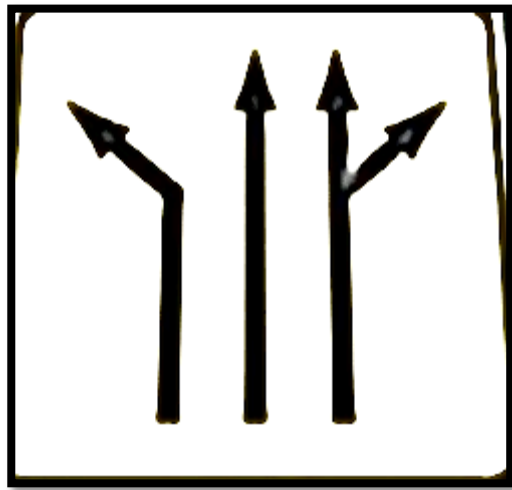


Döntéshelméleti modellek



Tartalom

• Szavazási eljárások - Berta Árpád	8
Bevezetés	8
A szavazás formális bemutatása	8
Bemutatott módszerek	9
Condorcet eljárás.....	9
Példa a Condorcet eljárásra.....	9
Copeland módszer	10
Példa a Copeland módszerre	10
Dogdson módszer	11
Példa a Dogdson módszerre	12
Borda módszer	12
Példa a Borda módszerre	13
Hare módszer	13
Példa a Hare módszerre	14
Tideman módszer	14
Példa a Tideman módszerre	15
Kemeny–Young módszer.....	16
Példa a Kemeny-Young módszerre	16
Összegzés	16
Források:	17
• Hasznossági függvények –Gál Péter.....	18
Hasznossági függvények létezése	18
Jelölések	18
Bernoulli-elv.....	18
Neumann – Morgenstern axiómák	18
Hasznossági függvény előállítása.....	19
Bizonyossági egyenértékűség.....	19
Helyettesítés	19
Redukálhatóság.....	19
Összehasonlíthatóság	19
Következmény.....	20

Bizonyossági egyenértékes módszer	20
Kockázati magatartás.....	21
Többtényezős hasznossági függvények.....	21
• <i>Értékelő függvények és conjoint measurement – Godó Zita</i>	24
• <i>Szavazási eljárások – Langó László</i>	34
Arrow-féle lehetetlenségi tétel	34
Bevezetés.....	34
Kenneth J. Arrow élete	34
Arrow lehetetlenségi tétele	36
Fogalmak, jelölések	36
May tétele.....	36
Arrow-tétel	37
Arrow-tétel bizonyítása I.....	37
Arrow-tétel bizonyítása II.....	43
Összefoglalás.....	44
• <i>Az Alkudozás Folyamata – Molnár András</i>	45
Alkuképesség	45
Hogyan kötelezzük el magunkat?	46
A tárgyalás intézményi és szerkezeti jellemzői	47
Alkumegbízott alkalmazása	47
Titoktartás versus nyilvánosság.....	47
Egymást keresztező tárgyalások.....	47
Folyamatos tárgyalások.....	48
A korlátozó napirend	48
A kompenzáció lehetőségei	48
A tárgyalások mechanikája.....	49
Alapelvek és precedensek	49
Kazuisztika	49
A fenyegetés	50
Az ígéret.....	52
Egy szemléltető játszma	53
• <i>TOPSIS – Tóth Tamás</i>	59
• <i>Conjoint measurement véges attribútumokon, általános dekompozíciók, és a 2x2-es játszma négy archetípusa - Antal Gábor</i>	68

Conjoint measurement	68
Conjoint measurement véges attribútumokon.....	68
Additív preferencia modellek előállítása.....	70
UTA módszer	71
MACBETH módszer	71
Tranzitív felbonthatóság	72
Általános dekompozíciók	72
A 2x2-es játszma négy archetípusa	74
Irodalomjegyzék	76
• MYCIN – Egy klinikai döntéstámogató rendszer – Aulik Ákos.....	77
Mit értünk szakértői rendszer alatt?	77
2. Klinikai döntéstámogató rendszerek.....	78
MYCIN - A probléma	79
3.1 A MYCIN döntéstámogató rendszer	80
3.2 Szabályok bemutatása.....	81
3.3 Hogyan is működik a MYCIN?	83
Bizonyossági tényezők	85
Valószínűség és megerősítés	85
Bizonyíték kombináció séma	86
Egy tipikus konzultáció.....	87
4.1 Magyarázat és indoklás	88
Irodalomjegyzék	89
• Kilátáselmélet – Berényi Domokos.....	90
• Bizonytalanságban hozott döntések elemei – Borbély Erzsébet	97
• Többtényezős döntések MACBETH felhasználásával - Csák Péter.....	107
• Kollektív cselekvés, mint megegyezéssel, N szereplős fogolydilemma – Gasztány Richárd.....	113
Bevezető, klasszikus fogolydilemma	113
A szükséges definíciók	114
Kollektív cselekvés.....	114
Az Egyén szemben a Közösséggel	115
A kollektív cselekvés játszmájának megoldása Condorcet-választással	116

Következtetések	120
A tétel bizonyítása	120
• <i>A nép akarata - Grósz Tamás</i>	124
Bevezetés	124
Preferenciarendezés	125
Abszolút többség elvén nyugvó szavazás és a diszkrimináció.....	125
Diszkriminancia	126
Wicksell egyöntetűségi szabály	127
Relatív többség elvén nyugvó szavazás.....	127
Relatív többség elvén nyugvó előválasztás	128
Alternatívás szavazás	129
Kizárásos előválasztási rendszer	129
Súlyozott rangsorolás elvén nyugvó szavazás.....	130
Jóváhagyásos szavazás.....	130
Pontelosztásos módszer.....	131
Körkörös többség, intranzitív társadalmi preferenciák, avagy sok húhó szinte semmiért.....	131
• <i>Intertemporális erőforrás-allokáció – Hegyaljai Norbert</i>	133
Bevezetés	133
Alapfogalmak	133
Intertemporális erőforrás-allokáció	134
Intertemporális döntéshozatal	135
Jelenérték az idő múlásával csökken	136
Minél alacsonyabb a kamatláb, annál magasabb a jelenérték	136
A kamatláb és a tőke határtermelékenysége	138
Irodalomjegyzék	140
• <i>Az UTA módszer kiterjesztései – Kovács György</i>	141
Bevezetés	141
UTA módszer	141
Nem monoton attribútumok kezelése	144
1.3. Kardinális attribútumok	144
1.4. Nominális attribútumok	145
GRIP	146
1.5. Többlet információ a bemeneten	147

1.6. Többslet információ a kimeneten	148
1.7. A metódushoz tartozó algoritmus felépítése	150
Konklúzió	151
Források	152
• <i>A bizonytalanságban hozott döntések - Krisztián Emese</i>	<i>153</i>
Bevezetés	153
A cselekvési alternatívák listája	153
1.2. A valószínűségi függvény	154
1.2.1. Kockázat és bizonytalanság	155
1.2.2. "Kemény" és "puha" valószínűségek	155
Példa – egy befektetési döntés	156
1.3. A hasznossági függvény és a várhatóhasznosság-szabály	158
1.3.1. "Referencialutri-eljárás"	159
Iromdalomjegyzék	160
• <i>Kilátáselmélet (Prospect Theory) – Szűcs Katalin</i>	<i>161</i>
A szerkesztő szakasz	161
Kódolás	161
Összevonás	161
Elválasztás	161
Törlés	162
Egyszerűsítés	162
Dominancia felderítése	162
Az értékelő szakasz	162
A kilátások	163
Alapegyenlet	163
Szigorúan negatív és szigorúan pozitív szabályok értékelése	163
Az értékfüggvény	164
A súlyfüggvény	165
Források:	166
Képek forrásai:	166
• <i>A ZAPROS módszer bemutatása a többszemponútú rangsorolás és az összehasonlíthatóság problémájára Nagy Viktor</i>	<i>168</i>
Bevezetés	168
Strukturálatlan döntési problémák	168
Verbális döntésanalízis	168

Oleg I. Larichev.....	169
Többszempontú rangsorolási probléma.....	169
Modell	170
<i>Adott :</i>	
1. $K=1,2,\dots,N$ a kritériumok halmaza	
2. n_q a q -adik kritérium skáláján felvehető lehetséges értékek száma ($q \in K$);	
3. $X_q=\{x_{iq}\}$ a q -adik kritérium skáláján felvehető értékek halmaza; $ X_q =n_q$ ($q \in K$); a skálán az értékek a legjobb értéktől a legrosszabb felé tartanak; az értékek rendezése a skálán a többi skála értékeitől független;	
4. $Y = X_1 * X_2 * \dots * X_N$ a következő típusú $y_i \in Y$ vektorok halmaza:	
$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iN})$, ahol $y_{iq} \in X_q$ és $P = Y = \prod_{i=1}^N n_i$;	
Az összes lehetséges alternatívák halmaza.	
5. $A = a_i \in Y$; $i=1,2,\dots,t$ – vektorok egy t elemű halmaza, ami a valós alternatívák halmaza.	
.....	170
Példa	170
ZAPROS	172
ZAPROS I	173
Döntéshozói preferenciák kinyerése	174
Példa az eljárás működésére.....	175
Megjegyzés.....	179
Következtetések	179

• Szavazási eljárások - Berta Árpád

Bevezetés

Annak a kérdéskörnek a megválaszolása, hogy miként lehet igazságosan eldönteni különböző rangsorok alapján megadott szavazatok összesített eredményét, már a történelem legkorábbi korszakaiban foglalkoztatta az emberiséget. Ugyanakkor mára belátták, hogy ennek megoldása visszavezethető az Utazó ügynök problémára, ami alapvetően egy NP-nehéz problémának számít, így ez azt jelenti, hogy nincs hatékony módszer, ami pontos végeredményt tudna adni. Ennek köszönhetően kezdetekben inkább egyelemű rangsorokkal foglalkoztak és csak később, ahogy a többségi döntések egyre inkább kezdtek az élet legtöbb területén előtérbe kerülni, vizsgálták meg a többelemű rangsorokkal történő szavazások témakörét. Az első ilyen matematikailag megvizsgált módszerek a francia forradalom és a korai, európai parlamentáris rendszerek kialakulása környékén keletkeztek. Azóta természetesen a legkülönbözőbb, meglehetősen hatékony és pontos módszert vezettek be a matematikusok, amelyeket már élesben is használnak például több különböző ország választási eljárásai között.

A szavazás formális bemutatása

Ahhoz, hogy egyértelművé váljon számunkra, hogy mit értünk a vizsgálataink szempontjából szavazás alatt érdemes megnézni a probléma formális definícióját. Adott a lehetséges választások, alternatívák halmaza X és adott továbbá $N \geq 2$ szavazó, akik a csoport tagjai és az X -beli alternatívák közül választanak egy rangsort, ami az általuk leadott szavazatot fogja jelenteni. Az i -edik szavazó véleményét a Φ_i struktúra írja le, az összes szavazó rangsorait pedig az $\Phi = \langle \Phi_1, \dots, \Phi_n \rangle$ véleményprofil tartalmazza. A lentebb ismertetett módszerekben feltesszük, hogy az összes szavazó preferenciája ismert, és ezek ismeretében szeretnénk csoportos döntést hozni. A véleményprofil ismeretében a szavazás végeredményét megadó függvényt F -fel jelöljük. Az alábbiakban bemutatott különböző módszerek ennek az F -nek az általánosításai lesznek.

Bemutatott módszerek

Az alábbi módszereket fogom részletesen megvizsgálni ebben az esszében: Condorcet eljárás, Copeland módszer, Dodgson módszer, Borda módszer, Hare módszer, Tideman módszer, Kemeny–Young módszer. Minden módszer esetében az általános eljárási bemutatás mellett egy-egy példával fogom szemléltetni a működésüket.

Condorcet eljárás

Kezdjük először az egyik legáltalánosabb szavazási eljárással, amely inkább a módszerek egy speciális családjának számít, ahol az egyes alternatívapárok egymással szembeni összehasonlítása alapján hozzuk ki a győztest.

A Condorcet-módszerek a 18. századi matematikus és filozófus, Nicolas de Condorcet nevét viselik, aki matematikus, filozófus és politológus márki volt. A francia forradalom környékén, 1785-ben a lehetséges politikai rendszerek kutatása közben alkotta meg ezt a szavazási eljárást. Ugyanakkor a Condorcet-kritériumot már Ramon Llull is kidolgozta 1299-ben, bár mivel egyéb okkult tudományokkal is foglalkozott ezért a tudományos eredményei nem maradtak fenn a köztudatban, matematikai eredményeit csak a későbbi korokban tárták fel újra, így Condorcet tőle függetlenül alkotta meg ezt a módszert.

Az eljárás a következőképpen működik: páronként vizsgáljuk meg és versenyeztessük egymással az összes lehetséges alternatívákat a leadott szavazatok egyéni rangsora alapján. Ezután megvizsgáljuk, hogy melyik az az alternatíva, amely az összes többit legyőzi. Ezt az alternatívát a Condorcet-győztesnek nevezzük.

Az eljárás legnagyobb hibáját az jelenti, hogy a legritkább esetben szokott előállni olyan véleményprofil, amelyből egyértelműen Condorcet-győztest lehet hirdetni. Ilyenkor viszont meglehetősen hatékonyan és pontosan kijelölhető a győztes. Ellenkező esetben pedig körbeverésről beszélünk, és további eljárásra van szükségünk, hogy kiválasszuk a győztest. Ezek a módszerek a Condorcet eljárás általánosításai, a továbbiakban több ilyet fogok majd bemutatni.

Példa a Condorcet eljárásra

Legyen 3 alternatíva: A , B , C , amelyekből képzett rangsorok alapján szeretnénk meghatározni a Condorcet-győztest. Az alábbi szavazatok érkeznek: „ $A > B > C$ ” - 6 db szavazat, „ $B > C > A$ ” - 3 db szavazat, „ $C > A > B$ ” - 1 db szavazat.

Ahhoz, hogy alternatívapárokat képezhessünk és össze tudjuk számolni, hogy miként alakult

az egyes alternatívákra a szavazatok eloszlása, először bontsuk külön a beérkezett szavazatokat az alábbiak szerint:

- 6 esetben „ $A > B$ ”, 6 esetben „ $A > C$ ” és 6 esetben „ $B > C$ ”
- 3 esetben „ $B > C$ ”, 3 esetben „ $B > A$ ” és 3 esetben „ $C > A$ ”
- 1 esetben „ $C > A$ ”, 1 esetben „ $C > B$ ” és 1 esetben „ $A > B$ ”

Meg kell vizsgálnunk az összes lehetséges alternatívapár esetén, hogy egymáshoz képest milyen arányban tudták legyőzni a másikat. Például az A 7 esetben győzte le a B -t és a B 3 esetben győzte le az A -t, így a kettejük győzelmi aránya: $A:B = 7:3$. Ennek alapján meghatározható az $A:C = 6:4$ és a $B:C = 9:1$.

Végül azt kell meghatározni, hogy van-e olyan alternatíva, amely legyőzi az összes többi. Igen van, hiszen az A legyőzi a B -t és a C -t is. Így kijelenthető, hogy az A a Condorcet-győztes.

Vegyük észre, hogy ha egy olyan állás alakult volna ki amelyben a C legyőzi az A -t, akkor abban az esetben körbeverés alakult volna ki, így nem lehetett volna Condorcet-győztest hirdetni. Nyilvánvaló, hogy további szűkítésekre van szükségünk az ilyen esetekben.

Copeland módszer

Egészítsük ki a Condorcet-eljárást úgy, hogy rendeljünk minden alternatívához egy értéket (indexet). Amely legyen kezdetben 0 és ha jobbnak bizonyult egy másiknál akkor növeljük 1-gyel, ha pedig rosszabbnak akkor csökkentjük 1-gyel. Értelmszerűen az indexek alapján megadható a csoport rangsor, és amely alternatívának a legnagyobb az indexe az a Copeland-győztes.

Mint azt a lenti példából látni fogjuk, az alternatívák ilyen típusú rendezése nem minden esetben ad győztest, mert könnyen alakulhat ki döntetlen állás. Példának okáért az előző példa végén feltett feltételek mellett ez a módszer sem tudna győztest hirdetni az alternatívák közül.

Példa a Copeland módszerre

Legyen 6 alternatíva: A , B , C , D , E F amelyekből képzett rangsorok alapján szeretnénk meghatározni a Copeland-győztest. Az alábbi szavazatok érkeznek:

- $A > B > C > E > D > F$ - 33 db szavazat
- $B > C > E > D > F > A$ - 33 db szavazat
- $C > D > E > F > A > B$ - 33 db szavazat
- $D > E > F > A > B > C$ - 33 db szavazat

- $E > F > A > B > C > D$ - 33 db szavazat
- $F > A > B > C > E > D$ - 33 db szavazat

Először gyűjtjük ki az alternatívák egymással összehasonlított szavazati arányait az Condorcet eljárásnál bemutatott módon. Melyek a következők lesznek:

$A:B = 165:33$	$A:C = 132:66$	$A:D = 99:99$	$A:E = 66:132$	$A:F = 33:165$
$B:C = 165:33$	$B:D = 132:66$	$B:E = 99:99$	$B:F = 66:132$	$C:D = 165:33$
$C:E = 132:66$	$C:F = 99:99$	$D:E = 66:132$	$D:F = 132:66$	$E:F = 165:33$

Ezután a következő lépésben alternatívánként számoljuk össze, hogy hány összehasonlításban kerül ki az adott alternatíva győztesen és hányban vesztesen. Az A alternatíva legyőzte a B , C -t, és veszített az E , F -fel szemben, így az ő indexe $0+2-2 = 0$ lesz. A B jobb a C , D -nél, de rosszabb az A , F -nél, a C jobb a D , E -nél, de rosszabb az A , B -nél, az F pedig jobb az A , B -nél és rosszabb az E , D -nél. Így az ő indexük is 0 lesz. Ezzel szemben a D csak az F -nél jobb, de rosszabb az E , C , B -nél, ezért az ő indexe -2 lesz. Az E indexe 2 lesz, hiszen legyőzi az F , D , A -t és mindössze csak a C ellen veszít.

Összegezve az E lett a Copeland-győztes, mert az ő indexe a legnagyobb.

Dogdson módszer

A Copeland módszerrel továbbra sem javítottuk ki a Condorcet-eljárás azon hibáját, hogy amennyiben teljes körbeveréses állás alakul ki, akkor is szeretnénk győztest hirdetni, hiszen az eltérő aránypároknak köszönhetően ez megtehető. Ezért olyan módszerre van szükségünk, amely jól reagál ezekre az esetekre és képes az alternatívák megkülönböztetéséhez a győzelmi arányból adódó eltéréseket is hozzávenni. Charles Lutwidge Dodgson 1876-ban alkotta meg ezt a módszert, aki a matematikai, filozófiai vizsgálatain felül, Lewis Carroll írói álnéven az Alice Csodaországban szerzője is egyben.

A módszer lényege, hogy úgy rendelünk értéket (indexet) minden alternatívához, hogy megvizsgáljuk azt, hogy hány páros cserét kell végrehajtani a rangsorokban, ahhoz hogy Condorcet-győztes legyen. Az az alternatíva lesz a Dogdson-győztes, akinek a legkisebb az Dogdson-indexe, hiszen ő van legközelebb a Condorcet-győzelemhez.

A módszerről érdemes még megjegyezni, hogy NP-nehéz. Tehát minden valószínűség szerint nem adható meg rá olyan algoritmus, ami polinomidőben megoldja.

Példa a Dodgson módszerre

Legyen 4 alternatíva: A , B , C , D , amelyekből képzett rangsorok alapján szeretnénk meghatározni a Dodgson-győztest. Az alábbi szavazatok érkeznek:

- $A > B > C > D$ – 10 db szavazat
- $C > D > B > A$ – 7 db szavazat
- $A > D > C > B$ – 3 db szavazat
- $D > C > A > B$ – 3 db szavazat
- $B > D > A > C$ – 7 db szavazat

Először az eddig megszokott Condorcet eljárásnál bemutatottak alapján, gyűjtsük ki az alternatívák egymással összehasonlított szavazati arányait. Melyek a következők lesznek:

$A : B = 16:14$	$B : C = 17:13$	$C : D = 17:13$
$D : A = 17:13$	$A : C = 20:10$	$B : D = 17:13$

Ezután a következő lépésben minden alternatíva esetén vizsgáljuk meg, hogy hány lépésben végrehajtott cserével érhető el, hogy Condorcet győztes legyen. Az A alternatíva esetében egyedül a D -vel szemben veszít, ekkor pedig 3 páros cserére van szükség, így a Dodgson-indexe is 3 lesz. A B az A -val szemben veszít, a Dodgson index 2 lesz. A C az A , B -vel szemben veszít, így a mindkét esetben elvégzett páros cserék alapján Dodgson index: $3 + 6 = 9$ lesz. A D a C , B -vel szemben veszít, így a Dodgson index $3 + 3 = 6$ lesz.

Összegezve a B a Dodgson-győztes, mert az ő indexe a legkisebb.

Érdeemes megvizsgálni ezen a példán a korábbi módszereket. A Condorcet-eljárás természetesen nem tudna győztest hirdetni, hiszen nincs olyan alternatíva, amely legyőzi az összes többi. A Copeland-módszer sem tudna győztest adni, mivel az A és B alternatíva hasonlóan 1-es indexszel lenne ellátva.

Borda módszer

Eddig két Condorcet eljárás alapuló módszert vizsgáltunk meg. Most pedig tegyünk egy kis kitérőt és nézzük meg Jean-Charles de Borda matematikus, fizikus, politológus által 1770-ben, a francia forradalom előtti időkből kifejlesztett pontozásos módszert. Ez az a legközismertebb pontozásos eljárás, amit az élet különböző területein jelenleg is alkalmaznak.

Az egyéni rangsorban elfoglalt hely alapján pontozzuk az adott alternatívákat, majd

összegezzük a pontokat a pozícióik alapján. Természetesen az az alternatíva lesz a győztes, aki a legtöbb pontot szerezte. A pontozás történhet többféle súlyozással, a legegyszerűbb eset az, amikor az utolsó helyért 0, az utolsó előttiért 1 pont jár, és így tovább... Ez a pozíciók egy lineáris súlyozásnak számít. Természetesen nincs olyan súlyozási eljárás, ami minden esetben igazságos döntést tud generálni, az eljárás nehézségét a megfelelő súlyozás meghatározása jelenti.

Példa a Borda módszerre

Maradva a Dogdson-módszernél bemutatott példánál, lineáris súlyozást használva és megvizsgálva, hogy az egyes pozíciókon hány szavazatot kapott az adott alternatíva:

Jelölt	Első hely (3)	Második (2)	Harmadik (1)	Negyedik (0)	Borda szám
A	13	0	10	7	49
B	7	10	7	6	48
C	7	3	13	7	40
D	3	17	0	10	43

A táblázatban található Borda számot úgy kapjuk, hogy a táblázat fejlécében lévő súllyal megszorozzuk az adott alternatívára az adott pozícióban kapott szavazatot, majd sorfolytonosan összegezzük őket.

A Borda számok alapján az A nyer, mert neki a legnagyobb a pontszáma.

Ha összevetjük a Dogdson index alapján kapott győztesrel, akkor láthatjuk, hogy ugyanarra a példára két különböző módszer más eredményt ad. Ezért is nagyon fontos jól megválasztani, hogy milyen módszert választunk, amennyiben igazságos döntést szeretnénk hozni.

Hare módszer

Nézzünk meg egy újabb nem Condorcet-eljárást, amelyet Thomas Hare brit politológus alkotott meg 1833-ban. Aki elsősorban a választási reformelképzeléseiként hirdette meg ezt az eljárást, így a matematikai igazolásával nem sokat törődött. Ugyanakkor a történelem igazolta helyette az eljárása létjogosultságát, hiszen mind a mai napig több korábbi brit befolyás alatt álló, mára független ország alkalmazza a helyi vagy a parlamenti választások módszereként. Ezen a módszeren alapuló választási rendszer működik Ausztráliában,

Indiában, Írországbán, Pápua Új-Guineában és Fijin. Ezen felül még több más országban alkalmaznak hasonló választási eljárást a helyi, önkormányzati választások alkalmával.

A módszer lényege, hogy amennyiben egy alternatíva a szavazatok több, mint felén az első helyen szerepel, akkor ő a győztes. Ha ezzel szemben egyik alternatíva sem birtokolja a szavazatok több, mint felét, akkor az első helyen legkevesebb szavazatot kapott alternatívát (vagy alternatívákat) töröljük, majd nélküle újrakezdjük az első helyek számítását mindaddig, míg nem lesz olyan jelölt, aki a szavazatok több, mint felét el nem érte.

Példa a Hare módszerre

Vegyük az utóbbiakban használt példánkat és vizsgáljuk meg, hogy a Hare módszer alapján ki lesz a győztes.

Az első körben az A 13, a B 7, a C 7 és a D 3 szavazatot szerzett. Jól látható, hogy az első helyen az A nem szerezte meg a szavazatok több, mint felét, így töröljük a D -t, mert a legkevesebb szavazatot kapta az első körben. Nélküle vizsgáljuk meg a kapott véleményprofilokat:

- $A > B > C$ – 10 db szavazat
- $C > B > A$ – 7 db szavazat
- $A > C > B$ – 3 db szavazat
- $C > A > B$ – 3 db szavazat
- $B > A > C$ – 7 db szavazat

Ez alapján az A 13, a B 7 és a C 10 szavazatot kapott. Az A továbbra se érte el a szavazatok több, mint felét, ezért a B -t is töröljük. Majd a B nélküli véleményprofil alapján az A 20, míg a C 10 szavazatot kap, ahol már az A megkapta a szavazatok több, mint felét. Így az A lesz a Hare-győztes.

Tideman módszer

A rövid kitérő után térjünk vissza a Condorcet-eljárásokhoz és nézzünk meg egy olyan eljárást, amit már nem a francia forradalom és azt követő időszakban alkottak meg, hanem a napjaink, a modern matematikai kutatásoknak az eredménye. Tideman gráf rajzolás alapú megközelítéséről lesz szó.

Módszer az alábbi lépésekből áll. Először a Condorcet-eljárás alapján páronként vizsgáljuk meg, hogy melyik alternatíva a jobb. Ezután a győzelmi arányok szerint rendezzük sorba az alternatívapárokat. Következő lépésben irányított gráfot rajzolunk az előző sorrend alapján

úgy, hogy lépésenként berajzolunk egy élet. Ha irányított kört kapnánk a gráfban, akkor az éppen berajzolásra szánt élet elhagyjuk. Az így kapott gráf lesz az eredmény-gráf, ahol az csúcspont lesz a győztes alternatíva, amelynek csak kifelé mutató éle van.

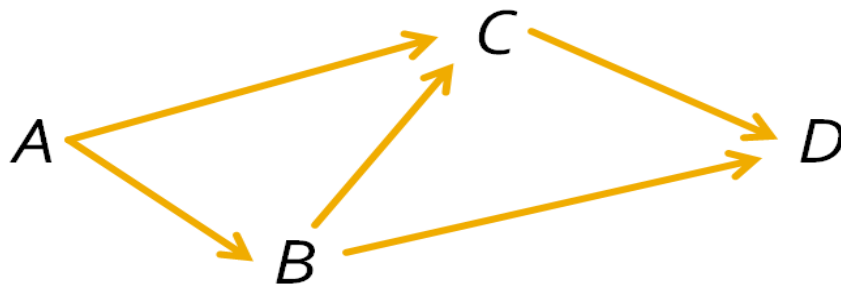
Példa a Tideman módszerre

Vegyük az eddigiekben leggyakrabban használt példánkat és vizsgáljuk meg, hogy a Tideman módszer alapján ki lesz a győztes.

Először az eddig megszokott Condorcet eljárásnál bemutatottak alapján, gyűjtsük ki az alternatívák egymással összehasonlított szavazati arányait és rendezzük őket győzelmi arány nagysága szerint. Amelyek a következők lesznek:

1. $A : C = 20:10$
2. $B : C = 17:13$
3. $C : D = 17:13$
4. $D : A = 17:13$
5. $B : D = 17:13$
6. $A : B = 16:14$

Ezek után a sorrend alapján kezdjük el megrajzolni a gráfot. Először az A-ból C-be mutató élt rajzoljuk be, majd a B-ből C-be és a C-ből D-be mutató élt. Ekkor következne a D-ből A-ba mutató él, de ez már egy irányított kört alkotna a gráfban ezért elhagyjuk. Végül berajzoljuk a B-ből D-be és az A-ból B-be mutató élt. Az eredmény-gráf a következő lesz:



Mivel az A az a csúcs, amelyből csak kifelé mutató élek vannak ezért ebben a példában ő lesz a Tideman-győztes. Ha jobban megfigyeljük ezt a példát, akkor észrevehetjük a módszer egyik hibáját. Ugyanis amennyiben több azonos győzelmi arányú aránypár szerepel a vizsgált véleményprofilban, akkor azok közül nincs lehetőség különbséget tenni a sorrendben. Pedig - mint a példában is láthattuk – ezen múlhat, hogy melyik él lesz berajzolva vagy elhagyva. Ugyanakkor nagyobb szavazati mennyiségek esetén ez csak a legritkább esetben okozhat problémát, ezért összességében egy hatékony módszerről beszélhetünk.

Kemeny–Young módszer

Végül nézzünk meg egy olyan módszert, ami a lehető legpontosabb végeredményt fogja adni a szavazási problémára. Ezt a módszert Kemény János György magyar származású, amerikai matematikus fejlesztette ki 1959-ben, akinek a nevéhez fűződik többek között a BASIC programozási nyelv feltalálása. Majd végül Peyton Younggal közösen véglegesítették a matematikai vizsgálatokat a módszerről.

A módszer a következő: az alternatívák összes lehetséges rangsorát megvizsgáljuk, olyan szempontból, hogy összegezzük az adott rangsorban szereplő alternatívapárok rangsorára hány szavazat érkezett. Az a rangsor lesz a győztes, amelyiknél a legnagyobb ez az összeg.

Az eljárás már 4 alternatíva esetén is NP-nehéz, mivel minden esetben az alternatívák faktoriálisa féle lehetséges alternatíva sorrendet kell megvizsgálni. Ugyanakkor kevés alternatíva és sok szavazó esetén még elfogadható futásidő alatt pontos eredményre vezet. Továbbá meglehetősen jó heurisztikák adhatóak arra, hogy mely rangsor variációt nem kell megvizsgálni, így gyorsítható a futásidő.

Példa a Kemeny-Young módszerre

Vegyük az eddigiekben leggyakrabban használt példánkat és vizsgáljuk meg, hogy a Kemeny-Young módszer alapján ki lesz a győztes.

Számoljuk ki az aránypárokat a megszokott módon, majd vegyük az alternatívák összes lehetséges sorrendjét:

- $A > B > C > D : 16 + 20 + 13 + 17 + 17 + 17 = 100$
- $A > B > D > C : 16 + 13 + 20 + 17 + 17 + 13 = 96$
- $A > C > B > D : 20 + 16 + 13 + 13 + 17 + 17 = 96$
- ...
- hasonlóan mind a $4! (=24)$ lehetséges eset megvizsgálása

Jól látható, hogy az első sorrendnél nem lehetséges nagyobb összeget elérő sorrendet elérni, így ez a módszer szerint is az A lesz a győztes, továbbá ez a módszer pontos eredményt ad a további helyezettekre nézve is.

Összegzés

Mint láthattuk rengeteg különböző eljárás létezik a szavazási problémára, ami általában azokra a problémákra jellemző, amelyekre nem létezik egy tökéletes megoldás. Mindig az adott szavazást, alternatívák számát, szavazatok számát, feladat bonyolultságát figyelembe

véve érdemes megválasztani az adott esetre kielégítő megoldást adó eljárást. Vannak eljárások, amelyek viszonylag egyszerűen és gyorsan végrehajthatók, de kevésbé adnak pontos eredményt, vagy esetleg csak a győztes személyét tudják meghatározni. Ezzel szemben vannak eljárások, amik a lehető legpontosabb eredményt tudják garantálni, az összes helyezettet meg tudják határozni, ugyanakkor egy nagyobb minta esetén (pl egy országos parlamenti választások, sok jelölttel) akár napokig, hetekig eltartó számolást igényelhet.

Források:

- Kiss Csaba: Döntési módszerek, Diplomamunka, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Operációkutatási Tanszék, Dr. Fuller Róbert témavezető
- John Kemeny, "Mathematics without numbers", *Daedalus* 88 (1959), pp. 577–591.
- H. P. Young and A. Levenglick, "A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 35, no. 2 (1978), pp. 285–300.
- Tideman, T.N. (1987) Independence of clones as a criterion for voting rules. *Social Choice and Welfare* 4: 185-206.

• Hasznossági függvények –Gál Péter

Hasznossági függvények létezése

Jelölések

- $A = \{a_i\}_{i \in [1..n]}$: az alternatívák halmaza, n db.
- $S = \{s_i\}_{i \in [1..k]}$: a természet állapotai, k db.
- $X = \{c_i\}_{i \in [1..nk]}$: a lehetséges kimenetek, nk db, m elemű vektor.
- $X^p = \{(\alpha_i c_i | i \in [1..nk]) \mid \sum_{i=1}^{nk} \alpha_i = 1\}$: a kockázatos lehetőségek.
- $u: X \times S \rightarrow \mathbb{R}$ és $U: A \rightarrow \mathbb{R}$: hasznossági és várható hasznossági függvények.

Fontos megjegyezni, hogy $A \subseteq X^p$, azaz minden alternatíva egy kockázatos lehetőség. X^p elemeit idegen szóval lotterynek nevezzük.

Bernoulli-elv

Amennyiben adottak a $p(s)$ valószínűségek, az a tevékenység várható hasznossága:

$$U(a) \equiv \sum_{s \in S} p(s)u(a, s)$$

Neumann – Morgenstern axiómák

1. Az X^p halmazon értelmezett egy $\succsim$ gyenge rendezési reláció.
2. Linearitás: $(\forall \alpha \in (0,1)) x^p \succ x^q \Rightarrow x^p \succ (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) \succ x^q$
3. Folytonosság: $x^p \succ x^q \succ x^r \Rightarrow \exists (\alpha, \beta \in (0,1)) (\alpha x^p, (1-\alpha)x^r) \succ x^q \succ (\beta x^p, (1-\beta)x^r)$
4. Kommutativitás: $(\forall \alpha \in [0,1]) (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) = ((1-\alpha)x^q, \alpha x^p)$
5. Redukciós szabály: $\alpha x^s = (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) \Rightarrow (\beta x^s, (1-\beta)x^q) = (\alpha\beta x^p, (1-\alpha\beta)x^q)$

Ez alapján értelmezett a következő tétel:

Az X^p -n értelmezett,

$$x^p \succsim x^q \Leftrightarrow U(x^p) \geq U(x^q)$$

$$U(\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) = \alpha U(x^p) + (1-\alpha)U(x^q), \alpha \in (0,1)$$

tulajdonságokkal rendelkező valós értékű U függvény akkor és csak akkor létezik, ha az 1-5. axiómák bármely x^p, x^q és $x^r \in X^p$ kockázatos lehetőség együttesre teljesülnek.

Továbbá az U pozitív lineáris transzformáció erejéig egyértelműen meghatározott, azaz egy U' valós függvény akkor és csak akkor fogja teljesíteni a fenti feltételeket, ha

$$U'(x^p) = \lambda U(x^p) + \mu$$

ahol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0$.

Következménye: pozitív lineáris transzformációval stratégiai ekvivalensek állíthatók elő.

Hasznossági függvény előállítása

Az előállításhoz fel kell állítani egy, a fenti axiómákra vezető feltételrendszert a kockázatos lehetőségek felett.

Bizonyossági egyenértékűség

Biztos lehetőség: olyan lottery, ahol csak egy kimenetel (legyen ez a) valószínűsége 1, a többié 0. Az 1. feltétel, hogy bármely biztos lehetőséghez található olyan egy olyan lottery, melyet az adott tényező legjobb (a_{max}) és legrosszabb (a_{min}) kimenetéből keverünk ki. Tehát:

$$\exists \beta \in (0,1) a \sim ((1 - \beta)a_{min}, \beta a_{max}) \equiv a_c$$

Ekkor a értéke a kikevert lottery bizonyossági egyenértékese.

Helyettesítés

Tegyük fel, hogy van két kockázatos lehetőségünk, melyek csak abban különböznek egymástól, hogy egy adott kimenetelt (a_i) kicserélünk annak bizonyossági egyenértékéhez tartozó kockázatos lehetőséggel (a_{ic}). A 2. feltétel, hogy ekkor a két lehetőség számunkra indifferens:

$$(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_i a_i, \dots, \alpha_n a_n) \sim (\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_i a_{ic}, \dots, \alpha_n a_n)$$

Általánosítva, az összes kimenetel kicserélhető annak bizonyossági egyenértékéhez tartozó kockázatos lehetőséggel:

$$(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_i a_i, \dots, \alpha_n a_n) \sim (\alpha_1 a_{1c}, \dots, \alpha_i a_{ic}, \dots, \alpha_n a_{nc})$$

Redukálhatóság

Az 5. feltétel szerint egy tetszőleges kockázatos lehetőség kicserélhető egy vele indifferens összetett kockázatos lehetőséggel és fordítva. Ez gyakorlatilag az 5. axióma.

Összehasonlíthatóság

Az előző három feltétel alapján állíthatjuk, hogy bármely kockázatos lehetőség visszavezethető egy vele egyenértékű kockázatos lehetőségre, melyben csak az adott tényező legjobb és legrosszabb kimenetele szerepel:

$$x^p = ((1 - \alpha)a_{min}, \alpha a_{max})$$

Ez alapján állíthatjuk a következő, 4. feltételt:

$$x^p = ((1 - \alpha_1)a_{min}, \alpha_1 a_{max})$$

$$x^q = ((1 - \alpha_2)a_{min}, \alpha_2 a_{max})$$

$$x^p \succcurlyeq x^q \Leftrightarrow \alpha_1 \geq \alpha_2$$

Következmény

A fenti 4 feltételből levezethetőek a Neumann – Morgenstern axiómák. Ez viszonylag könnyen bizonyítható is. Ezek alapján kell előállítani az u és U függvényeket. Minden lehetséges a_i kimenetelhez tartozik egy bizonyossági egyenértékes:

$$a_i \sim ((1 - \beta_i)a_{min}, \beta a_{max}) = a_{ic}$$

Ez alapján definiáljuk az u függvényt a következő módon:

$$u(a_i) = \beta_i$$

Továbbá az előzőekben definiáltuk a következőt:

$$x^p = ((1 - \alpha)a_{min}, \alpha a_{max})$$

Ez alapján definiálhatjuk az $U: X^p \rightarrow \mathbb{R}$ és $U: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket:

$$U(x^p) = \alpha$$

A második esetben annyi a különbség, hogy az értelmezési tartomány nem a kockázatos kimenetelre, hanem az A halmazra korlátozódik. Ez alapján megmutatható, hogy:

$$U(x^p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(a_i)$$

Ez pedig megfelel a Bernoulli-elvnek.

Bizonyossági egyenértékes módszer

Legyen adott két kockázatos lehetőség: L és L' . L esetében a nyereség 50% eséllyel 200, 50% eséllyel 800, L' esetében a nyereség 60% eséllyel 300, 40% eséllyel 600. A cél annak eldöntése, hogy melyik lehetőséget válasszuk. A lehetséges kimenetelre 200, 800, 300 és 600. Minden lehetséges kimenetelhez alkotunk egy referencia lotteryt, ami az adott kimenetel bizonyossági egyenértékese. Legyen ez β_i valószínűséggel 1000 ill. $(1-\beta_i)$ valószínűséggel 0. β_i értékét a döntéshozó határozza meg aszerint, hogy számára mikor indifferens a referencia lottery és a biztos kimenetel. A példában legyenek ezek az értékek a következők:

$$200 \sim (0,3 : 1000, 0)$$

$$800 \sim (0,8 : 1000, 0)$$

$$300 \sim (0,4 : 1000, 0)$$

$$600 \sim (0,7 : 1000, 0)$$

Ezek alapján konstruáljuk meg a két játékra a csak referencia játékokból álló összetett lotteryket, melyeket aztán redukcióval egyetlen referencia játékra egyszerűsítünk:

$$L \sim (0,5 : [0,3 : 1000, 0], 0,5 : [0,8 : 1000, 0]) = (0,55 : 1000, 0)$$

$$L' \sim (0,6 : [0,4 : 1000, 0], 0,4 : [0,7 : 1000, 0]) = (0,52 : 1000, 0)$$

Ez a két játék most már könnyen összehasonlítható:

$$L \succcurlyeq L', \text{ mert } 0,55 > 0,52$$

Továbbá a fenti értékek segítségével előállítható a hasznossági függvény is, ami az u függvény definíciója szerint: $u(200) = 0,3$, $u(800) = 0,8$, $u(300) = 0,4$, $u(600) = 0,7$. Ezekhez még hozzávéve az $u(0) = 0$ és $u(1000) = 1$ értékeket, illeszthető egy hasznossági függvény a $[0, 1000] \rightarrow [0, 1]$ leképezéshez.

Kockázati magatartás

Alapvetően háromféle döntéshozót különböztethetünk meg attól függően, hogy milyen a hasznossági függvényük alakja:

- A legegyszerűbb eset a semleges kockázati magatartású, aki a bizonyossági egyenértékest a várható pénzértékben jelöli meg. Az ő hasznossági függvényük az egyenes.
- A kockázatkerülő típus többre értékeli a biztos bevételt, mint a kockázatos játékot. A bizonyossági egyenértékest a várható pénzérték alatt jelöli meg, hasznossági függvénye pedig végig az egyenes felett marad, szigorúan konkáv. Az előző példa döntéshozója ilyen volt.
- Ennek párja a kockázatkedvelő, akik a lehetséges nyereséget értékelik többre, mint a biztos bevételt. A bizonyossági egyenértékest a várható pénzérték felett jelöli meg, hasznossági függvénye pedig szigorúan konvex.

A várható pénzérték és a bizonyossági egyenértékes különbsége a kockázati prémium. Ez a fokmérője annak, hogy a döntéshozó mennyire kockázatelutasító. Ha valaki kockázatelutasító, hajlandó biztosítást kötni. Ennek alapja, hogy a játékos szeretné a veszteséget elkerülni, így hajlandó fizetni azért, hogy az esetleges veszteséget valaki átvállalja. A díj nagyságát azonban befolyásolja anyagi helyzete: a vagyon növekedésével csökken a kockázatelutasítás mértéke, így végtelen vagyonnal rendelkező ember 0 díjat hajlandó fizetni.

Többtényezős hasznossági függvények

Legyenek a lottery-k a következő módon adottak:

$$\mathbf{x}^p \in X^p = \{X_1, \dots, X_m\}$$

$$\mathbf{x}^p = (x_1, \dots, x_m)$$

$$p(\mathbf{x}) = (p_1(x_1), \dots, p_m(x_m))$$

$$x_i^p \in X_i^p, x_i^p = \{(x_i, p_i(x_i)) \mid x_i \in X_i\}$$

Ami nem más, mint az eddigiek kiterjesztése vektorokra. Ekkor a feltételes hasznossági függvény (u) és a várható hasznossági függvény (U):

$$U(\mathbf{x}^p) \equiv E^p(u(\mathbf{x}))$$

$$U_i(x_i^p) \equiv E^p(u_i(x_i))$$

Itt az E^p a p eloszlással vett várható értéket jelöli.

Az additív hasznossági függvény a legkönnyebben előállítható, ugyanakkor ez tartalmazza a legtöbb megkötést is. Mindenekelőtt bizonyos fokú függetlenséget kell feltételezni a tényezők között. Többféle függetlenség különböztethető meg:

- Fishburn-féle értékfüggetlenség: $T = \{X_1, \dots, X_m\}$ részhalmazai akkor és csak akkor értékfüggetlenek, ha bármely $\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^q \in X^p$ esetén $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{x}^q \Leftrightarrow (\forall i = 1 \dots m) p_i = q_i$. Ennek verifikálása nem egyszerű feladat és túlságosan restriktív, nem enged meg interakciót tényezők között.
- Preferenciafüggetlenség: Adott $C \subset T, C^* = \bar{C}$ tényezőhalmazok preferenciafüggetlenek, ha: $\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}_C^2 \in X_C, \mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}: (\forall \mathbf{x}'_{C^*} \in X_{C^*}) ((\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}'_{C^*}) \succ (\mathbf{x}_C^2, \mathbf{x}'_{C^*}) \Rightarrow (\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}_{C^*}) \succ (\mathbf{x}_C^2, \mathbf{x}_{C^*}))$, azaz az egyik tényezőhalmaz szerinti rendezést nem befolyásolja a másik tényezőhalmaz.
- Hasznossági függetlenség: Adott $C \subset T, C^* = \bar{C}$ tényezőhalmazok hasznosság-függetlenek, ha: $\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}_C^{2p} \in X_C^p, \mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}: (\forall \mathbf{x}'_{C^*} \in X_{C^*}) ((\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}'_{C^*}) \succ (\mathbf{x}_C^{2p}, \mathbf{x}'_{C^*}) \Rightarrow (\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}_{C^*}) \succ (\mathbf{x}_C^{2p}, \mathbf{x}_{C^*}))$, azaz a lottery-k közötti rendezést nem befolyásolja a másik tényezőhalmaz. Ez a preferenciafüggetlenség és az értékfüggetlenség között helyezhető el. A hasznossági függetlenségből következik a preferenciafüggetlenség, de ez fordítva nem igaz.
- Kölcsönös hasznosságfüggetlenség: egy T tényezőhalmaz akkor kölcsönösen hasznosságfüggetlen, ha minden részhalmaza hasznosságfüggetlen a komplementer halmazára nézve.

A továbbiakhoz tegyük fel, hogy létezik egy, az X halmazon értelmezett u függvény úgy, hogy bármely $\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^q \in X^p$ esetén:

$$\mathbf{x}^p \succ \mathbf{x}^q \Leftrightarrow E^p(u(\mathbf{x})) \geq E^q(u(\mathbf{x}))$$

Ekkor a következőket állapíthatjuk meg:

- Akkor és csak akkor léteznek az X_i -n értelmezett pozitív lineáris transzformációval egymással stratégiailag ekvivalens u_i függvények, melyek kielégítik a következő két (ekvivalens) feltételt:

$$u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) + \dots + u_m(x_m)$$

$$\mathbf{x}^p \succ \mathbf{x}^q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^m E^{p_i}(u_i(x_i)) \geq \sum_{i=1}^m E^{q_i}(u_i(x_i))$$

ha $X_1, \dots, X_m$ értékfüggetlen.

- Tegyük fel, hogy u normalizált, $u(\mathbf{x}^*) = 1$ és $u(\mathbf{x}^0) = 0$. Ekkor léteznek az X_i halmazokon definiált u_i függvények, melyek bármely $\mathbf{x}$ -re:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i(x_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m \lambda_{ij} u_i(x_i) u_j(x_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j>i}^m \sum_{k>j}^m \lambda_{ijk} u_i(x_i) u_j(x_j) u_k(x_k) + \dots$$

$$+ \lambda_{12\dots m} u_1(x_1) \dots u_m(x_m)$$

ha X_i hasznosságfüggetlen a komplementer halmazra nézve minden i -re.

- Az előző csak akkor írható additív-multiplikatív formába $0 < \lambda_i < 1$, $\mu > -1$ együtthatókkal, ha T kölcsönösen hasznosságfüggetlen.

A második pontbeli egyenlet formáját tekintve analóg a kvázi-additivitási tétellel, amiből következik, hogy a kvázi-additív formából a λ paraméterek megfelelő változtatásával előállítható mind az additív, mint a multiplikatív forma.

• Értékelő függvények és conjoint measurement – Godó Zita

Az alábbi esszé célja, hogy bevezetést nyújtson az értékelő függvények alapjaiba, valamint megvizsgálja, hogy egy értékelő függvény mikor írható fel additív alakban. Továbbá röviden áttekintjük, hogy miként kaphatunk meg egy ilyen additív értékelő függvényt abban a speciális esetben, mikor minden jellemző értékkészlete megfelelően sűrű.

Mindenekelőtt gondoljuk meg, hogy miért is van szükségünk értékelő függvényekre. Vegyünk értékelésre vagy összehasonlításra váró elemek egy X halmazát. Tegyük fel, hogy ezen X halmaz felett definiálva van egy „legalább olyan jó, mint” reláció, amit $\sqsupseteq$ -vel jelölünk. Azaz ha az $x, y \in X$ elemekre $x \sqsupseteq y$, akkor azt mondjuk, hogy x legalább olyan jó, mint y . Ezáltal van egy szemléletes relációnk, ám nekünk valami kézzelfoghatóbbra van szükségünk. A célunk egy olyan X -ből a valós számok halmazára leképező v függvény megkonstruálása, ami esetén $v(x) \geq v(y) \Leftrightarrow x \sqsupseteq y$. Az ilyen v függvényt a döntéelméletben értékelő függvénynek szokás nevezni. A közgazdaságtanban használatos még a hasznossági függvény elnevezés is. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen feltételeknek kell teljesülniük ahhoz, hogy egyáltalán létezzen ilyen v értékelő függvény.

Ehhez először lássuk, hogy a $\sqsupseteq$ relációt alapul használva milyen más relációkat vezethetünk be:

- Ha $x \sqsupseteq y$ és $y \sqsupseteq x$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy x és y indifferensek, ezt $x \sim y$ módon jelöljük.
- Ha $x \sqsupseteq y$ és $y \sqsupseteq x$ sem teljesül, akkor x és y nem összehasonlíthatóak, ezt $x ? y$ módon jelöljük.
- Ha $x \sqsupseteq y$ fennáll, de $y \sqsupseteq x$ nem, akkor x szigorúan preferált y -hoz képest, ezt a $x \sqsubset y$ relációval jelöljük.

Hasonlóan, ha $y \sqsupseteq x$ áll fent, de $x \sqsupseteq y$ nem, akkor y szigorúan preferált x -hez képest: $y \sqsubset x$.

A fenti relációk definíciójukból adódóan rendelkeznek néhány fontos tulajdonsággal. Ami számunkra hasznos lesz:

- $\sqsupseteq$ reflexív: $x \sqsupseteq x$, azaz igaz az, hogy x legalább olyan jó, mint x .
- $\sim$ reflexív: $x \sim x$, azaz igaz az, hogy x indifferens x -hez.
- $\sim$ szimmetrikus: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, azaz ha x indifferens y -hoz, akkor y is indifferens x -hez.

Ahhoz, hogy megfelelő v függvényt találhassunk, azaz olyat, ami megőrzi a $\preceq$ reláció lényeges rendezési tulajdonságait, szükséges, hogy $\preceq$ gyenge rendezés legyen. Tehát a $\preceq$ relációnak reflexívnek, tranzitívnek és teljesnek kell lennie. A fentiek alapján már tudjuk, hogy $\preceq$ reflexív, így csak azt kell kikötnünk, hogy tranzitív és teljes is, azaz:

- $x \preceq y$ és $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ és
- $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$ minden $x, y \in X$ -re.

Ezen kikötésekből további hasznos tulajdonságokat kapunk. Egyrészt $\preceq$ teljessége miatt nincs $?$ operátorunk, azaz bármely két X -beli elemet össze tudunk hasonlítani. Másrészt $\preceq$ tranzitivitásából következik, hogy $\sim$ is tranzitív. Így az $\sim$ indifferencia operátorról már tudjuk, hogy reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció. Tehát $\sim$ osztályokat generál X felett, melyeket indifferenciaosztályoknak nevezünk. Ezen osztályok tehát azon elemeket tartalmazzák, melyek indifferensek egymáshoz, azaz pontosan ugyanolyan jók.

Ezen ismeretek birtokában már megfogalmazhatjuk azon feltételeket, amik egy megfelelő v értékelő függvény létezését biztosítják. Ha a $\preceq$ reláció gyenge rendezés az X halmaz elemeire vonatkozóan, és az indifferencia osztályok halmaza megszámlálható, akkor létezik egy olyan v valós értékű függvény, amely az X -en értelmezett, és az X bármely x, y elemére $x \preceq y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(x) \geq v(y)$, $x \preceq y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(x) > v(y)$, és $x \sim y$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(x) = v(y)$.

A fenti feltételeken akár enyhíthetünk is. Nem szükséges, hogy az indifferenciaosztályok halmaza megszámlálható legyen, elegendő azt feltenni, hogy ezen osztályok halmazának van egy megszámlálható részhalmaza, ami a $\preceq$ preferencia reláció által generált rendezésre nézve sűrű. (Azaz bármely $x, y \in X$ -re, ha $x \preceq y$, akkor létezik olyan $z \in X$, hogy $x \preceq z \preceq y$.) Tehát már ismerjük a v értékelő függvény létezéséhez szükséges feltételeket általános X halmaz esetén. Viszont számunkra van egy kiemelt fontosságú X halmaz, ami nem más, mint az n dimenziós vektortér, hiszen egy n tényezős döntésméleti probléma során ilyen halmaz felett dolgozunk. Ezen X esetén speciális feltételeket fogalmazhatunk meg v létezésére vonatkozóan:

- monotonitási feltétel: $x \geq y \Rightarrow x \preceq y$ minden $x, y \in X$ -re.
(Az $x \geq y$ jelen esetben azt jelenti, hogy $x_i \geq y_i$ ($i = 1, \dots, n$), és legalább egy komponens esetén szigorú egyenlőtlenség áll fent.)

- folytonossági feltétel: $x \sqsubseteq y \sqsubseteq z \Rightarrow$ létezik pontosan egy $\lambda \in (0,1)$: $y \sim \lambda x + (1-\lambda)z$
(Ez a feltétel tulajdonképpen a sűrűségi tulajdonságot helyettesíti.)

Így teljes képet kaptunk v egzisztenciájára vonatkozóan. Felmerülhet a kérdés, hogy ha teljesülnek a fenti feltételek, azaz létezik megfelelő v értékelő függvény, akkor pontosan hány ilyen létezhet, azaz v unicitására vagyunk még kíváncsiak.

Egyértelmű, hogy az értékelő függvények mindig monotonak (amennyiben nem így lenne, át tudjuk alakítani úgy, hogy teljesüljön a monotonitás). Így nyilván egy v függvény bármely szigorúan növekvő monoton transzformációja is megőrzi az értékelő függvény rendezését. Sőt, kizárólag ezen triviális esetek lesznek számunkra megfelelőek. Azaz ha két értékelő függvény ugyanazt a rendezést definiálja, akkor az egyik megkapható a másiktól az említett transzformáció segítségével. Ezen függvényeket nevezzük v stratégiai ekvivalenseinek.

A továbbiakban rátérünk az additív értékelő függvények tárgyalására. A dimenziószám növekedésével egyre nehezebbé válik megfelelő értékelő függvényt konstruálni. Felmerülhet a kérdés, hogy nincs-e lehetőség egyszerűsíteni a problémán oly módon, hogy az egyes jellemzőkre külön definiálunk megfelelő függvényeket, majd ezeket egyszerűen (esetleg valamilyen súlyozással) összeadva kapjuk meg az eredeti értékelő függvényt. Azaz felírhatjuk a v függvényünket a következő alakban:

- $v(x) = v_1(x_1) + \dots + v_n(x_n)$, vagy
- $v(x) = \lambda_1 v_1(x_1) + \dots + \lambda_n v_n(x_n)$, ahol $\lambda_i > 0$ és összegük 1.

Hasonlóan az értékelő függvények létezésére vonatkozó vizsgálatokhoz, most lássuk, milyen esetben lehet felírni azokat additív alakban. Ehhez szükségünk lesz a következő fogalomra. A T tényezőhalmaz ($T = \{X_1, \dots, X_n\}$) egy C részhalmaza és a C^* komplementerhalmaz akkor és csak akkor preferencia-független, ha egy adott $x_{c^*}^0$ esetén

$$(x'_c, x_{c^*}^0) \sqsubseteq (x''_c, x_{c^*}^0) \Rightarrow (x'_c, x_{c^*}) \sqsubseteq (x''_c, x_{c^*})$$

minden $x_{c^*} \in X_{c^*}$ esetében, ahol x'_c és x''_c tetszőleges alternatíva darabok.

Mivel ez egy igen fontos fogalom, lássunk néhány példát a megértés megkönnyítése érdekében. Tegyük fel először, hogy a T tényezőhalmazunk kételemű: az egyik jellemző az édesség típusát határozza meg, a másik az évszakot, amiben fogyasztjuk. Ekkor ha (fagylalt, nyár) $\sqsubseteq$ (sütemény, nyár), de (sütemény, tél) $\sqsubseteq$ (fagylalt, tél), azaz nyáron a fagylaltot, télen viszont a süteményt szeretjük jobban, akkor a fenti összefüggés nem teljesül, tehát az édesség típusa preferencia-függő az évszaktól. (Ebben az esetben $C = \{\text{típus}\}$, $C^* = \{\text{évszak}\}$, $x'_c = \text{fagylalt}$, $x''_c = \text{sütemény}$, $x_{c^*}^0 = \text{nyár}$. És mivel van olyan x_{c^*} , amire nem áll fent a várt

preferencia, így a preferencia-függetlenség sem teljesül.) Ellenben, ha a tényezőhalmazunk az édesség íze és típusa, valamint teljesül, hogy bármilyen típusú is az adott édesség, bizonyos ízeket jobban szeretünk a másiknál, akkor azt mondhatjuk, hogy az íz preferencia-független a típustól. Azaz ha pl. teljesül, hogy a vaníliafagylaltot jobban szeretjük a csokoládéfagylaltnál, akkor az is teljesülni fog, hogy a vaníliatortát jobban szeretjük a csokoládésnál, vagy a vaníliapudingot a csokoládépudingnál, stb. Relációkkal felírva ugyanezt: (vanília, fagylalt) $\square$ (csokoládé, fagylalt) $\Rightarrow$ (vanília, torta) $\square$ (csokoládé, torta).

Ám arról ezek alapján semmit nem mondhatunk, hogy mi a helyzet két azonos ízű, de különböző típusú édességnél. Azaz attól, hogy egy tetszőleges C részhalmazra és annak C^* komplementerhalmazára teljesül a preferencia-függetlenség, másik részhalmaz esetén még nem feltétlenül lesz igaz. Ha a T tényezőhalmaz bármely nemüres C részhalmaza preferencia-független a C^* komplementerhalmaztól, akkor azt mondjuk, hogy T kölcsönösen preferencia-független. Azaz ha a fenti példánkban az is teljesül, hogy akármilyen ízről legyen is szó, a fagylaltot jobban szeretjük a tortánál, akkor a típus is preferencia-független az íztől. És mivel két tényezőnk volt, az összes lehetséges C nemüres részhalmazt megvizsgáltuk (előbb a típust, majd az ízt választva C -nek), így ebben az esetben a {típus, íz} tényezőhalmaz kölcsönösen preferencia-független.

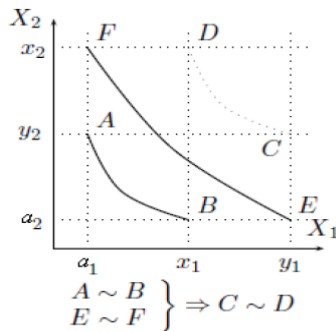
Mint említettük, a preferencia-függetlenség fogalma rendkívül fontos a számunkra. Ugyanis a kölcsönös preferencia-függetlenség három vagy több dimenzió esetén nem csak szükséges, hanem egyben elégséges feltétele is az additív preferencia struktúra létezésének.

Viszont meglepő módon két dimenzió esetén bár szintén szükséges, viszont nem elégséges feltétel. Ezért a továbbiak egy részében azt vizsgáljuk meg, hogy milyen plusz feltételeknek kell teljesülnie két dimenzió esetében ahhoz, hogy az értékelő függvényünk felírható legyen additív alakban.

Ehhez először ismerjük meg az úgynevezett egyszerűsítési feltételt. Egy kéttényezős döntési problémához tartozó $\square$ preferencia-rendezés akkor elégíti ki az egyszerűsítési feltételt, ha bármely $x_1, y_1, a_1 \in X_1$ és $x_2, y_2, a_2 \in X_2$ esetén $(x_1, a_2) \square (a_1, y_2)$ és $(a_1, x_2) \square (y_1, a_2)$ együttes fennállásából következik, hogy $(x_1, x_2) \square (y_1, y_2)$. (Azaz például, ha a csokoládépudingot jobban szeretjük, mint a puncs ízű fagylaltot és a puncs tortát jobban szeretjük, mint a vaníliapudingot, akkor a csokoládétortát is előnyben részesítjük a vaníliafagylaltnál szemben.)

Ez a tulajdonság rendkívül erős: amennyiben az egyszerűsítési feltétel fennáll, a $\square$ kölcsönösen preferencia-független, és létezik additív preferencia struktúra. Ám ha tudjuk,

hogy a kölcsönös preferencia-függetlenség teljesül, elegendő számunkra egy gyengébb tulajdonság ellenőrzése is, amely az egyszerűsítési feltételtől annyiban különbözik, hogy $\square$ reláció helyett a $\sim$ indifferencia relációt szerepeltetjük. Ezt nevezzük Thomsen feltételnek. Azaz egy kéttényezős döntési problémához tartozó $\square$ preferencia-rendezés akkor elégíti ki a Thomsen feltételt, ha bármely $x_1, y_1, a_1 \in X_1$ és $x_2, y_2, a_2 \in X_2$ esetén $(x_1, a_2) \sim (a_1, y_2)$ és $(a_1, x_2) \sim (y_1, a_2)$ együttes fennállásából következik, hogy $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$.



1. ábra: a Thomsen feltétel szemléltetése

Tehát a Thomsen feltétel és a kölcsönös preferencia-függetlenség együttes teljesüléséből már következik az additív preferencia struktúra létezése.

Miután ismerjük létezésének feltételeit, lássuk, hogy tudunk megkonstruálni egy ilyen additív értékelő függvényt. Ehhez először – egy kisebb kitérő erejéig – foglalkozunk a hossz mérés elméletével.

Képzeld el, hogy egy lakatlan szigeten vagyunk, és botok hosszát szeretnénk megmérni. Nincs semmilyen segédeszközünk, egyedül arra vagyunk képesek, hogy két botot egymás mellé helyezve összehasonlítsunk. Ezen műveletnek két eredménye lehet: a botok vagy azonos hosszúak, vagy az egyik nagyobb a másikinál. Azaz két relációt vezethetünk be: $\sim$ és $\square$. Ám ezzel még nyilvánvalóan messze vagyunk egy teljes értékű hossz fogalomtól. Jobban meggondolva hasonló a helyzetünk az esszé elején tárgyalt problémától. Bár vannak különböző relációink, nekünk egy pontosabb, numerikus reprezentációra lenne szükségünk. Azaz egy olyan ϕ függvényt szeretnénk, amire tetszőleges r és r' botok esetén:

- $r \square r' \Rightarrow \phi(r) > \phi(r')$ és
- $r \sim r' \Rightarrow \phi(r) = \phi(r')$.

Természetes elvárás továbbá, hogy a botjaink tetszőleges konkatenálása ($\circ$ művelet) után a ϕ függvény továbbra is megfelelően működjön, azaz

- $\phi(r \circ r') = \phi(r) + \phi(r')$.

Ahhoz, hogy egy ilyen ϕ függvényt megkapjunk, könnyen látható, hogy szükségünk lenne egy standard (egység) botra, amihez a többi bot hosszát viszonyítani tudjuk. Ezt a botot jelöljük s_0 -lal. Továbbá feltesszük, hogy ezen botból tökéletes másolatokat tudunk készíteni, jelölje ezeket $s_1, s_2, \dots$

Feltehetjük továbbá, hogy $\phi(s_0) = 1$. Ekkor egy tetszőleges r bot mérése kézenfekvően a következő módon történik: r mellé helyezünk a standard botunk másolataiból annyit, amennyi szükséges. Amennyiben létezik olyan k szám amire $s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_k \sim r$, akkor $\phi(r) = k$. Ám sajnos nem minden esetben ennyire egyszerű a dolgunk. Ha $r \sqsubset s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_{k-1}$, de $s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_k \sqsupset r$, akkor csak annyit tudunk mondani, hogy $k > \phi(r) > k-1$. Ebben az esetben két lehetőségünk van: ha feltehetjük, hogy bármely botból tudunk tökéletes másolatokat készíteni (ezeket jelölje $r_1, r_2, \dots$), akkor addig konkatenáljuk mind a mérendő botok, mind a standard botok másolatait, amíg valamilyen kombinációban egyenlő hosszt nem sikerül elérnünk. Azaz olyan k és m számokat keresünk, amire $s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_k \sim r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_m$, ekkor $\phi(r) = k / m$. Ha nem tehetjük fel a tökéletes másolatok készítésének képességét, akkor növelnünk kell a mérés pontosságát – azaz csökkentenünk kell a standard bot hosszát.

A conjoint measurement tárgyalásához – a hosszmérés mellett – a másik téma, amit érdemes röviden érintenünk: az even swaps technika. Ezt a módszert egy rövid példán keresztül mutatjuk be. Amennyiben a teljes, jóval hosszabb példára is kíváncsiak vagyunk, a [1] 1.3 fejeztében megtalálhatjuk.

Tegyük fel, hogy egy ügynök irodát szeretne bérelni magának. Három tényezőt vesz figyelembe a választása során: az otthonától az irodáig számított ingázási időt, az iroda méretét és a bérlet havi költségét. Az alábbi táblázatban bemutatott négy alternatívára szorítkozunk:

	a	b	c	d
Ingázási idő	30 perc	25 perc	25 perc	25 perc
Méret	700 m ²	700 m ²	500 m ²	900 m ²
Ár	1750 \$	1700 \$	1500 \$	1900 \$

Az even swaps technika alapja a dominancia keresés. Egy alternatíva dominálja a másikat, ha minden attribútumán legalább olyan jó, továbbá legalább egy attribútumán szigorúan jobb. Nyilvánvaló, hogy a fenti esetben a b alternatíva dominálja az a -t, hiszen a méretük

megegyezik, árban és ingázási időben pedig egyértelműen b a jobb. Így a választás során kétségtől jobban járunk a b -vel, így az a -t el is hagyhatjuk. Ezek után észrevehetjük, hogy az ingázási idő mindhárom megmaradt alternatíva esetében 25 perc, így ez a tényező már nyilvánvalóan haszontalan a döntés szempontjából. Ezek után a megmaradt adatokból képzett táblázat:

	b	c	d
Méret	700 m ²	500 m ²	900 m ²
Ár	1700 \$	1500 \$	1900 \$

Itt már nincs „szabad szemmel látható” egyszerűsítési lehetőség, így kénytelenek vagyunk kiegészítő információkhoz folyamodni. Például megkérdezhetünk egy szakértőt 200 m² növekedés havi költségéről. Tegyük fel, hogy a válasz 250\$. Itt fontos megjegyezni, hogy ez a megoldás korántsem tökéletes. Egyrészt a két tényező között lehetne bonyolultabb összefüggés is. Kaphattuk volna azt a választ, hogy 500 m²-ről 700 m²-re a növekedés 250\$, 700-ról 900-ra viszont 300\$. Másrészt különböző típusú attribútumok összemérése igen bonyolult feladat. Példának okáért az ingázási idő és az iroda méretének összehasonlítása esetén már sokkal nehezebb dolgunk lenne.

	b'	c'	d
Méret	900 m ²	900 m ²	900 m²
Ár	1950 \$	2000 \$	1900 \$

A feltételezett összefüggést felhasználva a fenti táblázatot kapjuk, ami alapján már nyilvánvaló, hogy a d alternatíva dominálja mind a b' mind a c' , így a b és c alternatívákat is.

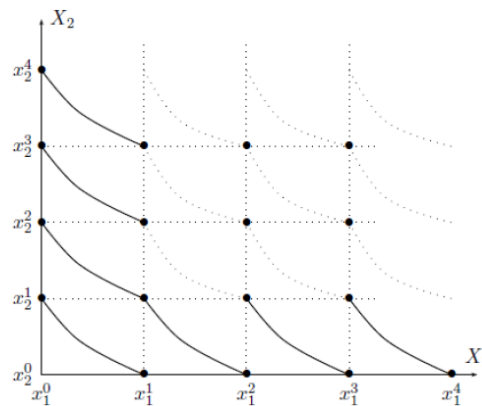
Ezen kitérők után térjünk rá a conjoint measurement témakörére. Mi most csak a „sűrű esetet” tekintjük át, azaz feltesszük, hogy X minden dimenzióján megfelelően sűrű. A módszer lényegét két dimenzió esetén mutatjuk be. Ahhoz, hogy bizonyosan létezzen a megkonstruálandó additív struktúra, feltesszük, hogy $\square$ független, továbbá hogy teljesül a Thomsen feltétel.

Legyen tehát $X = X_1 \times X_2$. Legyenek $x_1^0, x_1^1 \in X_1$ tetszőlegesek úgy, hogy $x_1^1 \square_1 x_1^0$, valamint $x_2^0 \in X_2$ tetszőleges. Az (x_1^0, x_2^0) pontot nevezzük a referenciapontnak. Mivel x_1^0 -t és x_2^0 -t tetszőlegesen választottuk, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_1(x_1^0) = 0$, és $v_2(x_2^0) = 0$, azaz szemléletesen az (x_1^0, x_2^0) pont fog az origóba kerülni. Ahogy a hossz mérésnél szükségünk volt egy standard botra, úgy itt is szükségünk lesz egy mérési egységre. Ez az egység legyen az $[x_1^0, x_1^1]$ hossz. Ennek megfelelően feltehetjük, hogy $[x_1^0, x_1^1]$

$= 1$, és mivel tudjuk, hogy $v_1(x_1^0) = 0$, így $v_1(x_1^1) = 1$. Ezek után olyan $x_2^1 \in X_2$ -t keresünk, amire $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$. (Ahhoz, hogy ilyen x_2^1 -et találhassunk, X_2 -nek megfelelően sűrűnek kell lennie.) Ez az indifferencia ekvivalens a következővel: $v_1(x_1^0) + v_2(x_2^1) = v_1(x_1^1) + v_2(x_2^0)$, amiből nyilvánvaló, hogy $v_2(x_2^1) = 1$.

Ezt a gondolatmenetet továbbgörgetve, kialakíthatunk egy standard sorozatot X_2 -n: olyan $x_2^2, x_2^3, \dots, x_2^k$ pontokat keresünk, amikre teljesül, hogy $(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^1, x_2^1)$, $(x_1^0, x_2^3) \sim (x_1^1, x_2^2), \dots, (x_1^0, x_2^k) \sim (x_1^1, x_2^{k-1})$. Ebből $v_2(x_2^2) = 2, v_2(x_2^3) = 3, \dots, v_2(x_2^k) = k$.

Teljesen hasonlóan eljárhatunk X_1 esetében is. Azaz kialakíthatunk egy olyan $x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^k$ sorozatot, melyekre $(x_1^2, x_2^0) \sim (x_1^1, x_2^1)$, $(x_1^3, x_2^0) \sim (x_1^2, x_2^1), \dots, (x_1^k, x_2^0) \sim (x_1^{k-1}, x_2^1)$. (Természetesen ahhoz, hogy ezt megtehessük, X_1 -nek szintén elegendően sűrűnek kell lennie.) Ezzel egy rácsot definiáltunk X -en, ami egy megfelelő additív függvényt ad a számunkra.



2. ábra: Az X -en definiált rács

Gondoljuk meg, hogy ez az állítás mért is teljesül. Első lépésként lássuk be azt, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ egészek esetén, amennyiben $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ($= \varepsilon$), akkor $(x_1^\alpha, x_2^\beta) \sim (x_1^\gamma, x_2^\delta)$. Azaz tulajdonképpen azt szeretnénk igazolni, hogy a fenti ábrán szereplő indifferenciavonalak jelenléte helyénvaló. Vizsgáljuk meg az $\varepsilon = 1, 2$ és 3 eseteket, amik segítségével általánosságban is nyilvánvalóvá válik az állítás helyessége:

- $\varepsilon = 1$: a standard sorozatok definíciója alapján nyilvánvaló, hiszen $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$.
- $\varepsilon = 2$: szintén támaszkodhatunk a rács konstrukciójára: $(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^1, x_2^1)$ és $(x_1^2, x_2^0) \sim (x_1^1, x_2^1)$. A $(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^2, x_2^0)$ pedig ezek alapján egyszerűen $\sim$ tranzitivitásából adódik.
- $\varepsilon = 3$: hasonlóan az előzőekhez a $(x_1^0, x_2^3) \sim (x_1^1, x_2^2)$ és $(x_1^3, x_2^0) \sim (x_1^2, x_2^1)$ definíció alapján teljesül. Az egyedüli belátandó: $(x_1^1, x_2^2) \sim (x_1^2, x_2^1)$. (Tulajdonképpen ez az első

indifferenciavonal a fenti ábrán, amit nem rajzolhattunk be „azonnal” a rács definiálása után. A fennmaradó összefüggések a tranzitivitást használva nyilvánvalóan teljesülni fognak.) Ez pedig adódik a Thomsen feltételből, hiszen tudjuk, hogy $(x_1^0, x_2^1) \sim (x_1^1, x_2^0)$ és $(x_1^0, x_2^2) \sim (x_1^2, x_2^0)$.

Tehát a rács definícióját alapul véve, a tranzitivitást és a Thomsen feltételt felhasználva teljesülnek a feltételezett indifferenciák.

A második lépésben azt szeretnénk belátni, hogy tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ egészek esetén, ha $(\varepsilon =) \alpha + \beta > \gamma + \delta$ ($= \varepsilon'$), akkor $(x_1^\alpha, x_2^\beta) \square (x_1^\gamma, x_2^\delta)$. Mivel $\square$ ugyancsak tranzitív, elegendő belátni, hogy az állítás teljesül a $\varepsilon = \varepsilon' + 1$ esetben. A rács konstrukciójából adódik, hogy $(x_1^1, x_2^0) \square (x_1^0, x_2^0)$, hiszen $x_1^1 \square_1 x_1^0$. A függetlenséget felhasználva ebből bármely k egész esetén $(x_1^1, x_2^k) \square (x_1^0, x_2^k)$. Az előbb belátott indifferencia összefüggések alapján $(x_1^1, x_2^k) \sim (x_1^{k+1}, x_2^0)$ és $(x_1^0, x_2^k) \sim (x_1^k, x_2^0)$. Azaz $(x_1^{k+1}, x_2^0) \square (x_1^k, x_2^0)$, amivel beláttuk az állítást.

Ha jobban meggondoljuk, hasonlóképpen cselekedtünk, mint az even swaps technika esetében. Tegyük fel, hogy X_1 jelenti az iroda méretét, X_2 pedig a bérlet költséget. Legyen például $x_1^0 = 500 \text{ m}^2$, $x_1^1 = 700 \text{ m}^2$, $x_2^0 = 2000 \text{ \$}$. Ekkor a feltevésünk alapján, miszerint 200 m^2 méretváltozás ekvivalens $250 \text{ \$}$ havi költséggel, $x_2^1 = 1750 \text{ \$}$, $x_2^2 = 1500 \text{ \$}$, $x_2^3 = 1250 \text{ \$}$, stb. Hasonlóan $x_1^2 = 900 \text{ m}^2$, $x_1^3 = 1100 \text{ m}^2$. Tehát minden hátrány, amit az even swaps technikánál felsoroltunk, itt is fennáll, csupán az alternatívák „értékelését” automatizáltuk.

Felmerülhet továbbá a kérdés, hogy mi a teendő a rácspontok „közé” eső alternatívákkal. A fenti esetben például nem tudjuk kiértékelni azon alternatíváinkat, melyek költsége 1700 vagy $1900 \text{ \$}$. Erre [1] szerint két megoldásunk van: mégpedig pontosan a hossz mérésnél látott két módszer, mellyel az olyan botokat mértük, melyek hosszát nem lehetett egyértelműen meghatározni a standard botunkból készített másolatainkból. Azt, hogy melyik megoldást választjuk, X szerkezetétől függ.

Tehát a fenti módon megkonstruálhatunk egy megfelelő $v = v_1 + v_2$ értékelő függvényt. Világos, hogy az (x_1^0, x_2^0) referenciapont, illetve az x_1^1 mérési egység megválasztása után a további lépések egyértelműen definiálva vannak. Ezek alapján nyilvánvaló, hogy ugyanúgy megfelelő értékelő függvényt kapunk, ha megszorozzuk a v_1 illetve v_2 függvényeket ugyanazon pozitív számmal, illetve ha tetszőleges (akár különböző) konstansokat adunk hozzájuk. És kizárólag ezek a megengedett transzformációk.

Eddig csak a két dimenziós esetet vizsgáltuk. Három vagy több dimenzió esetében is ugyanígy kell eljárni, sőt, az additív függvények egzisztenciájánál látottak alapján a bizonyításban már a

Thomsen feltételre nincs is szükségünk.

A fentiekben bemutatott módszer ellen sajnos sok érvet lehet felhozni. Először is elvárja, hogy X minden dimenzióján megfelelően sűrű legyen, ami egy nagyon erős megkötés. Másrészt képzeletbeli alternatívákat kell értékelnünk, ami nehezebb feladat, mint a tényleges objektumok minősítése. Továbbá, ha például már x_2^1 -et valamilyen oknál fogva pontatlanul határozzuk meg, onnantól kezdve ez a hiba továbbgyűrűzik az egész folyamat során, akár komoly problémákhoz vezetve. Ezen okokból kifolyólag ez a módszer a döntéselméletben nem gyakran használt.

Láttuk tehát, hogy mért van szükségünk értékelő függvényekre, milyen feltételeknek kell teljesülniük, hogy létezzen megfelelő értékelő függvény, valamint hogy ez felírható legyen additív alakban. Továbbá láttunk egy módszert, ami egy ilyen additív értékelő függvényt nyújt a számunkra abban az esetben, mikor X minden dimenzióján megfelelően sűrű.

Források

[1] Denis Bouyssou, Marc Pirlot: Conjoint measurement tools for MCDM

[2] Temesi József: A döntéselmélet alapjai

- **Szavazási eljárások – Langó László**

Arrow-féle lehetetlenségi tétel***Bevezetés***

Ezen dolgozat témája a szavazási eljárások, amelyek a csoportos döntési eljárások közé tartozik. Tegyük fel, hogy több jelölt között kell egy csoport tagjainak választani, s ehhez szeretnénk egy megfelelő eljárást találni. Ha például az egyetemi tanszék vezetőjét kell megválasztani, felállíthatjuk a kritériumok listáját, s mindegyik tanszéki munkatárs eldöntheti, hogy kit támogat. Nyilvánvalóan azonban, hogy személyes döntést mindenki a saját preferenciái alapján fogja meghozni, illetve az a rangsor, amelyet felállít, ismét csak saját preferenciarendezését tükrözi. Hogy lesz ezekből az egyéni rangsorokból csoportos döntés?

Megeshet azonban az is, hogy nem egy jelöltek közötti választási problémáról van szó, hanem lehet, hogy a család lakóhely változtatásáról van szó, vagy egy szakértői zsűrinek kell bizonyos célra pályázók közül választani. Arról is szó lehet, hogy a lakosság vagy a társadalom egy nagyobb csoportját érintő döntés meghozataláról van szó (például hol legyen szeméttégető, kell-e atomerőművet telepíteni, stb.). Minden esetben az a célunk, hogy az egyéni preferenciákat csoportpreferenciákká aggregáljuk.

A továbbiakban ebből a témakörből K. J. Arrow munkásságát és lehetetlenségi tételét kiemelve kerülnek részletezésre a csoportos döntések.

Kenneth J. Arrow élete

Arrow-t a 20. század legkiemelkedőbb gazdaságelméleti szakemberei között tartják számon. 1972-ben kapta meg a közgazdasági Nobel-díjat. A következő rövid áttekintésből ismerjük hát meg, milyen út vezetett el addig a jeles napig.

1921. augusztus 23-án született New Yorkban. Itt nevelkedett, és itt végezte el a felsőbb iskoláit is. Szülei nem sajnálták a pénzt az oktatására, és a városban is remek lehetőségei voltak, hogy képezze magát. Főként



1. ábra: Kenneth J. Arrow

természettudományok érdekelték, de foglalkozott még társadalomtudományokkal és olyan különlegességekkel is, mint a paradox (ellentmondásos) kombinációk. A Columbia egyetemen folytatta tanulmányait, és diplomás matematikusként végzett 1941-ben. Nagy hatást gyakorolt rá ez idő alatt Harold Hotelling statisztikus közgazdász, emiatt is a közgazdasági vonalon haladt tovább.

Mint oly sokaknak azokban az időkben, az ő tanulmányait is megszakította a második világháború. Az Egyesült Államok légierijénél szolgált, mint meteorológus tiszt, és egészen a kapitányi rangig vitte. Ezt egy speciális kutatási területen elért sikernek köszönhetette, ez volt az első publikációja is egyben. Címe: *On the Optimal Use of Winds for Flight Planning*.

A katonáskodás után 1946-ban visszatért a Columbia egyetemre, hogy folytassa tanulmányait, és emellett kutatóként tevékenykedett a *Cowles Commission for Research in Economics at the University of Chicago*-nál. Utóbbi intézményben, mint közgazdász adjunktus volt jelen 1949-ig. Mindezek mellett a hadseregtől való távozása után egy évvel megházasodott.

A Cowles remek intellektuális környezete tovább mélyítette ismereteit. Megismerte Tjalling Koopmanst és Jacob Marschakot, akik alapvetően befolyásolták életét, valamint 1948-ban a RAID részvénytársaság játékelméleti és matematikai programozási kutatásaiban is részt vett. Társadalomtudományi területeken a Pareto hatékonysággal foglalkozott. Ezt követően 19 évig volt a Stanford Egyetem Közgazdaságtani és Statisztikai Hivatalának helyettes adjunktusa, majd később a professzora. Változatos időszak volt ez. Kezdetben a társadalomtudományokkal és kutatásokkal foglalkozott, középpontban a középiskolai oktatással és a viselkedéstanulmányozással. Majd az Egyesült Államok Gazdasági Tanácsának dolgozott. 1962-ben pedig a Stanfordi Hivatal Közgazdasági Karának végrehajtó részlegén volt vezető beosztásban. Ezt követte a Churchill Főiskola (Cambridge) és két ízben is bécsi vendégprofesszori megbízás. Végül pedig a Harvard professzora lett.

Nem kevés közösségi és tanulmányi társaságnak lett tagja ezekben az időkben, és nem kevesebb elismeréssel jutalmazták tevékenységét. A teljesség igénye nélkül ilyen volt a *John Bates Clark Medal of the American Közgazdasági Egyesülete*, a *National Academy of Sciences*, az *American Philosophical Society* és az *Amerikai Statisztikai Egyesület* is.

Megkapta a tiszteletbeli LL.D. fokozatot a Chicago-i Egyetemtől és a New York Városi Egyetemtől is, a Bécsi Egyetemtől pedig a doktori státuszt a szociális és a közgazdasági területeken. A Gazdaságtudományi Társaság elnöke volt 1956-ban, és a Vezetéstudományi

Intézeté 1963-ban. 1972-ben pedig Közgazdasági Nobel-díjjal jutalmazták munkásságát. Mind a mai napig dolgozik és kutat. Az idős tudós-közgazdász élete sok szempontból példaértékű.

Arrow lehetetlenségi tétele

Ez a tétel az egyik leghíresebb közgazdasági tétel, amely formálisan próbál egyértelmű választ adni arra a kérdésre, hogy megvalósítható-e a demokrácia. Arrow belátta azt, hogy bizonyos feltételek mellett létezik egyértelmű válasz erre a kérdésre. A továbbiakban ismertetjük a szükséges fogalmakat és jelöléseket, majd egy kevésbé szigorú tételt, May-tételét, végül kimondjuk Arrow tételét és megnézzük kétféle bizonyítását.

Fogalmak, jelölések

Adottak a lehetséges választások X halmaza, $N \geq 2$ szavazó, akik az X elemeire akarnak egy preferenciasorrendet meghatározni. ϕ_i struktúrával fogjuk jelölni, az i -edik szavazó véleményét és $\phi = \langle \phi_1, \dots, \phi_N \rangle$ lesz a véleményprofil, vagyis az összes szavazó véleményét tartalmazó struktúra. Fontos megjegyezni, hogy a továbbiakban feltételezzük, hogy az összes egyén preferenciája ismert! A szavazás végeredményét megadó agregációs függvényt F -el jelöljük és **társadalmi jóléti függvénynek** nevezzük.

May tétele

Tegyük fel, hogy $|X| = 2$ és mindenki pontosan egy elemét választja X -nek. Ekkor az aggregációs függvény $F : D_F \rightarrow X$, ahol $D_F \subseteq X^N$. Az F -től megkövetelünk néhány feltételt, amit **igazságossági feltételeknek** szokás nevezni, ezek a következők:

- i. **Univerzalitás:** X minden elemére meg kell tudnunk mondani, hogy hol áll a rendezésben, azaz $D_F = X^N$.
- ii. **Anonimitás:** Minden egyén szavazata egyenlő súllyal kerül elbírálásra.
- iii. **Semlegesség:** F semleges a lehetőségeket illetően.
- iv. **Monotonitás:** tegyük fel, hogy az összegzés eredménye $x \in X$. Ekkor akárhány y szavazatot is cserélünk ki még x -re, az eredmény nem fog megváltozni.

Definíció: Egy szavazat összegző függvény akkor többségi szavazás típusú, ha a következő alakú:

$$F(\langle \Phi_1, \dots, \Phi_n \rangle) = \begin{cases} x, & \text{ha } \sum_{i=1}^n \chi_{\Phi_i=x} > n/2 \\ y, & \text{különben} \end{cases}$$

Tétel (May): Az egyéni véleményekből a kollektív döntést előállító F szavazat összegző függvény akkor és csak akkor tudja kielégíteni az univerzális, anonimitási, semlegességi és monotonitási feltételt, ha többségi szavazás típusú.

Arrow-tétel

Ez egy sokkal szigorúbb állítás, mint May-tétele. Az alapkérdésünk most is ugyanaz lesz, mint korábban vagyis, hogy bizonyos intuitív igazságossági feltételek mellett, milyen preferenciaösszegző-függvény szolgáltathat minden lehetséges bemenetre matematikai értelemben helyes rendezést (mi lesz a megfelelő *társadalmi jóléti függvény*). Majdnem ugyanazt fogjuk megkövetelni az Arrow tétel esetében is, mint amit a May-tételnél korábban. Az összegző-függvénytől megkövetelt tulajdonságok:

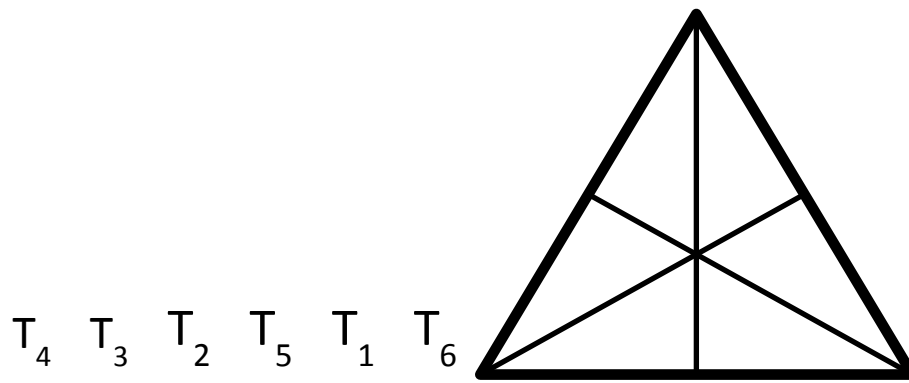
- i. **Univerzalitás**
- ii. **Gyenge Pareto elv (P):** ha mindenkinél $x < y$, akkor F szerint is $x < y$
- iii. **Bináris függetlenség (BI):** x, y alternatíva páros rendezése a kollektív rendezés szerint csak az egyének x -re és y -ra vonatkozó preferenciáitól függ
- iv. **Diktátor-mentesség:** nem létezik egy olyan személy, hogy a preferencia-összegzés mindig az ő véleményét adja (gyengébb feltétel, mint az anonimitás)

Arrow-tétel: Tegyük fel, hogy $|X| > 2$. Ekkor nem létezik olyan társadalmi jóléti függvény (F), ami teljesíti a fenti négy feltételt és minden lehetséges preferencia profilhoz olyan relációt rendel, amely rendezés.

Következmény: a közvetlen demokráciában nem létezik egyértelmű döntés.

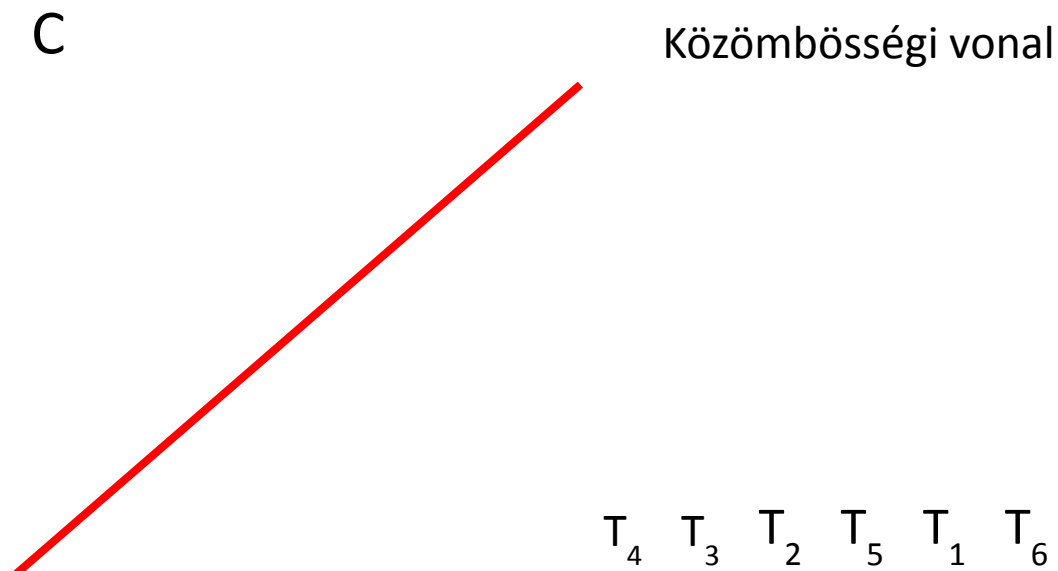
Arrow-tétel bizonyítása I.

Bár számtalan bizonyítása van a tételnek, mégis van közöttük egy olyan, ami kitűnik a többitől, hiszen ez egy geometriai szemléletű bizonyítás. Tekintsünk egy szabályos háromszöget. A csúcsai legyenek a jelöltek (A, B, C). Húzzuk be mind a három csúcsból a felezőmerőlegeseket, ezzel a háromszöget 6 részre osztva:

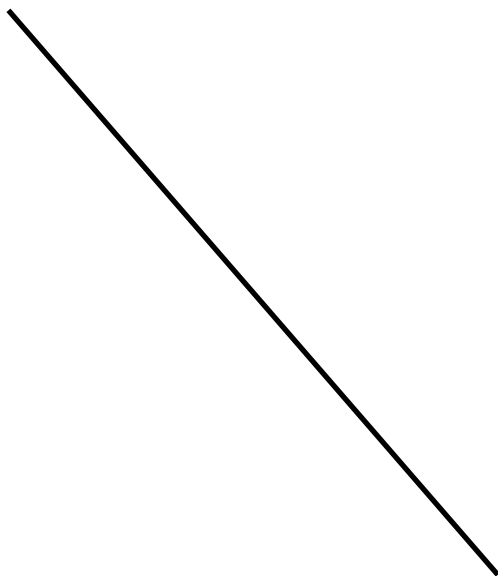


2. ábra

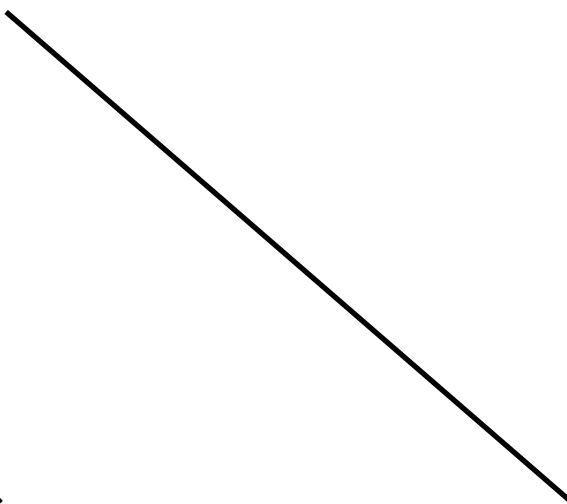
Ez a 6 egyenlő területű rész egyértelműen megfeleltethető a jelöltek közti összes lehetséges permutációnak, azaz a rendezéseknek úgy, hogy ha vesszük egy pontját a háromszögnek, akkor azt megfeleltetjük egy választó szavzatának. A preferenciarendezést a csúcsoktól való távolság határozza meg, úgy, hogy legelől az a jelölt szerepeljen, akivel a megfeleltetett csúcs a legközelebb van a választott ponttól és így tovább növekvő sorrendben (3. ábra).

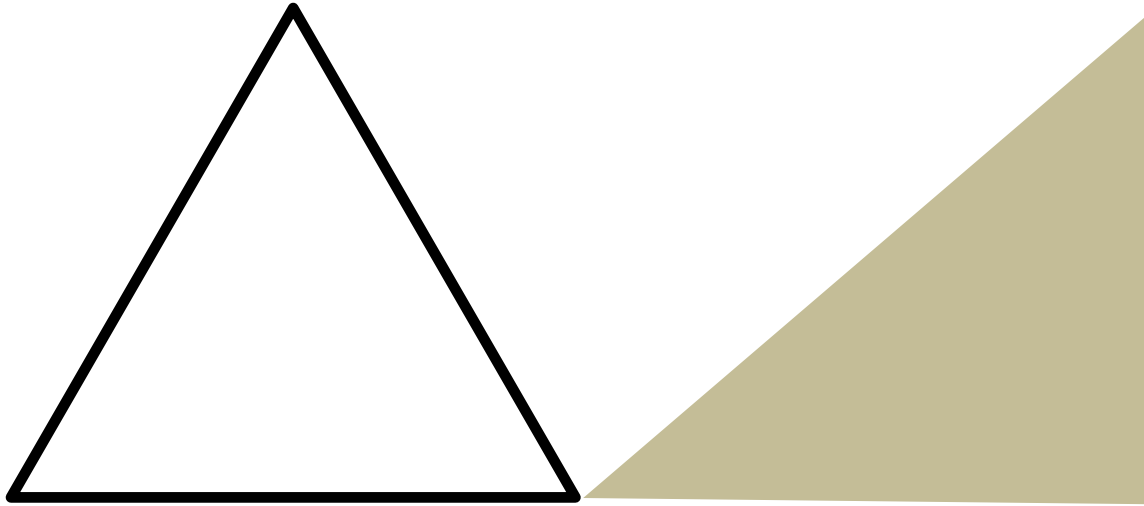


A



B



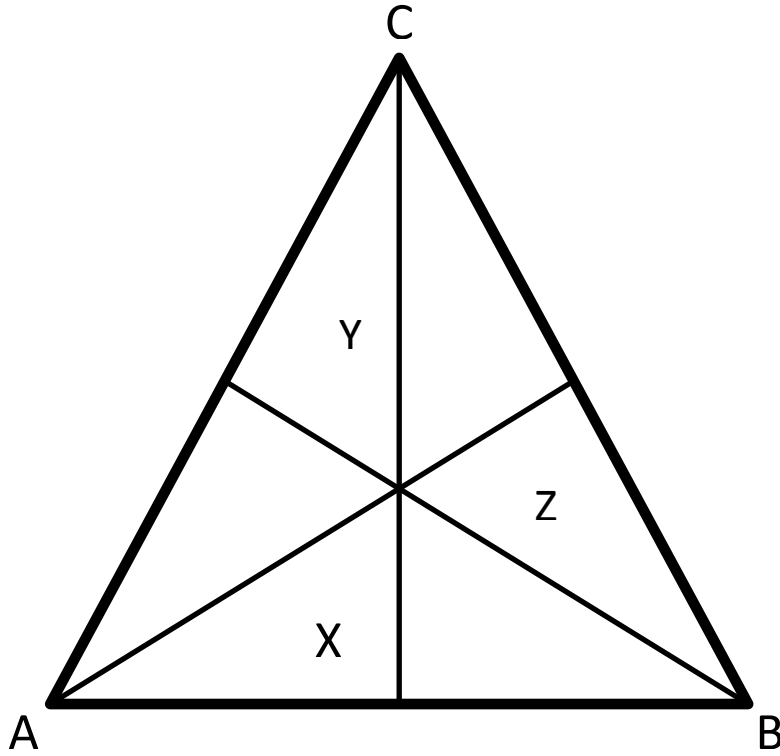


3. ábra. $A \succ B \succ C$

A közömbösségi vonalon elhelyezkedő pontok egyenlő távolságra vannak a két csúcstól, ezért a preferencia sorrend a vonalon két csúcsnál megegyezik. Az ábrán kiemelt közömbösségi vonal alapján ez a két csúcs a $\{B, C\}$. Tehát az ábráról leolvashatók az egyes háromszögekbe tartozó szavazók preferencia sorrendjei, amit az egyértelműség kedvéért a következő táblázat tartalmaz:

$x \in T_1$	$A \succ B \succ C$
$x \in T_2$	$B \succ A \succ C$
$x \in T_3$	$B \succ C \succ A$
$x \in T_4$	$C \succ B \succ A$
$x \in T_5$	$C \succ A \succ B$
$x \in T_6$	$A \succ C \succ B$

Ahol a T_1 az AB oldalra eső bal oldali háromszög, a továbbiak pedig az óramutató járásával megegyező irányban haladva. Legyen a szavazók száma $n \in \mathbb{N}, n > 2$. Továbbá tegyük fel, hogy az összes szavazó a T_1 , a T_3 , vagy a T_5 háromszögeknek megfeleltetett preferencia sorrendekből választott, azaz $x; y; z \in \mathbb{N}$ számok rendre jelöljék, hogy hány szavazat esett a T_1 , a T_3 , és a T_5 háromszögekbe:



4. ábra

Ekkor nyilván teljesülnie kell, hogy $x + y + z = n$. Legyen C azon profilok halmaza, amelyek kielégítik az $x + y + z = n$ egyenletet, továbbá legyen $S \subseteq C$ az a részhalmaz, amelyből a szavazatösszegző függvényünk az $A \succ B \succ C$ rendezést generálja. Ha $x = n$ feltétel teljesülne, akkor a gyenge Pareto tulajdonságból következne, hogy a rangsor a várt $A \succ B \succ C$ lenne, azaz ez a profil biztosan benne lenne az S halmazban. Ha viszont egy profilra teljesül az $y + z = n$ egyenlet, akkor az biztosan nem lesz S eleme, hiszen szintén a gyenge Pareto tulajdonságból fennállna a szavazatösszegző által generált eredményre a $C \succ B$ rendezés.

Legyen p az a profil ahol $x = \min\{x \in \mathbb{N} : p \in S\}$. Tehát $F(p_1, \dots, p_n) = (A \succ B \succ C)$. Tegyük fel, hogy $p_i \in p$ preferencia sorrendje T_1 -beli (mint azt láttuk kell ilyen i -nek léteznie). Konstruáljuk meg a következő p' profilt az alábbiak szerint: $p'_j := p_j$ $j = \{1, i - 2, i - 1, i + 1, i + 2, \dots, n\}$ és $d_j^{p'} \neq d_j^p$. Belátjuk, hogy ekkor az i . szavazó egy diktátor.

Vegyük először azt az esetet, amikor p_i rendezése a T_3 -ba esik. Az így keletkezett p_3 profilra, ha teljesülne a $F(p_1^3, \dots, p_n^3) = (A \succ B \succ C)$, akkor ellentmondásra jutnánk a p profilra nézve az x minimális feltevése miatt. A bináris függetlenség miatt $F(p_1^3, \dots, p_n^3) = (C \succ A \succ B)$ vagy $(A \succ C \succ B)$.

Tekintsük most azt az esetet, amikor p_i rendezése a T_5 -be esik. Az így keletkezett profil legyen p_5 . Ekkor szintén a bináris függetlenségnek köszönhetően a generált végeredményben teljesülni fog $B \succ C$ rendezés. Az előzőekhez hasonlóan az $F(p_1^5, \dots, p_n^5) = (A \succ B \succ C)$, itt sem teljesülhet ezért kizárásos alapon a $F(p_1^5, \dots, p_n^5) = (B \succ A \succ C)$ -nak kell teljesülnie.

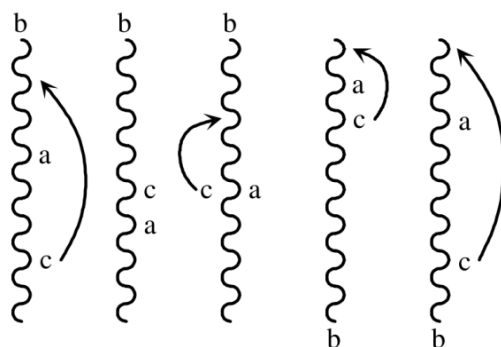
Hasonlóan látható, hogy ha az eddigi jelölésünket használva a p'_4 profilt tekintjük, akkor ott a $F(p_1^3, \dots, p_n^3) = (B \succ A \succ C)$ eredményt kell kapnunk a szavazatösszegző függvényünkkel. A bináris függetlenség miatt a B, C relatív viszonyának egyeznie kell a p_3 és a p_4 profilokban. Ezzel kizártuk, a $F(p_1^3, \dots, p_n^3) = (A \succ C \succ B)$ eshetőséget, hiszen ez ellentmondás lenne. Tehát tudjuk, hogy $F(p_1, \dots, p_n) = (A \succ B \succ C)$ és $F(p_1^3, \dots, p_n^3) = (C \succ A \succ B)$. Innen egyszerűen adódik, hogy a többi profilra való elmozdulás estén is a szavazat összegző végeredménye azonos azokkal, amit a $T_1; \dots; T_6$ háromszögek meghatároznak.

Vegyük észre, hogy idáig csak a T_1 -es típusú szavazó preferenciáit változtattuk, a többiekét nem. Most gondoljuk meg, hogy mi történik akkor, amikor egy szavazó az óramutatóval ellenkezően lépked az egyes területekre. Ha egy választó az óramutató járásával egyezően lépked, akkor a páros preferenciái közül mindig egy változik meg. Ha például az T_1 -es személy T_6 -ra mozdul, akkor a rendezésében csak $\{A, B\}$ preferencia sorrendje változik. A választott T_1 -es típusú személyt ezentúl kvázi-diktátornak fogjuk hívni. Jelöljük $p^j\{1 \rightarrow 6\}$ -tal azt, hogy az eredeti profilban a T_1 -es típusú szavazó és néhány másik, T_1 -es típusúból T_6 -os lesz. Ekkor így keletkezik a p_j profil. Ekkor a bináris függetlenség feltételt alkalmazva azt kapjuk, hogy $F(p^j\{1 \rightarrow 6\}) = (A \succ C \succ B)$. Ebből analóg mód megkapjuk az összes többi $F(p^j)$ -t, így láthatjuk, hogy ezen $j = 1, 3, 4, 6$ -ra a szociális rangsor egyezik a kvázidiktátoréval. Látható, hogy az új szavazó megint helyet cserélhet, mondjuk az T_5 -re. Az hogy a kvázi diktátor egyben diktátor is az kell csak észrevenni, hogy hagyjuk a többi szavazót változtatni.

■

Arrow-tétel bizonyítása II.

Ha egy profilban b minden választónál első vagy utolsó, akkor a társadalmi jóléti függvény szerint is. Létezik egy $\mathbf{v}$ választó, aki b -t az utolsó helyről az elsőre tudja helyezni, saját preferenciája módosításával egy profilban. Belátható, hogy $\mathbf{v}$ diktátor minden ac párra és minden ab párra.



5. ábra

Indirekt módon tegyük fel, hogy $a \succ b$ és $b \succ c$ egy ilyen profilra. Ekkor c az a fölé mozgatható minden választónál, és ez a bináris függetlenség miatt nem módosítja az előbbi relációkat. A monotonitás miatt $a \succ c$. De Pareto elv miatt $c \succ a$, ami ellentmondás.

Létezik egy $\mathbf{v}$ választó, aki b -t az utolsó helyről az elsőre tudja helyezni, saját preferenciája módosításával egy profilban. Tekintsünk egy olyan profilt, ahol b mindenkinél utolsó helyen áll. Ekkor (P) miatt F is utolsó helyre sorolja b -t. Egyesével tegyék most a választók az első helyre b -t. Lesz egy választó, akinél b elmozdul az F szerinti utolsó helyről. Ő lesz $\mathbf{v}$. A $\mathbf{v}$ lépése előtti profil legyen **I.**, a lépés utáni **II.** Az előző pont szerint b az élre került.

Következő lépés, hogy belátjuk $\mathbf{v}$ diktátor minden ac és ab párra:

1) $\mathbf{v}$ diktátor minden ac párra.

Készítünk egy **III.** profilt **II.** alapján, ahol $\mathbf{v}$ a b fölé helyezi a -t, a többiek pedig bárhogy rendezhetik a -t és c -t, de b marad ahol volt, alul vagy felül. (Tehát $\mathbf{v}$ szerint most: $a \succ b \succ c$.) Ekkor (BI) miatt most az F szerint $a \succ b$, hiszen az $\{a, b\}$ viszonyok most **I.**-nek felelnek meg. Ugyancsak (BI) miatt most az F szerint $b \succ c$, hiszen a $\{b, c\}$ viszonyok most **II.**-nek felelnek meg. A monotonitás miatt F szerint $a \succ c$ és (BI) miatt ez a sorrend b helyzetétől nem függ.

2) $\mathbf{v}$ diktátor minden ab párra.

Ha a 2. pontban b helyett c -vel dolgozunk, akkor hozzá is tartozik egy $\mathbf{v}^*$, aki minden

c -től különböző xy párra diktátor. Tehát $\mathbf{v}^*$ az ab párra diktátor. Az I. és II. profilban $\mathbf{v}$ meg tudja változtatni az ab sorrendet. Tehát csak $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$ lehetséges.

1) és 2) alapján kijelenthetjük, hogy $\mathbf{v}$ diktátor, mert bármely két jelölt sorrendjét meg tudja határozni.

■

Összefoglalás

Az 1972. évi közgazdasági Nobel-díjat (megosztva) *Kenneth J. Arrow* amerikai matematikus-közgazdász kapta. E magas elismerésben jelentős szerepe volt Arrow egy 20 évvel korábbi dolgozatának, amelyben bizonyította, hogy bizonyos szavazási procedúrákban demokrácia lehetetlen. Ezt a tételt kimondtuk és megnéztünk kétféle bizonyítását. Ennek a tételnek számos bizonyítása létezik, talán ebből is látszik, milyen jelentős tétel ez a közgazdaságtanban. A következményei inkább elméleti jelentőségűek, ugyanakkor sokat elmond a szavazási eljárásokról. Annak ellenére, hogy egy negatív tétel, igen nagy hatást gyakorolt mások munkáira, mert a társadalmi választásokkal, döntésekkel foglalkozó kutatók felhagytak az olyan módszerek keresésével, amely minden feltételt kielégít. Továbbra is foglalkoztatja a kutatókat az, hogy milyen feltételeken és hogyan, mekkora mértéken kell változtatni ahhoz, hogy „demokratikus” szavazási eljárás megvalósítható legyen, és mi az a pontos eljárás.

Irodalomjegyzék

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Kenneth_Arrow
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Arrow_Impossibility_theorem
- [3] Temesi J., A döntéelmélet alapjai, Aula, Budapest, 2002.
- [4] Kiss Cs., Döntési módszerek, Diplomamunka, ELTE 2008.

• Az Alkudozás Folyamata – Molnár András

Ebben az esszében az alku taktikai megközelítését vizsgáljuk. Az alku lehet hallgatólagos, vagy kifejezett. Mindkét esetben az ellenfelek figyelik és értelmezik egymás viselkedését, tudják, hogy a másik figyel és értelmezi őket, és ennek függvényében választanak a lehetséges cselekedetek közül. Alkunak mondhatók a bértárgyalások, a bíróságon kívül kötött megállapodások, ingatlanügynök és ügyfele között kötött szerződés, de a mindennapi életben is találhatunk példákat, mint a bosszúval fenyegetés, vagy a közlekedésben az elsőbbségi jog érvényesítése.

Olyan eseteket nem vizsgálunk, ahol a megállapodás mindkét fél számára nyereséges, csak olyanokat, ahol, ami az egyiknek nyereséges, a másiknak veszteséges. Ha két autó találkozik egy szűk úton, csak az egyik haladhat elsőként tovább, ami a másik számára idővesztés.

A két felet feltételezések irányítják: a másik mit fogadna el? Ha az egyik fél enged, talán azért teszi, mert azt hiszi, a másik nem engedne, vagy megelégszik azzal, hogy a patthelyzethez képest így is nyer. A patthelyzet egy olyan állapot, ahol nem történik megállapodás, és ami rosszabb lehet mindkét fél számára, mint bármely megállapodás. Rosszabb, ha a két autó egyike se haladhat tovább az úton, mint egy perc várakozás.

Alkuképesség

Az alkuképesség egyenlő az önmagunk elkötelezésére való képességgel. Egy döntés iránt való elköteleződés azt jelenti, hogy nem kívánunk, vagy külső okok miatt nem is tudunk másképp dönteni, és az ellenfélnek kell alkalmazkodnia hozzánk. Így nem biztos, hogy az alku során előny a hatalom, a pénz, vagy az értelem. Ha csak egy 100\$-os bankjegyünk van, nem tudunk többet fizetni egy 120\$-os termékért, mint 100\$, így az eladó is láthatja, hogy nem tudjuk megváltoztatni döntésünket, azaz elkötelezetté váltunk. A makacsság és a tudatlanság is eredményezhet jó alkuképességet. A makacs ember ok nélkül elkötelezheti magát, ami nagy előny, hiszen a későbbiekben látni fogjuk, hogy az elköteleződés nem egyszerű feladat.

Az alkuképességet a rászedés, átejtés képességeként is emlegetik, amivel a számomra kedvező árat akarom a másik féllel elfogadtatni. Kétféle rászedést különböztethetünk meg: tényekkel való csalást, illetve taktikai jellegű rászedést. A tényekkel csalás során az egyik fél hazudik például a jövedelméről, vagy a termék minőségéről. Itt csak a taktikai jellegű esetet vizsgáljuk.

Hogyan hitessünk el a másik féllel valamit? Az igazat könnyebb elhitetni. Ha nem igaz, akkor azzá kell tenni. Ha van egy ház, amit az eladó 20000\$-ért adna el, és a vásárlónak ennyit is ér, viszont csak 16000\$-t szeretne fizetni, hogy hitetheti el, hogy neki csak 16000\$-ért éri meg megvenni? El kell érnie, hogy tényleg 16000\$-ért érje csak meg. Ehhez például a város másik végébe költöztetheti az irodáját, hogy sokat kelljen utaznia, de ez nem célszerű. De szerződést is köthet egy harmadik féllel: ha 16000\$-nál többet fizet a házért, még 5000\$-t kell fizetnie a harmadik félnek. Fontos, hogy ez a személy ne legyen elérhető az eladó számára. Ha mégis az lenne, akkor az eladó felkeresheti, 2000\$-t ígérve neki, ha felmenti a vevőt a szerződés alól, megfenyegetve azzal, hogy ha nem menti fel, 16000\$-ért adja el a házat.

Hogyan kötelezzük el magunkat?

Vizsgáljunk meg egy olyan kultúrát, ahol, ha az egyik fél kijelenti az ajánlatával együtt, hogy „becsületszavamra”, akkor az az utolsó ajánlata. Ha tudják a másiktól, hogy az mit fogadna el, akkor az nyer, aki elsőként tesz ajánlatot. Ha a vevő 16000-19000\$ között fizetne a házért, az eladó 18000-22000\$-t között adná el, akkor, ha a vevő elsőként kijelenti, hogy „18000\$, becsületszavamra”, akkor az eladó ezt el kell, hogy fogadja. De ha az eladó gyorsabb, egy „19000\$, becsületszavamra” kijelentéssel 1000\$-ral többet kereshet.

Az előző modellhez vegyünk hozzá még kommunikációs nehézségeket: az alku történjen levélben. Az alku akkor érvényes, ha az egyik fél leírja ajánlatát, aláírja a levelet, elküldi a másik félnek, és ő is aláírja. Az elköteleződés viszont már akkor létrejön, amikor az egyik fél aláírta a saját levelét, de még nem küldte el. A patthelyzettől való félelem nagyban befolyásolhatja a döntést. Az előző példában a vevő lehet, hogy 19000\$-os ajánlattal fog levelet küldeni az eladónak, félve attól, hogy az eladó már elküldte a 19000\$-os ajánlatát. (Mivel ismerik egymás rezervációs árait, a 18000-19000\$-os intervallumon kell döntést hozniuk. A rezervációs ár az az ár, aminél rosszabb ajánlatot a tárgyaló fél nem fogad el. Eladóé: 18000\$, vevőé: 19000\$.)

Változtassuk a modellt úgy, hogy csak az egyik fél kaphat levelet. Ez a helyzet annak kedvez, aki nem kaphat üzenetet, mert ő elkötelezheti magát, és ezen a másik nem változtathat. Ha csak a vevő kaphat levelet, az eladó 19000\$ mellett kötelezheti el magát, és azt a vevő kénytelen elfogadni. Fordított esetben a vevő 18000\$ mellett dönt, és az eladónak szintén nincs más lehetősége, mint elfogadni. (A patthelyzetet itt is el akarják kerülni: mert pl. a vevő nem tud más házat megvenni a környéken, és az eladó hosszú ideig nem találna új vevőt.)

Legyen most a népességnek két csoportja: akik elfogadják a „becsületszavamra” szokásrendet, és akik nem. Ha az alkudozó felek a két különböző csoportból származnak, és ismerik egymás hovatartozását, akkor annak van előnye, aki szokást elfogadók tagja. Ő bármikor ok nélkül elkötelezheti magát.

Ha a felek nem ismerik egymás rezervációs árát, az alkudozás kezdetén megpróbálják kideríteni azt, miközben az elköteleződés is kezdetét veszi, ami befolyásolhatja a rezervációs árat.

De a valós helyzetekben nem lehet ok nélkül elköteleződni. Megfelelő ok találása sokszor nehéz feladat. Ha sikerül, az ellenfél számára is nyilvánvalóvá kell tenni az elkötelezettség erősségét. Nem összeegyeztethető döntések során a senkinek sem kedvező patthelyzet is kialakulhat.

A tárgyalás intézményi és szerkezeti jellemzői

Az alkuhelyzetek intézményi és szerkezeti jellemzői eszközöket biztosítanak az elköteleződés könnyítésére vagy éppen nehezítésére, és az egyidejű elköteleződés vagy a patthelyzetek elkerülésére.

Alkumebízott alkalmazása

Alkumebízott alkalmazása kétféleképpen befolyásolhatja az elkötelezettséget. Elsőként a megbízottnak korlátozott döntési lehetőségei lehetnek, és a másik fél kénytelen ehhez igazodni. Ez akkor jó, ha az első fél nem érhető el közvetlenül, és a megállapodásra kevés idő van.

Másodszor, a megbízott egyben megbízó is lehet, akinek a megbízójától különböző, saját ösztönzői is vannak. Példa erre a gépjármű-biztosítás, ahol a megbízó a járműtulajdonos és a megbízott a biztosítótársaság. A biztosító sokkal hatékonyabban tud perléssel fenyegetőzni, mint a tulajdonos, mert előbbinek be is kell váltani fenyegetését, hogy megtartsa hírnevét.

Titoktartás versus nyilvánosság

Az elköteleződés hatásos eszköze a hírnév megőrzésének érdeke. Ehhez viszont szükséges a nyilvánosság. A kezdeti ajánlatnak és a végkimenetelnek is köztudottnak kell lennie, egy titkos megállapodás nem ronthatná a hírnevet. Viszont patthelyzet esetén a titkos egyezmény hasznos lehet az egyetértés kialakításában.

Egymást keresztező tárgyalások

Ha az egyik fél több egyidejű tárgyalást is folytat különböző ellenfelekkel, magát ezt a tényt is előnyként használhatja fel. Mondhatja, hogy „Ha neked engedek, másoknak is engednem

kell.”, amivel el is kötelezi magát.

Folyamatos tárgyalások

Ez esetben két fél több tárgyalást is folytat egymással. Ilyenkor az egymást keresztező tárgyalásokhoz hasonlóan, kijelentheti egyikük, hogy „Ha az egyik témában engedek, elvárod majd, hogy a többiben is engedjek.”, ami szintén erős elköteleződéshez vezet.

A korlátozó napirend

Ha a két fél több mindenről is tárgyal, nem mindegy, hogy azt egy időben és egy helyen teszik, vagy egymástól elkülönítve. Ha egymással összefüggésbe hozhatók, az egyik fél fenyegethet azzal, hogy az egyik témában a másik kárára dönt, ha az nem dönt a másik témában az első javára. Ezzel törvényesen zsarolja. Erre a későbbiekben lesz látható az 5-6. játszma. Törvénytelen eszközökkel zsarolni nehezen kivitelezhető, a felek erkölcstelennek vélhetik, a hírnevet is rombolhatja, és a büntetés kockázatával jár.

A kompenzáció lehetőségei

Könnyebb a megállapodás, ha a két fél közösen számolja a költségeket és a nyereségeket és ezeket osztják szét.

	A költsége	B költsége	A nyeresége	B nyeresége
C_1 cselekvés	10	10000	0	100
C_2 cselekvés	10000	10	100	0

1. táblázat

Az 1. táblázatban látható, hogy külön senkinek sem érdemes végrehajtani egyik cselekvést sem. Ha A C_1 -et végrehajtja, nyeresége -10, B nyeresége 100, ezért A-nak C_1 -et végrehajtani nem érdeke. Ha B hajtja végre C_1 -et, nyeresége -9900, A nyeresége 0, így B-nek sem kedvező a C_1 cselekvés elvégzése. C_2 esete hasonlóan nem kedvez senkinek. De együtt végrehajtva, A C_1 -et, B pedig C_2 -t, mindketten 10 költség fejében 100-at nyernek.

	A nyeresége	B nyeresége
D_1 döntés	100	200
D_2 döntés	120	100

2. táblázat

A 2. táblázatban egy alkuhelyzet látható, ahol a felek két döntés közül választhatnak, és akkor van kimenetel, ha mindketten ugyanazt választják. A nyilván D_2 -höz ragaszkodna, B pedig D_1 -hez. A patthelyzetet elkerüléséért B javasolhatja, hogy kárpótolja A-t, ha az D_1 mellett dönt. Így a végső nyereség lehet pl.: A: 130, B: 170.

	költség	A nyeresége	B nyeresége
C_1 cselekvés	3	2	4
C_2 cselekvés	3	2	4

3. táblázat

A 3. táblázatban C_1 és C_2 egy-egy embert igénylő cselekvések. Ha B végrehajtja őket, 6 költségen 8-at nyer, viszont mivel A -nak nem érdeke bármelyik végrehajtása, B kénytelen mindkettőt vállalni, így A -nak 0 költségért 4 nyereség jut. De ha B hatásosan tudja fenyegetni A -t azzal, hogy ha nem hajtja végre egyiket, akkor ő sem fogja, amivel A is elveszti a 4 nyereségét, lehetősége nyílik B -nek költségeit felére csökkenteni. Így tehát A költsége 3, nyeresége 4, míg B költsége 3, nyeresége 8 lesz.

Ha több egyidejű tárgyalás is holtpontra jutott, összekapcsolásukkal lehetőség nyílna a kompenzációra. Az egyik fél engedhet az egyikben, míg a másik fél a másikban, amivel mindkettőben létrejöhet a megállapodás. A parlamentáris rendszerekben ezt gyakran szükséges alkalmazni.

A tárgyalások mechanikája

További tulajdonságait is vizsgálhatnánk az alkuhelyzeteknek: Büntetendő-e a hamis információk terjesztése? Van-e az alkunak időkorlátja? Van-e olyan állapot, amely nem megállapodás esetén is biztosított (*status quo*)? Mekkora a patthelyzet költsége? Ellenőrizhető-e a megállapodások betartása? Ha több dologról kell tárgyalni, milyen sorrendben veszik őket? Hosszan folytathatnánk ezt a felsorolást. A legtöbb kérdésre a válasz a parlamentáris rendszer vizsgálatával kapható meg.

Alapelvek és precedensek

Az alapelvek segíthetnek az erős elköteleződés kialakításában. Ha egy ország alapelve, hogy az erőszakkal kikényszerített kormányokat nem ismeri el, akkor, ha valaki ehhez kapcsolja az alkuban tett követeléseit, elkötelezetté válhat. A másik fél számára nyilvánvaló lesz, hogy inkább patthelyzetet fogad el, minthogy semmibe vegye saját országa alapelvét.

A múltbeli példák (precedensek) sikere rámutathat arra, hogy ugyanolyan helyzetben ugyanazt a döntést érdemes választani. Ha a szabálytalanul parkoló autókat mindig megbüntették, ami miatt alacsony maradt a szabálytalanságok száma, a továbbiakban is érdemes lesz mindenkit megbüntetni.

Kazuisztika

Ha az egyik fél rájön, hogy érdemes engedményt tennie, két dolgot kell felismernie: közelebb

kerül ahhoz, amit ellenfele akar, és felkeltheti a gyanút, hogy ha most nem volt erősen elkötelezett a döntése iránt, a továbbiakban se lesz az. De ha jó mentséggel tud szolgálni ellenfelének az engedmény okát illetően, akkor kimentheti magát helyzetéből.

A kazuisztika használata esetén az egyik fél rájön, hogy a másik rosszul döntött, rosszul számította ki elkötelezettségét. Az első fél megpróbálja a rossz döntésre felhívni a figyelmet, és megváltoztatni azt. Ha a második fél együttműködik, akkor az első segíthet neki hírneve megőrzésében, új pozíciója olyan fényben való feltüntetésében, hogy az ne mondjon ellent a réGINEK, inkább csak újraértelmezze azt.

A fenyegetés

A fenyegetés által azt közöljük a másik féllel, hogy mik lesznek cselekvésének automatikus következményei. Általában a fenyegetés betartásával a fenyegető félt is kár éri, ezért mindkét félnek kedvez, ha az elrettentés sikerül, és nem kell végrehajtani. Pl.: Autó összetörésével fenyegetés, ha nem adják meg az elsőbbséget. De a sikeressége abban rejlik, hogy a fenyegető fél el tudja-e hitetni a másikkal, hogy tartani fogja magát a fenyegetéséhez. Azaz az elkötelezettségét kell bizonyítania a fenyegetett fél számára.

De hogyan győzzük meg erről a másik felet? Hazudhatunk a várható károkról, és hogy nekünk nem érdekünk a betartás elkerülése. Színlelhetünk bosszúvágyat. A hírnevet tehetjük a fenyegetéstől függővé. De tehetjük akár a fenyegetett személytől függővé is, azáltal, hogy kinyilvánítjuk számára, hogy megleckéztetése a későbbi esetek számára példaként szolgálna. Például az első büntetés kiszabása az új parkolóban. Vállalhatunk jogi elköteleződést egy harmadik féllel kötött szerződés által. A fenyegetést át is háríthatjuk egy megbízottra, akinek fizetése és hírneve a beváltástól függ.

A fenyegetett fél is több módon védekezhet. Még azelőtt végrehajthatja a cselekvést, hogy elhangzana a fenyegetés. Ha ez nem megoldható, akkor elkötelezheti magát a cselekvés iránt. Ilyenkor a fenyegetésnek csak annyi értelme van, hogy közli az elkerülhetetlen közös károkat. Ha meg tudja osztani a kockázatot másokkal, olyan kicsire csökkentheti a sérülés mértékét, amit nem lesz már érdeke elkerülni. Vagy színlelheti azt, hogy a fenyegetés beváltása esetén is nyerne. Ha elég makacs, vagy annak tudja mutatni magát, akkor megint csak hatástalanná teheti a fenyegetést. Még jobb a valódi tudatlanság vagy hitetlenség, amikor is nem fogja fel, vagy nem hiszi el a következményeket. Le is rombolhatja a hozzá vezető kommunikációs csatornákat. Ha törvény írja elő, hogy az emberrabló ne érje el a családtagokat, így nem fog tudni pénzt követelni, és ez már az emberrablás előtt nyilvánvaló is lesz számára, így lehet,

hogy el sem követi azt. Fontos, hogy a most felsorolt védekezési lehetőségek a fenyegetés elhangzása előtt történjenek.

Ha a fenyegető elkötelezi magát a fenyegetés betartása mellett, feltéve, hogy a fenyegetett végrehajt egy bizonyos cselekvést, és ha a fenyegetett is elkötelezi magát ezen cselekvés végrehajtása mellett, vagy ha a fenyegetés nem rettent el a fenyegetettét, akkor mindkettőjük érdeke lehet az elkötelezettségek felbontása. Máskülönben mindketten szembe kell nézniük a közös károkkal. Például két autó egyszerre közeledik egy kereszteződéshez, és az elsőnek van elsőbbsége, de mindkettő láthatóan olyan gyorsan jön, hogy nem fog tudni megállni. Az első azért, mert neki van elsőbbsége, és nem akar róla lemondani, és azzal fenyegeti a másikat, hogy összetöri az autóját, ha nem ad elsőbbséget. A második pedig nagy sebességével az melletti elkötelezettségéről ad tanúsítást, hogy nem kíván elsőbbséget adni. Egyiküknek se érdeke autójuk összetörése, de ez csak legalább az egyik elköteleződés feladásával lehetséges. De már korábban láthattuk, hogy az elkötelezettség feladása a legtöbb esetben nem könnyű feladat. A hírnevet is rombolhatja, és felkeltheti a vágyat a másik félben, hogy további engedményeket követeljen.

Jól kell megválasztani azt a cselekvést, ami miatt, és azt is, amellyel fenyegetnek. Az elköteleződés is nyilvánvaló kell, hogy legyen a fenyegetés végrehajtása iránt. De miután a fenyegetett fél elkövette a cselekvést, a fenyegetőnek már nem érdeke betartania fenyegetését, hiszen magának is kárt okozna vele. Viszont a cselekvés előtt nem hagyhatja meg annak lehetőségét, hogy nem fogja betartani. Legalább is a másik számára láthatóan nem. Bármely erre utaló jel a fenyegetés sikertelenségéhez vezethet.

A cselekvésnek, ami miatt fenyegetünk, és az ellencselekvésnek, amivel fenyegetünk, jól meghatározottnak kell lennie. Ellenkező esetben lehet, hogy elérkezik az a pont, amikor az ellencselekvés szükségessé válik, holott a fenyegetett el akarta kerülni azt. Az is előfordulhat, hogy a fenyegetett végrehajtja a cselekvést, de az ellencselekvés a határozatlanság miatt elmarad. Ezért néha az eredeti helyett kiegészítő cselekvést kell választani. Pl.: nem a fegyver használatáért büntetünk, hanem viseléséért.

Ha valaki a hírnevéhez köti a fenyegetés végrehajtása iránti elkötelezettségét, nagy kockázatot vállal. Hiszen ha a másik fél végrehajtja a cselekvést, két lehetősége marad: hírnevét rontani, vagy a közös károkból részesülni. Erre megoldás a folyamatosság. A fenyegetést kisebb cselekvésekre kell felbontani. Ez maga után vonja, hogy a cselekvés is felbontható kell, hogy legyen. Így az első cselekvést követheti az első ellencselekvés, a

másodikat a második, stb. Ilyenkor a hihetőséget növeli az első néhány ellencselekvés végrehajtásának leckéztető szerepe. Így elkerülhető a nagy kár, de a fenyegetett megbizonyosodhat a fenyegető elkötelezettségéről a betartás iránt. Ha egy országtól, amely nem rendeltetésszerűen használja a külföldről érkező segélyeket, és ezért teljes mértékben megvonná azokat, az mindkét fél számára nyilvánvaló károkat okozna. De minden nem megfelelő felhasználás után a segély mértékének 10%-kal való csökkentése jobb megoldásnak bizonyulhat.

Olyan esetekben, amikor a cselekvés nem felbontható, más cselekvést kell választani. Ez lehet a fő eseményt megelőző előkészítő lépések sorozata. Például, ha egy férfi be akar törni egy kirakatot, minden a kirakat felé tett lépéséért megbüntetjük. Az ellencselekvés felbontására is működik ez a módszer. Az azonnali halállal való fenyegetés helyett célravezetőbb lehet az élelmiszer megvonása. Így a fenyegető az, aki érezheti, mikor jön el az a pont, ami után már nem változtathat döntésén (utolsó esély doktrínája). A bérlők könnyebben bírhatók költözésre a szolgáltatások egymás utáni kikapcsolásával, mint a kilakoltatással való fenyegetéssel.

A fenyegetett fél is alkalmazhat részekre bontást. Ha nem tudja végrehajtani a fenyegetés elhangzása előtt a végső cselekvést, a kezdő lépésekkel nyilvánvalóvá teheti elkötelezettségét. Még jobban kedvez neki, ha cselekvése felbontható, de a fenyegető cselekvés nem.

Az ígéret

Az ígéret a másik fél tekintetében való elköteleződést jelent. Akkor szükséges, ha a felek nem tudják irányítani egymás döntését, vagy ha lehetőségük van a csalásra. Nehéz önmegkötő ígéretet tenni, vagyis nehéz olyan helyzetet teremteni, amelyben nincs más választásunk, mint az ígéret betartása. A bűnöző, miután biztonságba került, szeretné elengedni a túszt, és nyilván a túszt is ezt szeretné. De fél attól, hogy utóbbi információkat adhat róla a rendőrségnek. Hogyan lehetne önmegkötő ígéretet adni? Ha a túszt is elkövetett valamilyen bűncselekményt, azt közölheti a fogva tartójával, vagy ha nem követett el, akkor elkövetheti annak jelenlétében. Így a túsznak előnytelen lenne az elengedés után a bűnöző ellen tanúskodnia, mert az akkor őt is elárulná.

Az ígéret teljesítését mérni kell. Ez nem mindig oldható meg közvetlenül. Ilyen helyzetek pl.: ha valaki egy titkos választáson eladja a szavazatát, vagy ha egy munkás megígéri, hogy nem lop a készletből. A megfigyelhető kimenetel, hogy ki nyer a választáson, vagy, hogy van-e

készlethiány, számos az alkutól eltérő hatásnak van kitéve: a választás eredménye a többi szavazótól is függ, készlethiány pedig lehet adminisztrációs hiba miatt is. Mégis ezek alapján kell mérnünk az ígéret betartását. A szavazót a nyertes párt alapján fizetjük meg, a készlethiányt pedig már lopásként könyveljük el.

Az alkuban a gyengeség néha előny. A titkos szavazás biztosítja, hogy ne legyünk képesek kikényszeríthető ígéretet tenni arról, hogy mire fogunk szavazni. Ezáltal védettek leszünk a fenyegetésekkel szemben.

Itt is alkalmazható a felbontás taktikája, akárcsak a fenyegetésnél. Ha a két fél nem bízik egymásban, lépésenként kell kialakítani a bizalmat. Ha egy fontosabb ügy van, amelyben meg szeretnének állapodni, érdemes előbb kisebb ügyeket találni, és ezeket „gyakorlásképpen” felhasználni a kölcsönös bizalom megteremtésére. Az is egy lehetőség, hogy az eredeti alkut részekre bontjuk. Ha több ország megegyezik, hogy mindenki 1 millió dollárt küld a Vöröskeresztnek, a többiek csalásától való félelem elég nagy lehet ahhoz, hogy senki se küldjön. De ha 10 részletben küldik el, akkor részellenként csak keveset kockáztatnak, és megtudhatják, hogy a többiek tartják-e magukat az ígéretükhöz.

Egy szemléltető játszma

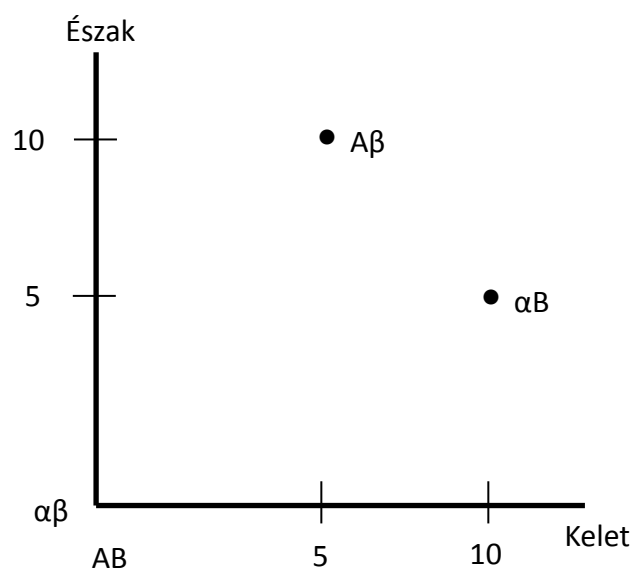
Az elkötelezettségeket, fenyegetéseket, ígéreteket és kommunikációs problémákat tartalmazó alkuhelyzetek egy olyan játszma változataival szemléltethetők, ahol mindkét játékosnak két alternatívapárja van, amelyek közül választhat. Legyen a két játékos: Észak és Kelet. Észak választhat A és α közül, míg Kelet B és β közül. Tehát négy kimenetel van: AB , $A\beta$, αB , $\alpha\beta$. Mind a négy lehetőség két értéket határoz meg: Észak illetve Kelet nyereségét. Feltesszük, hogy nem kárpótolhatják egymást és nincs lehetőség a játszmán kívüli fenyegetésre. Ilyenkor nyilván egy játékos választását befolyásolja a másik választása.

Az ilyen játszmát ábrázolhatjuk egy kétdimenziós koordináta rendszerben, ahol x tengely Kelet, y tengely pedig Észak nyeresége, és a 4 alternatívapáros négy pontot határoz meg. A játszma kimenetelét nagyban meghatározza a négy pont egymáshoz viszonyított helyzete, a lépések sorrendje, a kommunikáció lehetősége, az elkötelezettség eszközeinek hozzáférhetősége, az ígérek kikényszeríthetősége és több játszma egymással való összekapcsolhatósága. Az egyszerűség kedvéért most feltesszük, hogy a 4 alternatívapár helyzete mindkét játékos számára ismert.

Az 1. játszma az általános alkuhelyzetet mutatja be, ha feltesszük, hogy Észak és Kelet megbeszélnek egymással döntéseiket. $\alpha\beta$ és AB pontokban mindkettőjük nyeresége 0, így

ezekre tekinthetünk úgy, mintha nem lenne megállapodás. Tehát $A\beta$ és αB közül kell választaniuk. Az nyer, aki elsőként tudja elkötelezni magát. Ha ez Északnak sikerül A mellett, akkor Kelet AB és $A\beta$ közül biztosan $A\beta$ -t fogja választani. Ha Kelet teszi meg az első lépést, B -t fogja választani, így Északnak csak az αB -t, mint egyetlen nyereséges pontot hagyja.

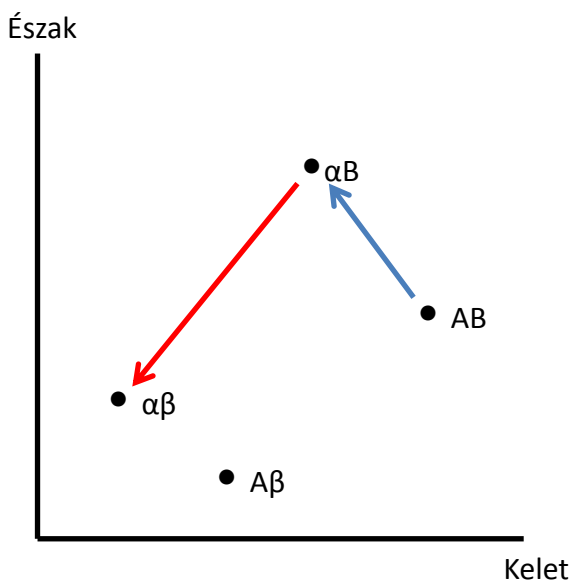
Példaként tekinthetjük két jármű útszűkületnél való találkozását, ahol Észak az egyik jármű, Kelet a másik jármű vezetője. Egyszerre csak egy jármű haladhat át az úton. Észak lehetőségei: A : várakozás nélkül továbbhalad, α : megvárja, amíg Kelet átér. Kelet lehetőségei: B : nem áll meg, β : megvárja Északot. A patthelyzetet el akarják kerülni, vagyis hogy mindketten várjanak ($\alpha\beta$), vagy, hogy mindketten egy időben próbáljanak átjutni (AB). Így az jut át idővesztés nélkül, aki elsőnek hajt a szűk szakaszra, mert a másik inkább rövid ideig vár, mintsem egyikük se jusson át. A pontok koordinátái itt jelölhetnek egyfajta szubjektív nyereségérzetet, vagyis hogy a kimenetel mennyire segítette hozzá a feleket úticéluk mielőbbi eléréséhez.



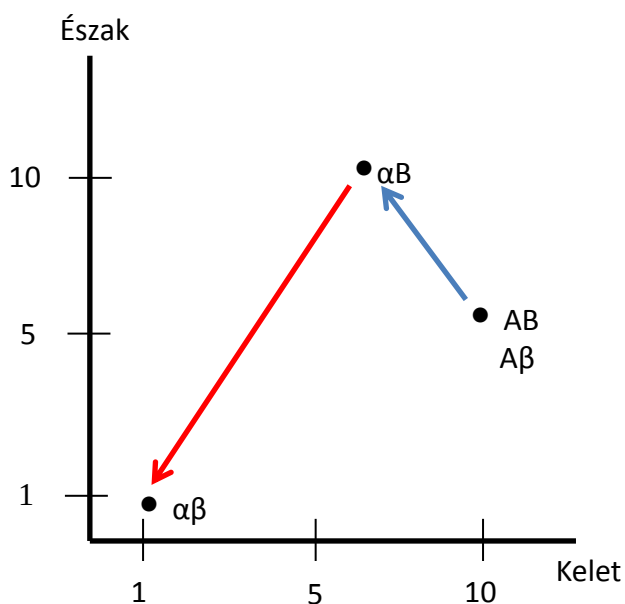
1. játszma: általános alkuhelyzet.

A 2. játszma az elrettentő fenyegetés példája, feltéve hogy a kezdeti állapot AB . Észak αB -be mozdulna el, de Kelet $\alpha\beta$ -val fenyeget. Az első lépés előnye Kelet számára már nem elég. Ha B -t választja, és azt fogja, mert β -val csak kisebb nyereséget érhetne el, Észak αB és AB közül αB -t fogja. Ha Észak lép elsőnek, $A\beta$ -tól tartva α -t fog választani, Keletnek αB és $\alpha\beta$ lehetőségeket hagyva, amelyek közül utóbbi αB mellett fog dönteni. Tehát Keletnek feltételes döntés mellett kell elköteleznie magát: ha Észak α -t választja, akkor ő β -t, különben B -t. Fontos, hogy az $\alpha\beta$ pont az Észak tengelyen AB alatt legyen, különben a fenyegetés hatástalanná válna.

Módosítsuk úgy az ábrát, hogy az $A\beta$ pont is az AB pozíciójára kerüljön. (2. játszma 2. ábra). Ekkor nézzük azt a példát, amikor két jármű találkozik, és a 2-nak van elsőbbsége. Észak az első, Kelet a második vezetője. A lehetséges döntések: Észak: A : elsőbbséget ad, α : nem ad elsőbbséget. Kelet: B : biztonságosan közlekedik, vagyis ha Észak elsőbbséget ad, elfogadja, ha nem, lemond róla. β : nem mond le az elsőbbségről. Kelet fenyegetését kifejezheti azzal, hogy nem lassít. Így két lehetséges kimenetel marad: vagy Észak elsőbbséget ad (AB), vagy mindketten összetörnek az autóikat ($\alpha\beta$). $\alpha\beta$ (1,1) pozíciója arra a nyereségre utal, hogy legalább becsületüket meg tudták védeni.



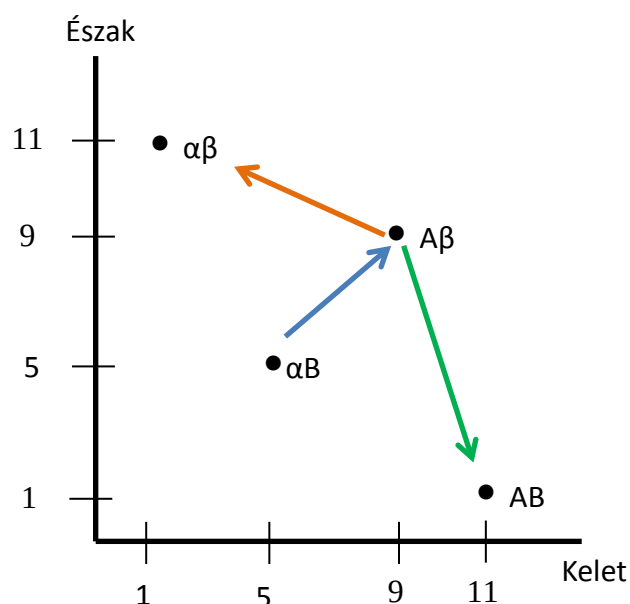
2. játszma 1. ábra: példa a fenyegetésre. A kék nyíl jelzi azt az Észak által végrehajtható cselekvést, aminek végrehajtása esetén Kelet beváltja fenyegetését: végrehajtja a piros nyíllal jelölt cselekvést.



3. játszma 2. ábra.

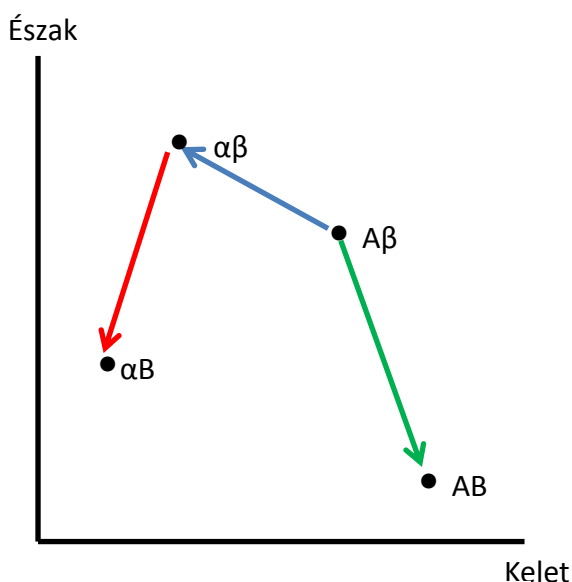
A 3. játszma az ígéretet mutatja be. Az első lépés előnyével Kelet B -t választaná, hogy elkerülje $\alpha\beta$ -t, Észak ez után AB és αB közül αB -t. Ha Észak dönt elsőként, AB -től tartva α -t fogja választani, és Kelet αB és $\alpha\beta$ közül αB -t. Tehát mindkét esetben αB a kimenetel, viszont mindketten többet nyernének AB -val. Ehhez azonban bízniuk kell egymásban, vagy önmegkötő ígéretet kell tenniük. Keletnek meg kell ígérnie, hogy nem választja AB -t, ha Észak elsőként A -t, és Északnak meg kell ígérnie, hogy nem dönt $\alpha\beta$ mellett, ha előtte Kelet β mellett. Tehát a másodiknak lépő játékosnak lehetősége van a csalásra. Ha mindketten egyszerre lépnek, a csalás, vagy a csalástól való félelem is αB -t eredményezheti. Ha az egyikük önmegkötő ígéretet tud tenni, a másik teheti meg az első lépést. Egyszerre való lépés esetén mindkét fél részéről szükséges az ígéret.

Példa lehet erre, ha két ország a nukleáris leszerelésről tárgyal. Észak dönthet úgy, hogy nem szerel le (α), vagy leszerel (A). Kelet szintén a nem leszerelést (B) és a leszerelést választhatja (β). A nyereség egyrészt abból áll, ami a katonai célokra szánt költségvetésből marad, másrészt pedig abból, hogy fegyverek birtokában egy országnak nagyobb befolyása lehet pl. a külkereskedelemben. Ha egyikük se szerel le, évi 5 milliárd dollárjuk marad fejenként. Ha Észak nem szerel le, de Kelet igen, akkor marad egyrészt az 5 milliárd dollár, és még az, amennyit az ér Észak számára, hogy a későbbiekben fenyegetheti és befolyásolhatja Keletet, vagyis 6 milliárd dollár, tehát összesen 11 milliárd. Kelet számára hiába hoz nagy nyereséget az, hogy nem kell drága fegyvereket fenntartania, ha pénzben kifejezve nagy veszteség a kiszolgáltatottság, így ez a helyzet neki csak 1 milliárd nyereséget jelent.

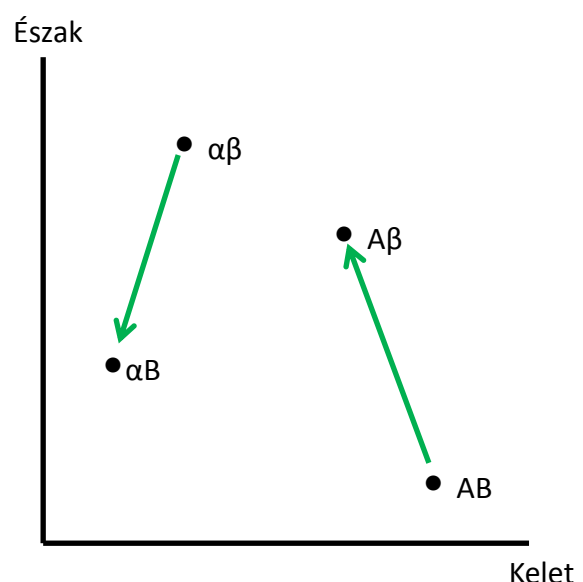


4. játszma: példa az ígéretre. A zöld és a narancssárga nyilak mutatják azokat a lépéseket, amelyekről való lemondásról rendre Kelet és Észak ígéretet tesz. A kék nyíl mutatja, hogy milyen elmozdulás történik, ha sikerül ígéretet tenniük egymásnak.

A 4. játszma szemlélteti a fenyegetés és az ígértetés együttes használatát. Kommunikáció nélkül, ha Észak lép elsőnek, α -t választ, majd Kelet β -t, fordított sorrendben Kelet β -t, majd Észak α -t. Ha egyszerre lépnek, akkor is $\alpha\beta$ lesz a kimenetel. Ha Kelet $A\beta$ -t szeretné elérni, fenyegetnie kell Északot αB -vel, ha az $\alpha\beta$ -t választja (vagyis α -t A helyett), azonban ez még önmagában nem elég. Ugyanis ha Észak A-t választ, Kelet AB mellett dönthet, ami rosszabb Északnak, mint αB . Keletnek még meg is kell ígérnie, hogy nem fog Észak A választása után B-t mondani. Tehát Keletnek Észak mindkét választása után pont az ellenkezőjét kell tennie, mint amit akkor tenne, ha nem lenne elkötelezve (az ígértetés és a fenyegetés iránt): ha Észak A-t választ, Kelet AB helyett $A\beta$ -t, és ha Észak α -t, akkor Kelet $\alpha\beta$ helyett αB -t (4. játszma 2. ábra). Kelet mindkét esetben egy számára jobb megoldásról mond le.



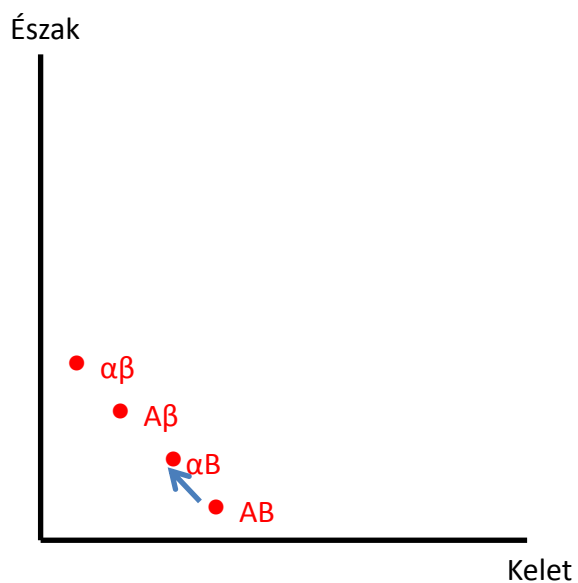
4. játszma 1. ábra: a kék nyíl mutatja a cselekvést, ami miatt Kelet a piros nyíllal jelölt ellencselekvéssel fenyeget. A zöld pedig azt, amiről Kelet ígértetével lemond.



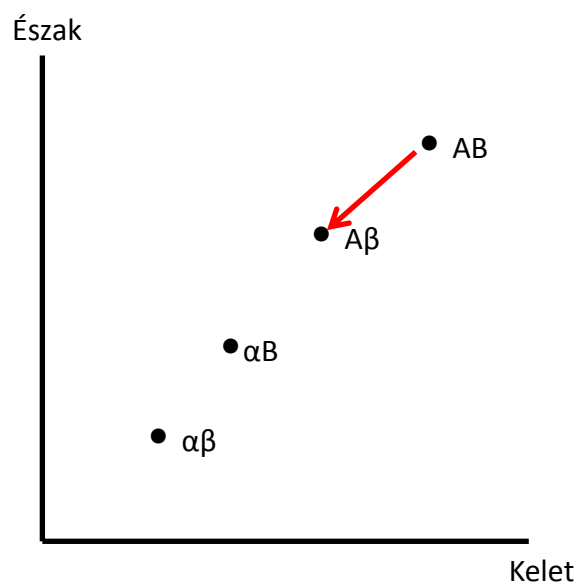
4. játszma 2. ábra: Keletnek $A\beta$ elérése érdekében pont az ellenkezőjét kell tennie, mint amit akkor tenne, ha nem lenne elkötelezett.

Az 5. és a 6. játszma a zsaroló fenyegetést mutatja be. Külön-külön nem érdekesek. Az 5. játszma kimenetele αB , és nem tud egyik játékos se mást kikényszeríteni. A 6. játszma eredménye AB. De ha a két játszma összekapcsolható, és ugyanaz a két fél játssza, akkor az egyik játszmában való fenyegetéssel a másik játszma kimenetele befolyásolhatóvá válik. Kelet fenyegethet β -val a 6. játszmában, ha Észak nem választja A-t α helyett az 5-ben. (Lényeges, hogy a 6. játszmában AB és $A\beta$ y távolsága nagyobb, mint αB és AB-jé az 5-ben, így Észak többet veszítene, mint amennyit nyerne α választásával). Ha a fenyegetés sikeres, és Észak A mellett dönt az 5-ben, Keletnek nem kell beváltania fenyegetését, és választhat B-t a 6-ban. Itt a 6. játszma egy külső cselekvés az 5. szempontjából, amellyel törvényesen lehet zsarolni.

Észak „A fenyegetés” fejezetben felsorolt védekező módszereket alkalmazhatja.



5. játszma. A kék nyíl mutatja Észak azon lehetséges cselekvését, ami miatt Kelet fenyeget.



6. játszma. A piros nyíl jelzi azt a cselekvést, amit Kelet végre fog hajtani, ha Észak az 5. játszmában nem A -t választja.

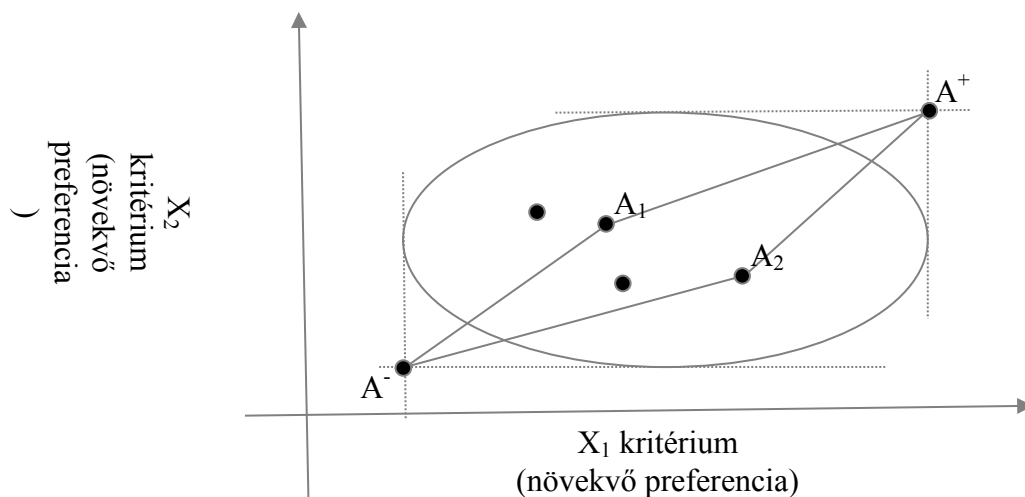
• TOPSIS – Tóth Tamás

/Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution/

Történelem

A TOPSIS egy többtényezős döntést támogató eljárás, amely azon az elven alapul, hogy a választott alternatíva geometriai távolsága a legjobb megoldástól a legkisebbnek, a legrosszabb megoldástól pedig a legnagyobbak kellene, hogy legyen. Az alapvető eljárást Kwangsun Yoon és Hwang Ching-Lai publikálta 1980-ban. Ezt 1987-ben megjelent cikkében Yoon, majd 1993-ban Hwang és két kollégája továbbfejlesztette.

Alapelv



Az ábrán két kritérium szerint hasonlítjuk össze az alternatívákat, még hozzá olyan kritériumok szerint, amelyeknek ahogyan nő az értéke, úgy nő a preferenciánk. Az ábrán A^+ és A^- jelöli rendre a legjobb és a legrosszabb döntéseket. Jelen esetben nagyon nehéz lenne választani az A_1 és az A_2 alternatívák közül, mert nagyon hasonlónak tűnnek. Ebben lesz segítségünkre a TOPSIS.

Feltételek

Az eljáráshoz három feltevésre van szükségünk:

- A döntési mátrixban minden attribútum monoton nő vagy monoton csökken.
- A súlyok adottak minden kritériumhoz.
- Minden attribútumhoz, amely alaphoz nem numerikus, meg kell adni egy numerikus skálát.

Eljárás

- Készítünk egy döntési mátrixot az m alternatívára ($A_{1,2,\dots,m}$) és n kritériumra ($X_{1,2,\dots,n}$).

$$D = \begin{matrix} & X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_{ij}^2}}$$

X_{ij} jelentése, hogy az i -edik alternatívának a j -edik attribútuma mekkora értéket vesz fel.

- Normalizáljuk a mátrixot, azaz minden attribútumhoz megadunk egy nem-dimenzionális jellemzőt, r_{ij} -t, ami alapján a különböző attribútumok összehasonlíthatóvá válnak.
- Elkészítjük a súlyozott normalizált mátrixot (V), ahol w_i az i -edik attribútumhoz tartozó súly, r_{ij} az imént normalizált érték és v_{ij} az új mátrix eleme.

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \cdots & w_n r_{1n} \\ w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & \cdots & w_n r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & \cdots & w_n r_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \left\{ \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J^+ \right), \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J^- \right) \mid i = 1, 2, \dots, m \right\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+\}$$

$$A^- = \left\{ \left(\min_i v_{ij} \mid j \in J^+ \right), \left(\max_i v_{ij} \mid j \in J^- \right) \mid i = 1, 2, \dots, m \right\} = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-\}$$

$$J^+ = \{j_1, j_2, \dots, j_n \mid j \text{ haszon} \}$$

$$J^- = \{j_1, j_2, \dots, j_n \mid j \text{ költség} \}$$

- Megállapítjuk a legjobb és a legrosszabb megoldásokat.
- Kiszámoljuk az ideális elválasztó mértékeket a jó és a rossz esetre.

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Kiszámítjuk a relatív távolságokat a legjobb megoldástól. Vegyük észre, hogy C_i^* azt fogja megmutatni, hogy az alternatíva milyen távol van A^+ -tól.

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}, \quad 0 \leq C_i^* \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$C_i^* = 1, \quad \text{ha } A_i = A^+$$

$$C_i^* = 0, \quad \text{ha } A_i = A^-$$

- Rendezzük a relatív távolságok szerint csökkenő sorrendbe az alternatívákat. Ez lesz a sorrendünk.

Előnyök és hátrányok

A TOPSIS pozitívumai közé sorolható, hogy viszonylag könnyen számolható és átlátható eredményt ad a sorrend képében. Továbbá csak a súlyokat és az alternatívák attribútumait kell tudnunk a végrehajtásához.

Azonban az utóbbi nem csak előnye, hanem hátránya is, ugyanis érzékeny az attribútumok hiányára. Ezenkívül minden egyes új alternatíva bekerülésekor vagy esetleg eltávolításakor újra kell számolnunk az egészet, ugyanis egy újabb alternatíva hatására teljesen megváltozhat az eredmény.

Példa

Legyen adott 4 autó: Toyota, Honda, Ford, Mazda és 4 kritérium: kinézet, megbízhatóság, környezetkímélés, ár. Minden autónak tudjuk az attribútumait, így felírtuk a következő táblázatot:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
súlyok	0.1	0.4	0.3	0.2
Toyota	7	9	9	8
Honda	8	7	8	7
Ford	9	6	8	9
Mazda	6	7	8	6

Ez alapján fel tudjuk írni a normalizált táblázatot. Vegyük például a Toyota kinézetét. Ebben az oszlopban lévő elemek négyzetösszege: $7^2+8^2+9^2+6^2 = 230$, azaz a cella normalizált értéke a következő: $7/\sqrt{230} = 0.46$

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
súlyok	0.1	0.4	0.3	0.2
Toyota	0.46	0.61	0.54	0.53
Honda	0.53	0.48	0.48	0.46
Ford	0.59	0.41	0.48	0.59
Mazda	0.40	0.48	0.48	0.40

Ezt követően a megfelelő súllyal súlyozunk minden értéket és megkapjuk a **V** mátrixot:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.046	0.244	0.162	0.106
Honda	0.053	0.192	0.144	0.092
Ford	0.059	0.164	0.144	0.118
Mazda	0.040	0.192	0.144	0.080

Megállapítjuk a lehető legjobb megoldást, azaz megkeressük a legjobb értékeket, **A⁺** tehát a (0.059, 0.244, 0.162, 0.080) vektor lesz:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.046	0.244	0.162	0.106
Honda	0.053	0.192	0.144	0.092

Ford	0.059	0.164	0.144	0.118
Mazda	0.040	0.192	0.144	0.080

Kiszámoljuk a legjobb megoldástól vett távolságokat:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	$(0.046-0.059)^2$	$(0.244-0.244)^2$	$(0.162-0.162)^2$	$(0.106-0.080)^2$
Honda	$(0.053-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.092-0.080)^2$
Ford	$(0.059-0.059)^2$	$(0.164-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.118-0.080)^2$
Mazda	$(0.040-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.080-0.080)^2$

Kiszámolva az előző táblázat értékeit a következőt kapjuk:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.000169	0	0	0.000676
Honda	0.000036	0.002704	0.000324	0.000144
Ford	0	0.0064	0.000324	0.001444
Mazda	0.000361	0.002704	0.000324	0

Ebből már könnyen számolható (a soronkénti összegek négyzetgyöke) a legjobbtól vett távolság, azaz S_i^+ :

	legjobbtól vett távolság
Toyota	0.029
Honda	0.057
Ford	0.090
Mazda	0.058

Most térjünk vissza a normalizált táblázathoz és keressük meg $\mathbf{A}^+$ értékét, ami a következő vektor lesz: (0.040, 0.164, 0.144, 0.118):

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.046	0.244	0.162	0.106
Honda	0.053	0.192	0.144	0.092
Ford	0.059	0.164	0.144	0.118
Mazda	0.040	0.192	0.144	0.080

Ezután, ahogy a legjobb esetén is tettük, kiszámoljuk a távolságokat:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	$(0.046-0.040)^2$	$(0.244-0.164)^2$	$(0.162-0.144)^2$	$(0.106-0.118)^2$
Honda	$(0.053-0.040)^2$	$(0.192-0.164)^2$	$(0.144-0.144)^2$	$(0.092-0.118)^2$
Ford	$(0.059-0.040)^2$	$(0.164-0.164)^2$	$(0.144-0.144)^2$	$(0.118-0.118)^2$
Mazda	$(0.040-0.040)^2$	$(0.192-0.164)^2$	$(0.144-0.144)^2$	$(0.080-0.118)^2$

Végrehajtva az előző táblázat műveleteit ezt kapjuk:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.000036	0.0064	0.000324	0.000144
Honda	0.000169	0.000784	0	0.000676
Ford	0.000361	0	0	0
Mazda	0	0.000784	0	0.001444

A sorok összegének a négyzetgyökét véve megkapjuk az S_i^- értékeket:

	legrosszabbtól vett távolság
Toyota	0.083
Honda	0.040
Ford	0.019
Mazda	0.047

Nem maradt más hátra, mint a C_i^* értékeket kiszámolni:

	S_i^+	S_i^-	C_i^*
Toyota	0.029	0.083	0.74
Honda	0.057	0.040	0.41
Ford	0.090	0.019	0.17
Mazda	0.058	0.047	0.45

C_i^* alapján könnyen látható, hogy az alternatívák sorrendje a TOPSIS eljárás végrehajtása után a következő:

- Toyota
- Mazda
- Honda
- Ford

Példa alternatívák változására

Vegyük az előző példát úgy, hogy rájöttünk, hogy Mazdát semmiféleképpen nem akarunk venni, ezért kihúzzuk az alternatívák közül, a táblázatunk tehát így néz ki:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
súlyok	0.1	0.4	0.3	0.2
Toyota	7	9	9	8
Honda	8	7	8	7
Ford	9	6	8	9

Normalizálás és súlyozás után a következő táblázatot kapjuk:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.050	0.279	0.186	0.114
Honda	0.057	0.217	0.166	0.100
Ford	0.064	0.186	0.166	0.129

A legjobb megoldástól ($A^+ = (0.064, 0.279, 0.186, 0.100)$) vett távolságokat kiszámolva ezt kapjuk:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0.000196	0	0	0.000196
Honda	0.000049	0.003844	0.0004	0
Ford	0	0.008649	0.0004	0.000841

Az S_i^+ értéke tehát:

	legjobbtól vett távolság
Toyota	0.019
Honda	0.065
Ford	0.099

A legrosszabb megoldástól ($A^- = (0.050, 0.186, 0.166, 0.129)$) vett távolságokat kiszámolva ezt kapjuk:

	kinézet	megbízhatóság	környezetkímélés	ár
Toyota	0	0.008649	0.0004	0.000225
Honda	0.000049	0.000961	0	0.000841
Ford	0.000196	0	0	0

Az S_i^- értéke tehát:

	legrosszabbtól vett távolság
Toyota	0.096
Honda	0.043
Ford	0.014

Mostmár könnyen számolható a C_i^* értéke:

	S_i^+	S_i^-	C_i^*
Toyota	0.019	0.096	0.83
Honda	0.065	0.043	0.40
Ford	0.099	0.014	0.12

C_i^* alapján könnyen látható, hogy az alternatívák sorrendje ugyan nem változott, viszont csak annak hatására, hogy a Mazdát kivettük az alternatívák közül, a Toyota még jobb választás számunkra:

7. Toyota
8. Honda
9. Ford

- **Conjoint measurement véges attribútumokon, általános dekompozíciók, és a 2x2-es játszma négy archetípusa - Antal Gábor**

Conjoint measurement

A Conjoint measurement problémaköre a többtényezős döntések elméletében a preferencia relációk és az additív értékelő függvények kapcsolatával foglalkozik. A témakör alapfeladatai közé tartoznak a következő problémák:

- Adott preferencia relációhoz létezik-e olyan additív értékelő függvény, amely őt „reprezentálja”?
- Ha létezik alkalmas additív értékelő függvény, akkor hogyan állítható elő?

Tekintsük az alapfogalmak és feladatok formális definícióját! Legyenek adottak $X_1, \dots, X_n$ attribútumok, illetve legyen adott egy $\succeq$ preferencia reláció az $X \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ attribútum értékekből álló vektorok halmaza felett (ezen vektorok reprezentálják az alternatívákat). A feladat olyan alkalmas v_i függvények keresése az X_i attribútumok felett ($i = 1, \dots, n$), amelyek kielégítik az alábbi, ún. additív preferencia kritériumot: $x \succeq y$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\sum_{i=1}^n v_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n v_i(y_i).$$

Tehát olyan feltételrendszert keresünk, amelyek teljesítik az alábbi egyenleteket és egyenlőtlenségeket, amelyekre a továbbiakban az additív preferencia lineáris programozási (LP) modelljeként hivatkozunk:

- Ha $x \succ y$ (szigorú preferencia), akkor $\sum_{i=1}^n v_i(x_i) > \sum_{i=1}^n v_i(y_i)$.
- Ha $x \sim y$ (indifferencia), akkor $\sum_{i=1}^n v_i(x_i) = \sum_{i=1}^n v_i(y_i)$.

A továbbiakban a Conjoint measurement-nek csak azon részterületével foglalkozunk, amely azt az esetet vizsgálja, amelyben valamely attribútum véges.

Conjoint measurement véges attribútumokon

Tegyük fel, hogy az adott $X_1, \dots, X_n$ attribútumok közül valamely X_i attribútum véges halmaz

(pl. nominális vagy ordinális skála felett értelmezett attribútum). Ebben az esetben nem elegendő a kölcsönös preferencia-függetlenség (illetve kéttényezős döntések esetében a kiegészítő Thomsen-feltétel) az additív preferencia függvény létezésére, illetve nem alkalmazható a „sűrű” attribútumok felett használt, preferencia-intervallumok mérésén alapuló technika az additív preferencia struktúra előállítására. Ezáltal más megközelítésekre és technikákra lesz szükség a feladat megoldásához. A továbbiakban bevezetünk néhány fogalmat, amely alkalmas reprezentációt ad az additív preferencia struktúra létezésére véges esetben.

Definíció: (E^m reláció)

Legyen $m \geq 2$, valamint $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m \in X$ alternatívák. Azt mondjuk, hogy

$$(x^1, \dots, x^m) E^m (y^1, \dots, y^m),$$

ha minden $i \in \{1, \dots, m\}$ -re az $(x_i^1, \dots, x_i^m)$ vektor egy permutációja az $(y_i^1, \dots, y_i^m)$ vektornak.

Tehát az E^m reláció két m elemű alternatíva vektor között definiál attribútumonkénti permutációs összefüggést. Erre alapozva definiálható az alábbi, ún. C^m feltétel, amellyel jól jellemezhetők az additív struktúrával rendelkező preferencia relációk véges attribútumok felett.

Definíció: (C^m feltétel)

Legyen $m \geq 2$. Azt mondjuk, hogy egy $\succsim$ preferencia relációra fennáll a C^m feltétel, ha

$$[x^j \succsim y^j, j = 1, \dots, m-1 \text{ esetén}] \Rightarrow \neg[x^m \succ y^m]$$

minden $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^m \in X$ alternatívára, amelyre $(x^1, \dots, x^m) E^m (y^1, \dots, y^m)$.

A C^m feltétel a preferencia-függetlenségnél általánosabb feltételt definiál. Belátható, hogy a C^m feltételre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- Ha a $\succsim$ relációra fennáll a C^{m+1} feltétel, akkor a C^m feltétel is fennáll.
- Ha a $\succsim$ relációra fennáll a C^2 feltétel, akkor $\succsim$ preferencia-független.
- Ha a $\succsim$ relációra fennáll a C^3 feltétel, akkor $\succsim$ tranzitív.

Az előbbi fogalmak ismeretében kimondhatjuk az alábbi szükséges és elégséges feltételt az additív preferencia struktúra létezésére véges attribútumok felett.

Tétel: (Szükséges és elégséges feltétel az additív preferencia struktúra létezésére véges esetben)

Legyen $\succsim$ egy reláció az $X \subseteq X_1 \times \dots \times X_n$ véges halmaz felett. Akkor és csak akkor léteznek alkalmas v_i függvények az X_i halmazok felett ($i = 1, \dots, n$), amelyek teljesítik az additív preferencia kritériumot, ha $\succsim$ teljes (azaz minden $x, y \in X$ esetén $x \succsim y$ vagy $y \succsim x$ teljesül);

más néven: dichotóm reláció), és teljesül rá a C^m feltétel minden $m = 2, 3, \dots$ esetén.

A továbbiakban áttekintjük, hogy ha egy $\succeq$ reláció esetén a vizsgálatok már kimutatták, hogy létezik alkalmas additív preferencia struktúra, akkor milyen módszerek segítségével állítható elő egy alkalmas additív preferencia függvény, amely a $\succeq$ relációt reprezentálja.

Additív preferencia modellek előállítása

A Conjoint measurement alapfeladatainak áttekintésénél már láttuk, hogy az additív preferencia függvény definiálható egy LP modell segítségével, amely a preferencia függvény monotonitási feltételeit adja meg alkalmas lineáris egyenletek (indifferencia esetén) és egyenlőtlenségek (szigorú preferencia esetén) segítségével. Ezen feltételek néhány peremfeltétellel történő kiegészítése alkalmas modellt eredményez az additív preferencia függvény előállításához.

Tegyük fel minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, hogy létezik egy legkevésbé preferált x_{i*} és egy legjobban preferált x_i^* érték (tehát minden alternatívára létezik minimálisan és maximálisan preferált attribútum érték). Alkalmas normalizálás esetén feltehető, hogy teljesülnek ezen peremértékekre az alábbi peremfeltételek:

- $v_1(x_{1*}) = \dots = v_n(x_{n*}) = 0$, és
- $\sum_{i=1}^n v_i(x_i^*) = 1$.

Az additív preferencia LP modellje és a fenti lineáris peremfeltételek olyan lineáris programozási modellt eredményeznek, amely segítségével egy $\succeq$ additív preferencia struktúrájú relációra meghatározható a hozzá tartozó additív preferencia függvény. Az előbb definiált modellen alapuló döntéstámogató módszerek alapvetően a következő lépéseket alkalmazzák a megfelelő additív függvény előállítására:

1. Információk bekérése a döntéshozótól néhány X -beli alternatíva pár közötti szigorú preferenciára vagy indifferenciára vonatkozóan.
2. A döntéshozótól kapott információk átalakítása LP feladattá a korábban definiált LP modell szerint.
3. A kapott LP feladat megoldása.

Természetesen előfordulhat, hogy a döntéshozótól kapott információk birtokában nem konstruálható olyan additív preferencia függvény, amely eleget tesz a döntéshozótól kapott kiindulási preferenciáknak, tehát az előállított LP feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ebben az esetben az additív preferencia függvény keresése az LP modell mentén egy

korlátozás kielégítési feladatként is tekinthető: olyan additív függvényt keresünk, amely a döntéshozótól kapott feltételek közül a lehető legkevesebbet sérti meg. Inkonzisztens kiindulási preferencia információk esetén javítás kérhető a döntéshozótól.

A továbbiakban áttekintünk néhány döntéstámogató módszert, amely az előbb definiált LP modellen alapul.

UTA módszer

Az UTA (UTilité Additive) módszer az előzőekben definiált LP modelltől némileg eltérő konstrukciót alkalmaz. Az eljárás a döntéshozótól kapott információkból a következő modellt konstruálja ($x, y \in Ref$, ahol $Ref \subset X$ a döntéshozó által ismert alternatívák halmaza):

- Ha $x \succ y$, akkor $v(x) - v(y) + \sigma_x^+ - \sigma_x^- + \sigma_y^+ - \sigma_y^- > \varepsilon$, ahol $\sigma_x^+, \sigma_x^-, \sigma_y^+, \sigma_y^- \geq 0$ és $\varepsilon > 0$.
- Ha $x \sim y$, akkor $v(x) - v(y) + \sigma_x^+ - \sigma_x^- + \sigma_y^+ - \sigma_y^- = 0$, ahol $\sigma_x^+, \sigma_x^-, \sigma_y^+, \sigma_y^- \geq 0$.

A fenti modellben az $\sigma_x^+, \sigma_x^-, \sigma_y^+, \sigma_y^-$ változók eltéréseket (illetve szórásokat) jelző változók. A modell célfüggvénye ezen változók összegének minimalizálására irányul:

$$Z = \sum_{x \in Ref} \sigma_x^+ + \sigma_x^-$$

Ha e célfüggvény mellett az optimális célfüggvényérték:

- $Z = 0$, akkor végtelen sok additív értékelő függvény létezik, amely kielégíti a kiindulási preferenciákat. Az LP feladat optimális megoldása egy ilyen függvényt ad.
- $Z > 0$, akkor nem létezik a kiindulási preferenciákat kielégítő additív értékelő függvény.

MACBETH módszer

A MACBETH döntéstámogató módszer a következő LP modell segítségével keresi a megfelelő additív preferencia függvényt:

- Ha $x \succsim y$, akkor $\sum_{i=1}^n k_i u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^n k_i u_i(y_i)$,
- $u_1(x_{1*}) = \dots = u_n(x_{n*}) = 0$,
- $u_1(x_1^*) = \dots = u_n(x_n^*) = 1$,
- $\sum_{i=1}^n k_i = 1$.

Az eljárás a kiindulási preferenciákon kívül megkérdezi a döntéshozótól a preferenciák által generált különbségek nagyságrendjét (erősségét) is. Ezeket a különbségi nagyságrendeket három előre definiált szemantikus különbségi kategóriába sorolja:

- C1: gyenge különbség
- C2: erős különbség
- C3: extrém különbség

A három kategória felett rendezés definiálható, amely újabb egyenlőtlenség feltételekkel egészíti ki a fenti LP modellt. Ezen bővített LP modell megoldásával kerül meghatározásra a megfelelő additív értékelő függvény.

Tranzitív felbonthatóság

Az additív felbonthatóság egyik fontos általánosításaként tekinthető a tranzitív felbonthatóság fogalma. Ezen felbonthatósági tulajdonságra szintén létezik bizonyított szükséges és elégséges feltétel.

Definíció: (Tranzitív felbonthatóság)

Legyen $\succeq$ egy reláció az $X = X_1 \times \dots \times X_n$ halmazon. A $\succeq$ reláció tranzitívan felbontható, ha minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén létezik v_i függvény az X_i halmazok felett és egy g valós függvény $v_1(x_1) \times \dots \times v_n(x_n)$ felett, amely minden argumentumán monoton növekvő, azaz minden $x, y \in X$ esetén $x \succeq y$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$g(v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)) \geq g(v_1(y_1), \dots, v_n(y_n)).$$

Tétel: (Szükséges és elégséges feltétel a tranzitív felbonthatóságra)

A $\succeq$ preferencia reláció egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazon akkor és csak akkor tranzitívan felbontható, ha $\succeq$ egy gyengén független (azaz minden egyelemű attribútum halmazra nézve független) gyenge rendezés.

Általános dekompozíciók

A továbbiakban áttekintjük az általános dekompozíció fogalmát, néhány hozzá kapcsolódó definíciót, illetve az additív felbonthatóság egyik további fontos általánosítását, a kvázi additív felbonthatóságot.

Definíció: (Dekompozíció)

Egy preferencia struktúra akkor és csak akkor dekomponálható, ha léteznek az $X_1, \dots, X_n$ halmazokon értelmezett $v_1, \dots, v_n$ valós függvények és az X halmazon értelmezett v függvény úgy, hogy bármely $x, y \in X$ esetén $x \succeq y$ akkor és csak akkor teljesül, ha

$$v[v_1(x_1), \dots, v_n(x_n)] \geq v[v_1(y_1), \dots, v_n(y_n)].$$

Definíció: (Mérhetőség)

Egy X halmazon értelmezett v értékelő függvény akkor és csak akkor mérhető, ha v pontosan

tükrözi az X -beli elemek sorrendjét és az elemek különbségeinek sorrendjét.

A továbbiakban jelölje $\bullet$ az X halmaz elemeire vonatkozó differencia képzés műveletét, és $\succeq^*$ a megfelelő preferencia-rendezést az X halmaz elempárjaira úgy, hogy minden $x, y, z, w \in X$ esetén a $w \bullet x$ differencia akkor és csak akkor preferált az $y \bullet z$ differenciához képest, ha $w \bullet x \succeq^* y \bullet z$ teljesül. Mérhető v értékelő függvényre $w \bullet x \succeq^* y \bullet z$ akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll, hogy $v(w) - v(x) \geq v(y) - v(z)$.

A következő definíció a preferencia függetlenség egyik elégséges feltétele, és az előbb definiált differencia modellen alapul.

Definíció: (Gyenge-differencia függetlenség)

A C attribútum részhalmazt akkor nevezzük a C^* komplementer halmaztól gyenge-differencia függetlennek, ha bármely $w_C, x_C, y_C, z_C \in X_C$ esetén, ha

$$(w_C, w'_C) \bullet (x_C, w'_C) \succeq^* (y_C, w'_C) \bullet (z_C, w'_C)$$

teljesül valamely $w'_C \in X_{C^*}$ elemre, akkor

$$(w_C, w_{C^*}) \bullet (x_C, w_{C^*}) \succeq^* (y_C, w_{C^*}) \bullet (z_C, w_{C^*})$$

teljesül minden $w_{C^*} \in X_{C^*}$ elemre.

A gyenge-differencia függetlenségből tehát következik a preferencia függetlenség. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy ha egy mérhető értékelő függvény teljesíti a gyenge-differencia függetlenséget, akkor multiplikatív értékelő függvény lesz. Végül mondjuk ki a kvázi additivitás definícióját, valamint szükséges és elégséges feltételét az alábbi tételben.

Tétel: (Kvázi additivitási tétel)

Tegyük fel, hogy létezik egy v mérhető értékelő függvény az X halmazon. Feltehető, hogy v normalizált, azaz létezik a legkevésbé preferált x^0 és a legjobban preferált x^* úgy, hogy $v(x^0) = 0$ és $v(x^*) = 1$. Ha az X_i attribútum gyenge-differencia független a komplementer halmazától minden $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor léteznek az X_i halmazokon értelmezett olyan v_i ún. feltételes értékelő függvények, amelyekre minden $x \in X$ esetén

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \lambda_{ij} v_i(x_i) v_j(x_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k>j}^n \lambda_{ijk} v_i(x_i) v_j(x_j) v_k(x_k) + \dots$$

$$\dots + \lambda_{12\dots n} v_1(x_1) v_2(x_2) \dots v_n(x_n)$$

ahol $v_i(x_i^0) = 0$ és $v_i(x_i^*) = 1$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Jól látható, hogy ha az előző tételben minden $\lambda_{ij} = \lambda_{ijk} = \dots = \lambda_{12\dots n} = 0$, akkor az additív felbonthatóságot kapjuk speciális esetként.

A 2x2-es játszma négy archetípusa

A dokumentum hátralévő részében a 2x2-es játszma elemzésével foglalkozunk. Vegyünk két játékost, amelyeket a „Sor” és „Oszlop” nevekkkel látjuk el. Tekintsük az alábbi játékmátrixot, amelyben a sorokban lévő stratégiák (A_1 , B_1) a Sor játékos stratégiái, illetve az oszlopokban található stratégiák (A_2 , B_2) az Oszlop játékos stratégiái. A mátrix celláiban található a játszma nyereményei az egyes kimenetekre: az első érték jelzi a Sor játékos nyereményét, míg a második érték mutatja az Oszlop játékos nyereményét.

	A_2	B_2
A_1	x_1, x_2	y_1, y_2
B_1	z_1, z_2	w_1, w_2

Két adott 2x2-es játszmát egyenértékűnek tekintünk, ha:

- az egyik játszmából pozitív lineáris transzformációval megkapható a másik játszma ($x' = ax + b$ minden hasznosságra, $a > 0$),
- az egyik játszmából pozitív monoton transzformációval megkapható a másik játszma,
- az egyik játszmából a sorok és oszlopok felcserélésével megkapható a másik játszma.

Ezen egyenértékűségi feltételek mellett 78 nem egyenértékű 2x2-es játszma létezik. Ebből 12 játszma szimmetrikus, azaz mindkét játékos számára egyformának látszik (a két játékos felcserélésével a játszma lényegében nem változik). A 12 szimmetrikus játszmából 6 ún. konfliktusmentes játszma, amely arra utal, hogy mindkét játékosnak a legnagyobb nyereményt hozó stratégiát kell választania. Ezen felül az alábbi két játszmában mindkét játékosnak van domináns stratégiája, de ezzel csak a második legnagyobb nyereményt nyerhetik meg.

	A_2	B_2
A_1	1, 1	2, -1
B_1	-1, 2	-2, -2

B_1	-2, 2	-1, -1
-------	-------	--------

	A_2	B_2
A_1	1, 1	2, -2

A fennmaradó négy játszma arra motiválja a játékosokat, hogy elmozduljanak a természetes minimax kimeneteltől a nagyobb nyereség reményében. A továbbiakban ezen játszmákat tekintjük át.

A „kizsákmányoló”

A „kizsákmányoló” nevezett játszmában, ha az egyik játékos eltér a természetes kimeneteltől, de a másik játékos nem, akkor az eltérő játékos jutalmazza magát, a másikat pedig bünteti. Ha mindkét játékos eltér, akkor mindketten bűnhődnek. A játszmát az alábbi játékmátrix mutatja.

	A ₂	B ₂
A ₁	1, 1	-1, 2
B ₁	2, -1	-2, -2

A „vezér”

Az alábbi „vezér” nevezett játszmában, ha az egyik játékos eltér, de a másik játékos nem, akkor az eltérő játékos magát és a másik játékost is jutalmazza, de magát nagyobb mértékben. Ha mindkét játékos eltér, akkor mindketten bűnhődnek.

	A ₂	B ₂
A ₁	-1, -1	1, 2
B ₁	2, 1	-2, -2

A „hős”

Az alábbi játékmátrixban látható „hősnek” nevezett játszmában, ha az egyik játékos eltér, de a másik játékos nem, akkor az eltérő játékos magát és a másik játékost is jutalmazza, de a másik játékost nagyobb mértékben. Ha mindkét játékos eltér, akkor mindketten bűnhődnek.

	A ₂	B ₂
A ₁	-1, -1	2, 1
B ₁	1, 2	-2, -2

A „mártír”

Végül a „mártírnak” nevezett játszmában egyik játékos sem motivált arra, hogy eltérjen a természetes kimeneteltől. Ha az egyik játékos eltérne, akkor a másik játékost jutalmazná, és

önmagát büntetné. De ha mindkét játékos eltér, akkor mindketten nyernek. Ezt a játszmát más néven „fogolydilemma-játszmának” is nevezik.

	A_2	B_2
A_1	-1, -1	2, -2
B_1	-2, 2	1, 1

Irodalomjegyzék

1. Denis Bouyssoum, Marc Pirlot: Conjoint measurement tools for MCDM – A brief introduction
2. Temesi József: A döntéselmélet alapjai
3. Anatol Rapoport: A kizsákmányoló, a vezér, a hős és a mártír: A 2x2-es játszma négy archetípusa

• MYCIN – Egy klinikai döntéstámogató rendszer – Aulik Ákos

Mit értünk szakértői rendszer alatt?

Lényegében egy számítástechnikai rendszer, amely mesterségesen próbálja rekonstruálni az emberi szakértő döntéshozó képességét. Fejlesztésük célja, hogy komplex problémákat oldjanak meg, továbbá a hozott döntéseiket és a meghozatal folyamatát el is tudják magyarázni. Nincs pszichológiai modell arra, ahogy a szakértő gondolkodik, de a kifejlesztett rendszer valamilyen módon reprezentálja az ő gondolkodását.

Ha összehasonlítjuk az emberi szakértőt és a szakértői rendszert, megállapíthatjuk, hogy amíg az emberi szakértő képessége valamint tudása idő előrehaladtával változik, továbbá felkészítése hosszú és költséges folyamat, és nem utolsósorban a döntéshozatalát sok, külső tényező befolyásolhatja, addig a szakértői rendszer tudása állandó jellegű, továbbfejlesztése drága, de sorozatgyártása, használata valamint karbantartása olcsó és mindemellett állandó és megismételhető eredményt biztosít.

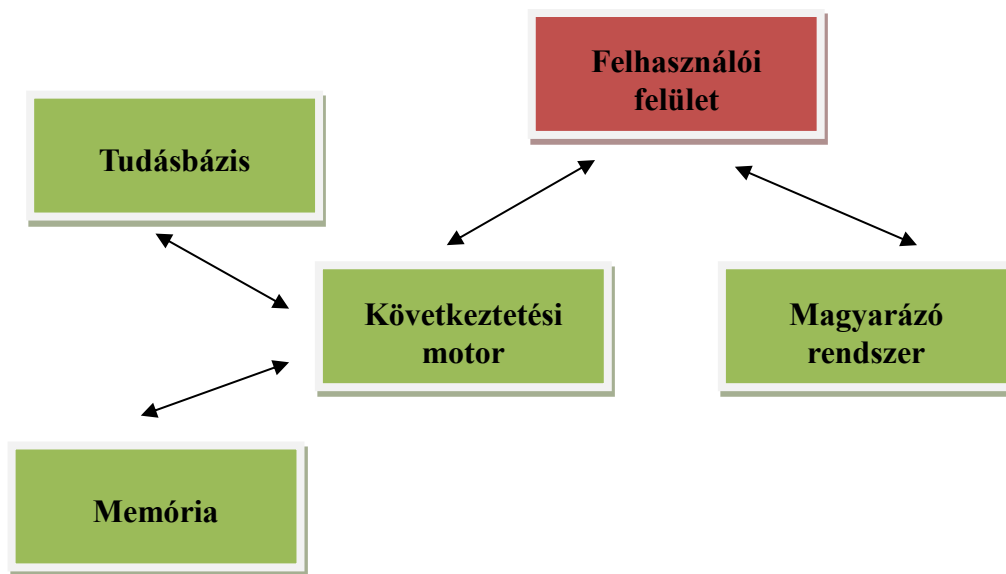
A szakértői rendszereknek azonban hátrányokkal is rendelkeznek: csak meghatározott, szűk területen, speciális problémák megoldására alkalmassak, nem tudnak józan ésszel „gondolkodni” mivel nincs a tudatuk, ismeretszerzésük bonyolult folyamat valamint fejlesztésük akár évekig is tarthat.

A szakértői rendszereknél két típust különböztetünk meg:

- döntéstámogató- és
- döntéshozó rendszereket.

A döntéstámogató rendszerek figyelmeztetik az emberi szakértőt a meggondolandó következményekre és alternatívákra, amelyek esetleg elkerülték a figyelmét a döntéshozatal során. Az orvostudományban használt szakértői rendszerek, amelyek diagnózis felállításában segítenek, tipikus példa az erre típusra.

A döntéshozó szakértői rendszerek segítséget nyújtanak az adott problématerületen kevésbé jártas felhasználóknak a megoldás megtalálásában.



1. ábra Egy szakértői rendszer felépítése

2. Klinikai döntéstámogató rendszerek

Klinikai döntéstámogató rendszer (Clinical Decision Support System – CDSS) egy interaktív alkalmazás, amely azért jött létre, hogy az orvosok és más egészségügyi szakemberek döntéshozatalát segítse például a beteg diagnosztizálásának végzésekor.

Aktív tudásalapú rendszerként lett megalkotva, amely kettő vagy több részét felhasználja a beteg adatainak annak érdekében, hogy egy eset specifikus tanácsot adjon.

A fő célja a modern klinikai döntéstámogató rendszereknek, hogy segítséget nyújtson az orvosoknak ott ahol szükség van rájuk. Ez azt jelenti, hogy az orvosok segítségül hívnák a rendszert a diagnózisok felállításánál, a leletek vizsgálatánál stb. Az új módszertan szerint egyszerre hasznosítva az orvosok tudását és az alkalmazás eredményeit pontosabb vizsgálatot tudunk elvégezni a beteg adatain. A rendszer a kimeneteivel javaslatokat ad az orvosnak, aki kiveszi belőlük a fontos információkat és figyelmen kívül hagyja az esetleges hibákat.

Két formája van a klinikai döntéstámogató rendszereknek:

- Tudásalapú
- Nem tudásalapú

Tudásalapú rendszerek sajátosságai - A legtöbb ilyen rendszer három részből áll: tudásbázis, következtetési- és kommunikációs mechanizmus. A tudásbázis tartalmazza az adathalmaz szabályait és asszociációit, amelyek legtöbbször *IF-THEN* alakú szabályok. Ha egy gyógyszerkölcsonhatásokat vizsgáló rendszerről beszélünk, akkor egy szabály úgy nézne ki,

hogy *HA X* gyógyszert bevettük *ÉS Y* gyógyszert bevettük *AKKOR* riassza a felhasználót. A következtetési mechanizmus összehasonlítja a tudásbázis szabályait a beteg adataival. A rendszer kommunikációs oldala pedig közli az eredményt illetve lehetővé teszi a felhasználónak az adatok bevitelét.

Nem tudásalapú rendszerek sajátosságai - Ez egy olyan rendszer, amely nem tudásbázist használ, hanem a mesterséges intelligenciának egy formáját, amelyet gépi tanulásnak nevezünk. Ez lehetővé teszi, hogy a számítógép tanuljon a múlt tapasztalataiból vagy bizonyos mintákat találjon a klinikai adatokban. A tanulás formáját tekintve két fajtát különböztetünk meg:

- Neurális hálók,
- Genetikus algoritmusok.

A következő módszertanokat alkalmazhatják a klinikai döntéstámogató rendszerek:

- Bayes-hálózat – egy tudásalapú grafikus ábrázolás, amely bemutat egy csoport változót és a valószínűségi kapcsolatukat betegségek és a tünetek között.
- Neurális hálók – nem tudásalapú adaptív támogató rendszer, ami a mesterséges intelligencia segítségével tanulni képes a múlt tapasztalataiból vagy bizonyos mintákat talál a klinikai adatokban.
- Genetikus algoritmusok - működésük során egyrészt új egyedeket hoznak létre a rekombináció és a mutáció eljárások segítségével, másrészt kiszűrik a rosszabb fitness függvény értékkel rendelkező egyedeket és eltávolítják azokat a populációból.
- Szabályalapú rendszer – Megpróbálja összegyűjteni és átalakítani a terület szakértőinek tudását kifejezéseké, amelyeket végül szabályokként tudunk kiértékelni. Pl. Ha a betegnek nagy a vérnyomása stroke-ot kaphat.
- Logikai állapot – adva van egy változó és egy határ, megnézzük, hogy az adott változó a meghatározott határon belül vagy kívül van és az eredményhez mérten cselekszünk.

MYCIN - A probléma

Roberts & Visconti 1972-ben végzett kutatása alapján a következő tényeket állapították meg:

- A betegeknek csak 13%-a kap racionális kezelést,
- 66%-uk irracionális kezelésben részesül,
- 21%-uknak megkérdőjelezhető a kezelése.

Irracionalitás alatt itt pl. a nem megfelelő gyógyszer adagolást értjük: túl sok, túl kevés vagy hibás gyógyszer.

A klinikai betegellátásban nagy szükség van arra, hogy súlyosan fertőzött betegek részére

gyorsan és megfelelő antibiotikumot válasszunk ki. Orvosi döntéshozatalban egy rendszerezett tudás utáni igény lép fel, amelyet a mindennapokban is tudnának használni az orvosok. Ilyen és ehhez hasonló igényeket kielégítő rendszernek a következő paraméterekkel kell rendelkeznie:

- A rendszernek könnyen kezelhetőnek kell lennie.
- Nagy és változó tudásbázist kell kezelnie.
- Kommunikációt kell folytatnia emberi felhasználókkal.
- Döntéseit bizonyos időn belül kell meghoznia.
- Hiányos vagy bizonytalan információk feldolgozása sem szabad, hogy gondot jelentsen.

Egy ilyen tulajdonságokkal bíró rendszer az alábbi működési komponensekkel kell, hogy rendelkezzen:

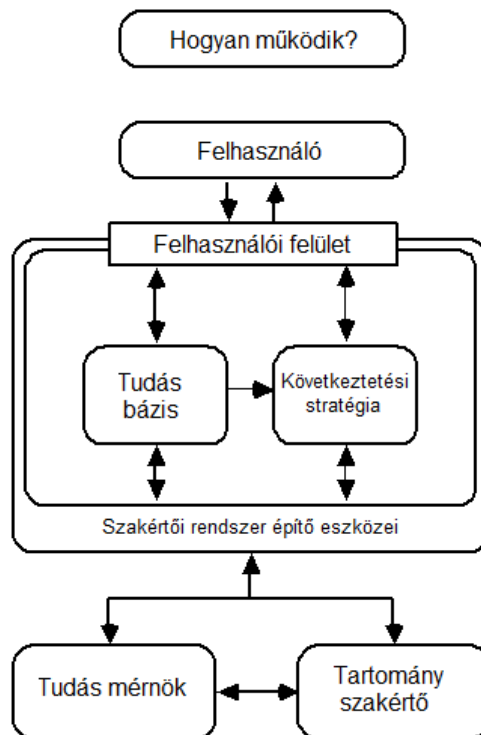
- Konzultációs rendszer, ezen belül:
 - Kérdések feltevése a felhasználónak, amelyekkel a szükséges adatokat kéri be.
 - Következtések levonása, amelyeket a bekért adatokon elvégzett műveletek után tud levonni.
 - Tanácsok adása, a felhasználót tanácsokkal ellátni a beteg kezelésével kapcsolatban.
- Magyarázó rendszer:
 - A szabályok mondattá alakítása, a rendszer által alkalmazott megfelelő formában levő szabályok mondatba foglalása, a felhasználó számára érthető formában való közlése.
- Szabályok beviteli/módosítási rendszere:
 - Lehetőséget kell biztosítani arra, hogy a megfelelő személyek (orvosok, szakértők stb.) új szabályokat tudjon bevinni illetve meglévőket módosítani.

3.1 A MYCIN döntéstámogató rendszer

A Stanford Egyetemen fejlesztették ki az 1970-es években. Az első programok között volt, amely a problémákra adott megoldást meg is tudta indokolni, mindezt hiányos és bizonytalan információk mellett.

A MYCIN egy tiszta és logikus magyarázattal szolgált az érveléséhez. Sok mai szakértői rendszer kifejlesztése köszönhető neki.

A következő ábra röviden bemutatja a MYCIN működését:



2. ábra A MYCIN működése

3.2 Szabályok bemutatása

Definiálásuk formális nyelven íródott. A szabályokat Backus-Naur (BNF) formában tudjuk kifejezni, ez egy környezet független nyelvforma, amelyet széles körben használnak programozási nyelvek definiálására. A kulcsszavakat nagy betűvel írjuk (pl. *IF*, *THEN*, *AND*, *OR* stb.) és termináloknak tekintjük őket a BNF syntaxisában, a nemterminálisokat < jelek > közé rakjuk, ha a nemterminális alak után ::= jelet írunk, akkor az helyettesíthető a jobb oldallal.

< rule > ::= < IF(premise THEN < action > [ELSE < action >])

OR

< rule > ::= < premise > < action > | < premise > < action > < else >

Egy szabály előfeltétele (premise) több feltétel összefüggéséből áll, melyek mindegyikének teljesülnie kell, hogy az általuk meghatározott akció végrehajtsódjon. Az akció (action) rávezethet egy következtetésre, vagy meghívhat egy akció-függvényt illetve több következtetést végrehajthat.

< action > ::= (< conclusion >) | (< actfunc >) |
(DO ALL < conclusion >< conclusion >) |
(DO ALL < actfunc >....< actfunc >)

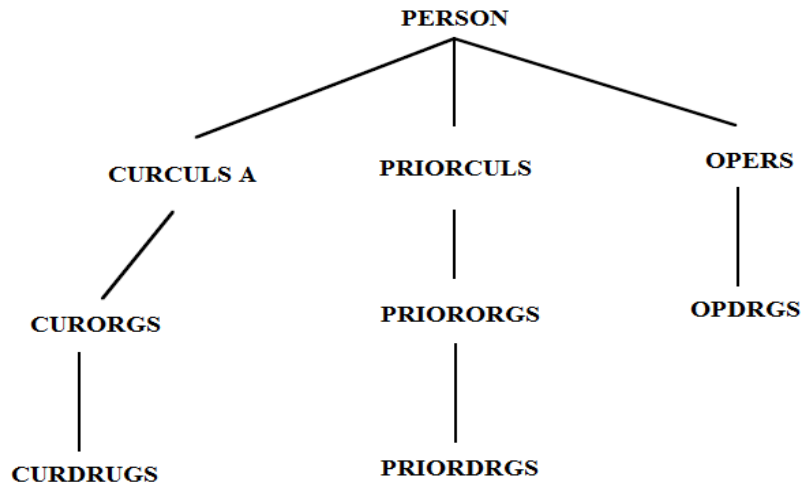
Egy feltétel (condition) lehet:

- egy feltétel csoportnak a tagja
- egy speciális függvény és annak argumentuma

$$\begin{aligned} < condition > ::= (\$OR < condition > \dots < condition >) | \\ & (< special - func > < arguments >) | \\ & (< func1 > < context > < parameter >) | \\ & (< func2 > < context > < parameter > < value >) \end{aligned}$$

Kontextus fa - A MYCIN döntését nem csak a beteg állapota határozza meg, hanem a kitenyésztett kultúrák, az izolált organizmusok és a kezeléskor adott gyógyszerek is. Ezen kontextusok mindegyike összefügg a MYCIN érvelésével. Kilenc különböző kontextus létezik:

- Páciens:
 - PERSON – A kezelendő beteg.
- Kultúrák:
 - CURCULS A – A jelenlegi kultúra, amelyből az organizmust izolálták.
 - PRIORCULS – Egy a múltban kitenyésztett kultúra.
- Organizmusok:
 - CURORGS – Egy organizmus, amelyet a jelenlegi kultúrából tenyésztettek ki.
 - PRIORORGS – Egy organizmus, amelyet egy előző kultúrából nyertek.
- Operációk:
 - OPERS – Operáció, amelyen a beteg átesett.
- Gyógyszerek (antimikrobiális szerek):
 - CURDRUGS – Azon gyógyszerek, amelyeket jelenleg szed a beteg.
 - PRIORDRGS – Azon gyógyszerek, amelyeket a múltban szedett.
 - OPDRGS – Azon gyógyszerek, amelyeket a beteg az operáció alatt szedett.



3. ábra Kontextus fa

3.3 Hogyan is működik a MYCIN?

A következő fő lépéseket végzi el a rendszer egy beteg adatainak vizsgálatakor:

1. A beteg kontextus fájának a legyártása.
2. Jelen van olyan organizmus, amelyre terápiát kell alkalmazni?
3. Kiválasztani a potenciálisan hatékony és legjobb gyógyszert!

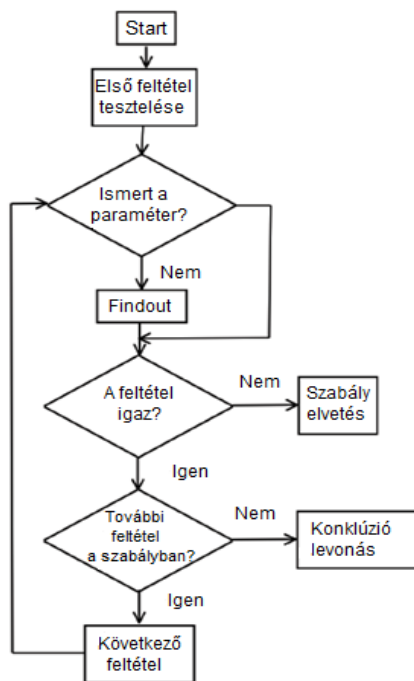
A fent említett módszer egy célorientált, visszafelé láncolási megközelítés a szabálymeghívásra és kérdés kiválasztásra. A MYCIN a kikérdezést és a kiválasztást a következő két eljárás segítségével végzi el:

- MONITOR
- FINDOUT

Ezeket az eljárásokat a MYCIN fejlesztőcsapata hozta létre, nézzük meg a működésüket egyenként.

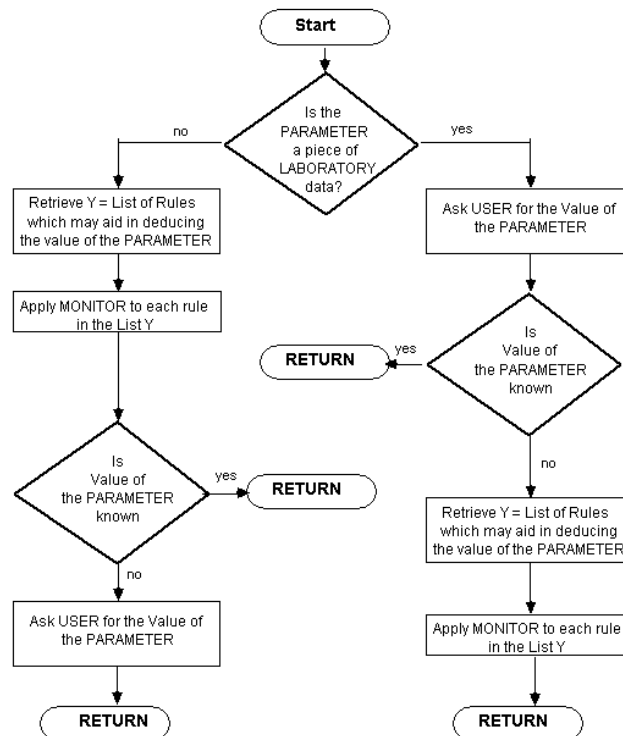
MONITOR - Kísérletet tesz arra, hogy meghatározza a szabály előfeltételét, feltételről-feltételre haladva. Amennyiben bármelyik feltétel hamisnak bizonyul, vagy bizonytalannak az információ hiánya miatt a szabályt figyelmen kívül hagyjuk és a listában következő használhatónak vélt szabályt próbáljuk. A szabályt akkor tudjuk sikeresen alkalmazni, amikor az összes előfeltétel igaznak bizonyul, ezután a következtetése hozzá lesz adva a jelenlegi konzultációhoz.

A következő folyamatára a MONITOR működését mutatja be:



4. ábra A MONITOR eljárás folyamatábrája

FINDOUT - Ez a folyamat azon adatok után kutat, amelyekre a MONITOR eljárásnak szüksége van, legfőkébb azokat a klinikai paramétereket, amelyek az esettel kapcsolatban még nem ismertek. Lényegében a FINDOUT összegyűjti azokat az információkat, amelyekre szükségünk van ahhoz, hogy egy feltétel megfelel –e a vizsgált szabályban avagy sem. Ha a szükséges információ olyan laboratóriumi adat, amelyet a felhasználó adhat meg, akkor az irányítást visszaadja a MONITORNAK és a következő feltételt vizsgálja. Egyébként, ha létezik a szabályok egy olyan Y listája, amely segítségével le tudjuk vezetni a paraméter értékét, akkor ezen listában lévő szabályokra alkalmazzuk a MONITORT.



5. ábra A FINDOUT eljárás

Bizonyossági tényezők

A klinikai gyakorlat szerint az orvosi diagnózisban és kezelésben is mindig vannak olyan tényezők, amelyeket bizonytalanság övez, például:

- a betegség jelentősége,
- a kezelés hatékonysága,
- vagy maga a diagnózis is

A bizonyossági tényezők a megfigyelések számán alapszanak. A MYCIN-ben használt bizonyossági tényezők néhány egyszerűsítő feltételezésen alapszanak, amelyekkel bizalmi mértkékeket alakítunk ki és végül ezeket a bizalmakat kombináljuk. Ezen feltételezések kiváltják egy kapcsolattal szembeni bizalom és a bizalmatlanság fogalmának szétválását és átalakulását hit- ($MB(h/e)$) és hitetlenség ($MD(h/e)$) mértékére.

$$CF[h, e] = MB[h, e] - MD[h, e]$$

A MYCIN tárolja minden klinikai paraméter értéket, amelyekhez hozzákapcsolja a megfelelő bizonyossági tényezőt (CF). A CF egy szám -1 és $+1$ között, amely hipotézisbe vetett hit nagyságát.

Valószínűség és megerősítés

Vegyük a következő szabályt:

Ha:

- Az organizmus pecsétje grampos (01)
- A morfológiája COCCUS (02)
- A növekedése pedig láncos (03)

Akkor:

Ez arra utaló bizonyíték (0.7), hogy a vizsgált organizmus streptococcus. ($h1$)

Ez a megállapítás csak akkor lehet igaz, ha mind három feltétel (01, 02 és 03) szintén igaznak bizonyul, akkor és csak akkor állíthatjuk a hipotézisről ($h1$), hogy a feltételezett organizmus Streptococcus 70%-os bizonyossággal.

$$P(h1 \mid 01 \& 02 \& 03) = 0.7$$

A MYCIN kiértékelési eljárásába a mérnökök nem csak a szükséges szabályokat foglalták bele, hanem a szakértőktől megkérdezték azt is, hogy az adott következtetésnek mekkora a bizonyossága?!

A szakértő szerinti valószínűség $P(h)$, amely azt mutatja, hogy mennyire hisz a h hipotézisben, ennek következtében az $1 - P(h)$ -t tekinthetjük a szakértő hitetlenségének a h igazságáról.

- A hit mértéke: Ha $P[h \mid e]$ nagyobb mint $P(h)$, akkor az e növeli a szakértő hitét a h hipotézisben és egyben csökkenti a hitetlenségét is.

$$MB[h, e] = \frac{P(h \mid e) - P(h)}{1 - P(h)}$$

- A hitetlenség mértéke: Ha $P[h \mid e]$ kisebb mint $P(h)$, akkor az e növeli a szakértő hitetlenségét a h hipotézisben és egyben csökkenti a hitét is.

$$MD[h, e] = \frac{P(h) - P(h \mid e)}{P(h)}$$

A hit és hitetlenség megfelel a megerősítés és cáfolás fogalmának. Egy adott feltétel vagy bizonyíték nem támogathatja a hitet és a hitetlenséget egyszerre:

$$MB[h, e] > 0 \text{ then } MD[h, e] = 0$$

$$MD[h, e] > 0 \text{ then } MB[h, e] = 0$$

Bizonyíték kombináció séma

Az alábbiakban bemutatásra kerül a Dempster-Shafer eljárás, amely a számítás komplexitását

minimalizálja. A függvények sorrendjének egyszerűsítésével a számítási idő lineáris lesz.

1.) Meghatározzuk a megerősítő és cáfoló bizonyíték fokát az összes feltételezett organizmusra:

s_i megerősített az adott foknál, s_i' cáfolt az adott foknál, ha bármelyiknél több valószínűség is jelentkezik, akkor s_i vagy $s_i' = 1 - (1 - s_1) \cdot (1 - s_2) \cdot \dots \cdot (1 - s_k)$

2.) A megerősítő és cáfoló bizonyítékok kombinálásával megkapjuk a következőket:

$$Evi_i(\{i\}) = p_i = s_i * (1 - s_i') / 1 - (s_i * s_i')$$

$$Evi_i(\{i\}^c) = c_i = s_i' (1 - s_i) / 1 - (s_i * s_i')$$

$$Evi_i(\theta) = r_i = 1 - p_i - c_i$$

$$d_i = c_i + r_i$$

3.) Értékeljük a különböző organizmusokba vetett hit hatásait:

A *Bel* függvény az $Evi_i, \dots, Evi_n$ kombinációiból képződik,

$$Bel(\{i\}) = K \left[p_i \prod_{j \neq i} d_j + r_i \prod_{j \neq i} c_j \right]$$

A részhalmaz θ -nak, $|A| > 1$

$$Bel(A) = K \left(\left[\prod_{all j} d_j \right] \left[\sum_{j \in A} p_i / d_j \right] + \left[\prod_{j \notin A} c_j \right] \left[\prod_{j \in A} d_j \right] - \prod_{all j} c_j \right)$$

Ahol:

$$K^{-1} = \left[\prod_{all j} d_j \right] \left[1 + \sum_{all j} p_j / d_j \right] - \prod_{all j} c_j$$

amíg p_i nem egyenlő 1 minden j -re.

Ez megkönnyíti a bizonyítékok aggregációját, amelyek különböző sajátosságok illetve részletek szintjein gyűltek össze.

Egy tipikus konzultáció

1. Patient's name: (first - last)

** FRED BRAUN

2. Sex:

** M

3. Age:

** 55

4. Are there any cultures for Fred Braun which may be related to the present illness, and from which organisms have been grown successfully in the microbiology laboratory?

** Y

- - - CULTURE - 1 - - -

5. From what site was the specimen for CULTURE - 1 taken?

** BLOOD

6. Please give the date and time when CULTURE-1 was obtained.

(mo/da/yr time)

** JUN 20, 1977

The first organism isolated from the blood culture of 20-JUN-77 (CULTURE-1) will be referred to as:

- - - ORGANISM - 1 - - -

Ezek után a rendszer további kérdéseket tesz fel, amelyek segítségével elegendő információt gyűjt ahhoz, hogy következtessen a fertőzést okozó organizmus kilétére és jelentőségére. Úgy 50-60 darab kérdés feltétele után, a MYCIN megadja a diagnosztikai hipotézist, amelyen javasolt terápia alapszik.

„Olyan terápiát ajánlok, amely olyan organizmusok kezelésére van kifejelesztve, amelyek, ha jelen vannak, akkor magas hatástfokot fejt ki rájuk a terápia. A következő lehetséges fertőzéseket és organizmusokat találtam:

INFECTION-1 is BACTEREMIA

<ITEM-1> E.COLI [ORGANISM-1]

<ITEM-2> KLEBSIELLA [ORGANISM-1]

<ITEM-3> ENTEROBACTER [ORGANISM-1]

<ITEM-4> KLEBSIELLA-PNEUMONIAE [ORGANISM-1]”

4.1 Magyarázat és indoklás

- WHY: A beviteli kérelem magyarázata

34. Was penicillinase added to this blood culture (CULTURE-1)?

** WHY

[3.0] This will aid in determining whether ORGANISM-1 is a contaminant.

It has already been established that

[3.1] the site of CULTURE-1 is blood, and

[3.2] the gram stain of ORGANISM-1 is grampos

- HOW: A kimenet indoklása

**** HOW DO YOU DECIDE THAT AN ORGANISM IS AN E.COLI?**

The following rules conclude about:

the likelihood that the identity of the organism is E.coli.

555, 304, 243, 3

Which of the rules do you wish to see?

Irodalomjegyzék

[1] Bruce G. Buchanan, Edward H. Shortliffe: Rule-Based Expert Systems The MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project; Addison-Wesley Publishing Company 1984.

[2] School of ECM, University of Surrey: MYCIN study

[3] Berner, Eta S.: Clinical Decision Support Systems, New York, NY: Springer, 2007.

[4] Garg AX, Adhikari NK, McDonald H, Rosas-Arellano MP, Devereaux PJ, Beyene J et al: Effects of computerized clinical decision support systems on practitioner performance and patient outcomes: a systematic review, 2005.

[5] Kavishwar B. Waghlikar Vijayraghavan Sundararajan Ashok W. Deshpande: Modeling Paradigms for Medical Diagnostic Decision Support: A Survey and Future Directions, 2011.

[6] Jackson, Peter: Introduction To Expert Systems, 1998.

• Kilátáselmélet – Berényi Domokos

A kockázatos helyzetekben hozott döntések elemzése

BEVEZETÉS

A kockázattal járó kilátások közötti döntés néhány olyan hatással jár, amelyek nem illeszkednek a hasznosságelmélet alapelveihez.

Az emberek alábecsülik a valószínű következményeket a bizonyosakhoz képest. Ez a bizonyossághatásnak nevezett hajlam előidéz a kockázatkerülést a bizonyos nyereményeket tartalmazó döntések esetében, illetve a kockázatvállalást a bizonyos veszteségeket tartalmazó döntésekben. Emellett eltekintenek azoktól az összetevőktől, amelyek valamennyi megvizsgált kilátásban megtalálhatók. Ez az elszigeteléshatásnak nevezett hajlam következtelen preferenciákhoz vezet, ha ugyanazt a választást különböző formákban mutatják be nekik. A későbbiekben bővebben lesz szó e két fontos hatásról.

A továbbiakban az érték a nyereségekhez és a veszteségekhez, s nem a végső vagyoni állapothoz van rendelve, melyben a valószínűségeket döntési súlyok helyettesítik. Ezek a döntési súlyok általában kisebbek, mint a megfelelő valószínűségek.

A kockázatos helyzetekben való döntéshozatalt felfoghatjuk kilátások közötti választásként. Az $(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$ kilátás olyan szerződés, amely (x_i) következményt (p_i) valószínűséggel eredményezi, ahol $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

A kockázatos helyzetekben való döntéshozatal elemzését a várható hasznosság elve uralja, mely a következő három alapelvre épül:

1. Várakozás: $U(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n) = p_1 u(x_1) + \dots + p_n u(x_n)$.

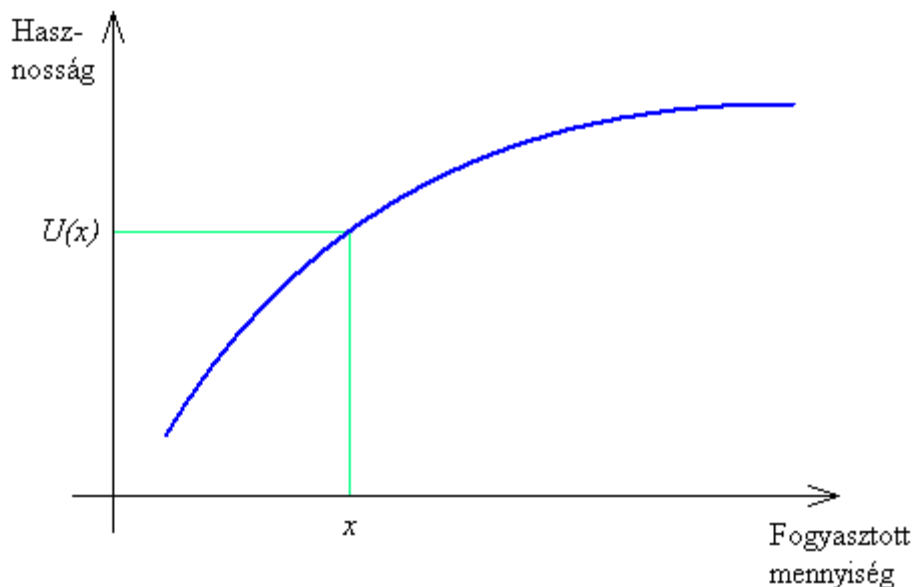
Azaz egy kilátás teljes várható hasznossága (U), egyenlő a hozzá tartozó következmények várható hasznosságának összegével.

2. Vagyonösszegzés: $(x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$ olyan w vagyoni helyzetben fogadható el, ahol $U(w + x_1, p_1; \dots; w + x_n, p_n) > u(w)$.

Azaz, akkor fogadható el egy kilátás, ha a kilátásnak az érintett vagyonával való összegzéséből származó hasznosság nagyobb, mint a vagyonok egyenkénti hasznossága. Tehát a hasznossági függvény értelmezési tartományát a végső állapotok jelentik, nem pedig a nyereségek és a veszteségek.

3. Kockázatkerülés: u konkáv

Egy személy akkor kockázatkerülő, ha az (x) bizonyos kilátást preferálja bármely x várható értékű kockázatos kilátáshoz képest. A várható hasznosság elve szerint a kockázatkerülés a hasznossági függvény konkáv alakjának felel meg (lenti ábra).



A továbbiakban néhány olyan jelenség kerül bemutatásra, amelyek megsértik a várható hasznosság elméletének ezen alapelveit.

BIZONYOSSÁGHATÁS

Ebben az esetben az emberek túlértékelik a bizonyosnak tekintett következményeket a csupán valószínűkkel szemben.

A várható hasznosság elvének legismertebb ellenpéldája, amely a bizonyossághatást deríti fel, Maurice Allais francia közgazdásztól származik.

1. probléma: Válasszon A és B lehetőségek közül!

A: 2500 egység	0,33 valószínűséggel	B: 2400 bizonyosan
2400 egység	0,66 valószínűséggel	
0 egység	0,01 valószínűséggel	
N = 72	[18]	[82]

2. probléma: Válasszon C és D lehetőségek közül!

C: 2500 egység	0,33 valószínűséggel	D: 2400 egység	0,34 valószínűséggel
0 egység	0,67 valószínűséggel	0 egység	0,66 valószínűséggel
N = 72	[83]	[17]	

Az adatok alapján a választók 82 százaléka B-t választja az 1. problémában, 83 százalékuk pedig C-t választja a 2. problémában. A preferenciák e mintázata oly módon sérti a várható hasznosság elvét, ahogyan azt Allais elméletében olvashatjuk. Eszerint, ha $u(0) = 0$, akkor az első preferencia azt jelenti, hogy $u(2400) > 0,33u(2500) + 0,66u(2400)$ vagy $0,34u(2400) > 0,33u(2500)$, míg a második preferencia az egyenlőtlenség fordítottja lesz.

Ugyanennek a jelenségnek egyszerűbb bemutatása az az eset, amely csak két következménnyel járó választást tartalmaz.

3. probléma

A: (4000, 0,80)	vagy	B: (3000)
N = 95 [20]		[80]

4. probléma

C: (4000, 0,20)	vagy	D: (3000, 0,25)
N = 95 [65]		[35]

Ebben a problémapárban a válaszadóknak több mint a fele megsérti a várható hasznosság elvét. A 3. és 4. probléma preferenciáinak modális mintázata nem felel meg az elméletnek. B választása $u(3000)/u(4000) < 4/5$, míg C választása az egyenlőtlenség fordítottja lesz. Vegyük észre, hogy C = (4000, 0,20) kilátás kifejezhető, mint (A, 0,25), míg D = (3000, 0,25) újraírható (B, 0,25) formában. A hasznosságelmélet helyettesítési axiómája azt állítja, hogy ha A-hoz képest B-re esik a preferencia, akkor bármely (B, p) valószínűségi keveréket preferálni kell (A, p) keverékkel szemben. A mi válaszolóink nem követték ezt az axiómát. Úgy tűnt, hogy a nyeresé esélyének csökkentése 1,0-től 0,25-re komolyabb következményekkel járt, mint a 0,8-ról 0,2-re való csökkentés.

Másfajta helyzetet mutat be az alábbi két probléma, melyekben szintén nem érvényes az axióma.

5. probléma

A: (6000, 0,45)	vagy	D: (3000, 0,90)
N = 66 [14]		[86]

6. probléma

C:(6000, 0,001)	vagy	D: (3000, 0,002)
N = 66 [73]		[27]

Vegyük észre, hogy az 5. problémában a nyerés esélyei jelentősek (0,90 és 0,45), és a legtöbben azt a kilátást választják, amelyben nagyobb a nyerés valószínűsége. A 6. problémában van ugyan lehetőség a nyerésre, de a nyerés valószínűsége mindkét kilátás esetében csak igen csekély (0,002 és 0,001). Ebben a helyzetben, amelyben a nyerés lehetséges, de nem valószínű, a legtöbben azt a kilátást választják, amelyik a nagyobb nyereséget kínálja.

A fenti problémák a kockázatot és az esélyt illetően olyan általános attitűdöket mutatnak meg, amelyek nem vonhatók be a várható hasznosság modelljébe.

TÜKRÖZÉSHATÁS

Eddig pozitív kilátásokhoz kapcsolódó preferenciákkal foglalkoztunk, azaz olyan kilátásokkal, amelyek nem járnak veszteséggel. Mi történik akkor, ha a következmények előjelei felcserélődnek úgy, hogy a nyereséget veszteség váltja fel? Vegyünk pár példát az előzőek közül:

Pozitív kilátások				Negatív kilátások			
3. probléma N = 95	(4000, 0,80) [20]	<	(3000) [80]	3'. probléma N = 95	(-4000, 0,80) [92]	>	(-3000) [8]
4. probléma N = 95	(4000, 0,20) [65]	>	(3000, 0,25) [35]	4'. probléma N = 95	(-4000, 0,20) [42]	<	(-3000, 0,25) [58]

Pozitív kilátások				Negatív kilátások			
5. probléma N = 66	(6000, 0,45) [14]	<	(3000, 0,90) [86]	5'. probléma N = 66	(-6000, 0,45) [92]	>	(-3000, 0,90) [8]
6. probléma N = 66	(6000, 0,001) [73]	>	(3000, 0,002) [27]	6'. probléma N = 66	(-6000, 0,001) [30]	<	(-3000, 0,002) [70]

A bal oldali oszlop két olyan választási problémát mutat be, amelyet az előző szakaszban tárgyaltunk, a jobb oldali oszlop pedig olyan választási problémákat, amelyekben a következmények előjelei megfordultak.

A negatív kilátások sorrendje mind a két probléma esetén tükörképe a pozitív kilátásokénak. Így a kilátások 0-ból való tükrözése megfordítja a preferenciasorrendet. Ezt a jelenséget nevezzük tükrözéshatásnak.

Vizsgáljuk meg ezeknek az adatoknak a következményeit. Először is meg kell jegyezni, hogy a tükrözéshatás azt is jelenti, hogy a pozitív tartományban való kockázatkerülés együtt jár a negatív tartományban való kockázatkereséssel. Az 3'. problémában például a válaszadók többsége inkább hajlandó volt elfogadni 0,80 valószínűségű kockázatát annak, hogy 4000 veszteséget szenved, mint azt, hogy 3000-et veszít biztosan, noha a preferált játéknak kisebb a várható értéke.

Másodszor idézzük fel, hogy a táblázat pozitív kilátásokat illető preferenciái nem felelnek meg a várható hasznosság elvének. A megfelelő negatív kilátásokat illető preferenciák ugyanilyen módon szintén megsértik a várakozás elvét.

Harmadszor, a tükrözéshatás kizárja, hogy a bizonytalanság vagy a változékonyság kerülése lenne a bizonyossághatás magyarázata. Feltételezés, hogy az emberek azokat a kilátásokat részesítik előnyben, amelyeknek nagy várható értéke és kis szórása van. Mivel (-3000)-nek nagyobb várható értéke és kisebb szórása van, mint a (-4000, 0,80)-nak, e feltételezésből az következne, hogy a biztos vereséget kell preferálni, ami ellentétes az adatokkal. Így adataink ellentmondanak annak a felfogásnak, hogy a bizonyosság általában véve kívánatos. Inkább úgy tűnik, hogy a bizonyosság növeli a veszteség taszítóerejét és a nyereség vonzerejét.

VALÓSZÍNŰSÉGI BIZTOSÍTÁS

7. probléma: Tegyük fel, hogy szeretné valamely tulajdonát kár, pl. tűz vagy lopás ellen biztosítani. A biztosítótársaság új programot kínál, amelynek a neve valószínűségi biztosítás. Ebben a programban a szokásos díj felét kell fizetni. Kár esetén 50%-os esélye van arra, hogy ki kell fizetnie a díj másik felét és a biztosítótársaság fedezi minden veszteségét; és 50% esélye van arra, hogy visszakapja a befizetett összegeket és szenved az összes veszteséget. Ha például a baleset a hónap páratlan napján történik, ki kell fizetnie a szokásos díj másik felét, és a veszteségét fedezni fogják; de ha az eset a hónap páros napján történik, akkor a biztosítási összeget visszatérítik és nem fedezik a veszteségeit.

Emlékezzünk meg emellett arról is, hogy a teljes fedezet díja akkora, hogy a biztosítás aligha éri meg a költségét.

Kérdés, hogy vásárolnánk-e ilyen körülmények között valószínűségi biztosítást?

N = 95	Igen	Nem
	[20]	[80]

A valószínűségi biztosítás a védelmet szolgáló tevékenységeknek számos olyan formáját jeleníti meg, amelyben egy bizonyos összeget kell fizetni valamilyen nem kívánatos eset valószínűségének csökkentése érdekében. A 7. problémára és ugyanennek a kérdésnek számos más változatára adott válaszok azt mutatják, hogy a valószínűségi biztosítás általában nem vonzó. Úgy tűnik, hogy kevesebbre értékelik, ha a veszteség valószínűsége p -ről $p/2$ -re csökken, mint amikor $p/2$ -ről 0-ra csökken.

ELSZIGETELESHATÁS

Az alternatívák közötti választás egyszerűsítése érdekében az emberek gyakran eltekintenek azoktól az összetevőktől, amelyek minden alternatívában megvannak, és azokra összpontosítanak, amelyek megkülönböztetik őket. A választási problémák megközelítésének ez a módja következtelen preferenciákat eredményezhet, mert a kilátások párait többféleképpen bonthatjuk szét közös és nem közös összetevőkre, és a különféle szétbontások olykor különféle preferenciákhoz vezetnek. Ezt a jelenséget elszigetelésehatásnak nevezzük.

8. probléma: Vizsgáljuk meg a következő kétszakaszos játszmát. Az első szakaszban 0,75 az esély arra, hogy mindenféle nyeremény nélkül fejezzük be a játszmát, és 0,25 az esély arra, hogy eljussunk a második szakaszig. Ha eljutottunk a második szakaszig, választhatunk (4000, 0,80) és (3000) között. A döntést még azelőtt meg kell hozni, hogy elkezdődne a játék, azaz mielőtt az első forduló következményét megtudnánk.

Vegyük észre, hogy ebben a játszmában $0,25 * 0,80 = 0,20$ eséllyel 4000 elnyerése és $0,25 * 1,0 = 0,25$ eséllyel 3000 elnyerése között lehet választani. Tehát (4000, 0,20) és (3000, 0,25) között lehet választani. A 141 választ adó alany közül 78 százalékban választották az utóbbi kilátást. Nyilvánvaló, hogy az emberek nem vették figyelembe a játszma első szakaszát, csak úgy tekintették a 10. problémát, mint (3000) és (4000, 0,80) közti választást.

• Bizonytalanságban hozott döntések elemei – Borbély Erzsébet

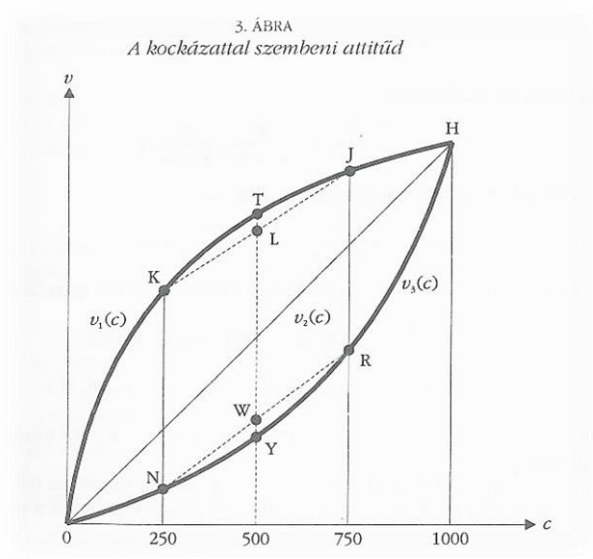
1. Kockázatkerülés

A kockázattal szembeni attitűd szempontjából, illetve a kockázathoz való viszony alapján három típusú embert különböztethetünk meg. Vannak a kockázat kerülők, kockázat kedvelők és azok, akik teljesen semlegesek a kockázattal szemben. Akkor mondjuk, hogy valaki kockázat kerülő, ha egy bizonyos kimenetelt szigorúan preferál bármi olyan kockázatos kilátáshoz képest, melynek matematikai várható értéke megegyezik a biztos kimenetelével. Amennyiben a preferenciái az előzőhöz képest épp ellenkező irányban működnek, akkor azt az egyént kockázat kedvelőnek, ha teljesen közömbös a kockázatos kilátás és a biztos következmény alternatíváit illetően, akkor kockázat semlegesnek nevezzük.

Az "igazságos szerencsejáték" kifejezés olyan bizonytalan kilátásra vonatkozik, melynek matematikai várható értéke nulla. A negatív várható értékű szerencsejátékot "kedvezőtlennek", a pozitív várható értékűt pedig "kedvezőnek" nevezzük. Például egy szabályos kockával történő dobás esetén az 5:1 esély igazságos szerencsejátéknak minősül, mivel egy dollárt veszítünk, ha nem a választott oldallal felfelé áll meg a kocka, és öt dollárt nyerünk, ha igen. A nyeremény várható értéke így $(-1)\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6} = 0$.

A kockázatkerülő személy elutasítaná az igazságos szerencsejátékot, a kockázat kereső elfogadná, a semleges számára pedig mindegy lenne. Azonban látni fogjuk, hogy a kockázat kerülő egyén elfogad majd egy igazságos szerencsejátékot, ha ezzel ellensúlyozni tud más kockázatokot. Ilyen ellensúlyozást jelenthet például biztosítás kötése, ami kockázat csökkentő.

Az alábbi ábra három lehetséges preferenciaindex-függvényt ábrázol: $v_1(c)$ egy kockázatkerülő egyéné, $v_2(c)$ egy kockázat semlegesé és $v_3(c)$ egy kockázatkedvelő viselkedését ábrázolja.



1. ábra: A kockázattal szembeni attitűd

Tekintsük a $G = (750, 250; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ igazságos kilátást vagy szerencsejátékot, melynek matematikai várható értéke 500\$. A kockázatkerülő egyén esetében a biztos 500\$ hasznossága, $v_1(500)$, a $v_1(c)$ görbe mentén található T pontnak megfelelő magassággal adható meg. A hasznosság kockázatos kilátáshoz tartozó érték, melyet a G szerencsejáték alternatívájához rendelünk, az az L pont, mely magassága a J és K pontok magasságának valószínűségekkel súlyozott átlaga. Ez a várható hasznosság elvének geometriai megfelelője, ami azt mondja meg, hogy $U_1(G) = \frac{1}{2} v_1(750) + \frac{1}{2} v_1(250)$. A $v_1(c)$ preferenciaindex-függvény konkáv, a biztos jövedelmeknek megfelelő pontok magasabban helyezkednek el, mint azok a pontok, melyek ugyanolyan várható jövedelmet biztosító igazságos szerencsejátékokat jelenítenek meg. A kockázatkedvelő egyén esetében $v_3(500)$ értéke Y pontban kisebb, mint a W ponthoz tartozó érték, az ilyen egyén inkább a G szerencsejátékot választaná, mint hogy ennek 500\$ nagyságú várható értékű jövedelmét kapja meg biztosan. A $v_2(c)$ görbe azt jelzi, hogy a kockázat semleges egyén közömbös a G szerencsejáték és a biztos 500\$ nagyságú jövedelem alternatíváit tekintve.

A Jensen-féle egyenlőtlenséget használva: Ha $\check{c}$ véletlenszerű változó és $v(c)$ kétszer differenciálható függvény, akkor:

Ha $v''(c) < 0$, akkor $Ev(c) < v[E(c)]$.

Ha $v''(c) = 0$, akkor $Ev(c) = v[E(c)]$.

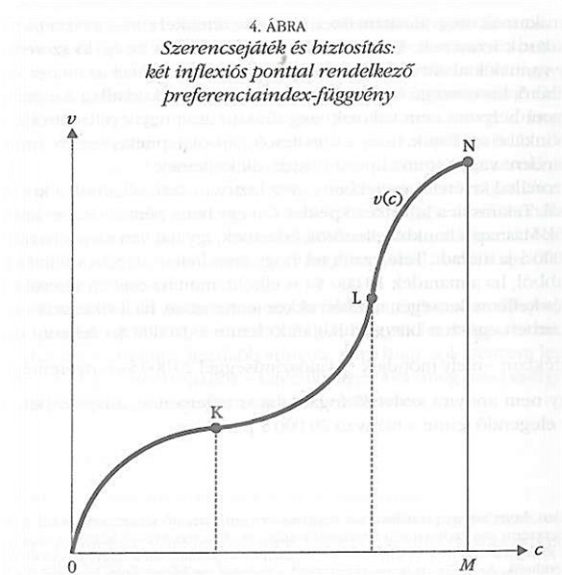
Ha $v''(c) > 0$, akkor $Ev(c) > v[E(c)]$.

Ezek a feltételek közvetlenül megfelelnek a fenti ábrán található kockázatkerülő, kockázat

semleges és kockázatkedvelő eseteknek.

Vegyük szemügyre az emberek döntéseit befolyásoló $v(c)$ görbét! Korábban már megállapítottuk, hogy a nagyobb jövedelem jobb, mint a kisebb, amit az a megfigyelés igazol, hogy az emberek csak a legritkább esetben utasítanak vissza pénzt. Ennek az a következménye, hogy a $v(c)$ függvény emelkedő, vagyis a $v'(c)$ első derivált értéke pozitív, azaz a jövedelem határhaszna pozitív. A kockázatkerülő magatartást - a $v_1(c)$ -hez hasonló csökkenő határhasznosságot mutató "konkáv" görbét - tekintjük a normális esetnek, mivel az a tapasztalat, hogy az emberek portfóliója rendszerint diverzifikált. Ha feltesszük, hogy valaki teljes mértékben kockázat semleges, úgy hogy esetében $v''(c) = 0$. Ekkor ez az egyén egyszerűen figyelmen kívül hagyja a különböző beruházási lehetőségek vagy vagyontárgyak (szerencsejátékok) kockázatosságát és varianciáját. Döntései során csak az ezekhez kapcsolódó várható jövedelem nagyságát venné számításba, ami azt eredményezné, hogy teljes vagyonát arra az egyetlen dologra tenné fel, amely a kockázattól függetlenül a legmagasabb várható értékű jövedelmet nyújtja számára. Ez a viselkedést azonban csak ritkán figyelhetjük meg, az embereknek többféle vagyontárgyuk van. A biztonság csak úgy érhető el, ha beérjük alacsonyabb várható értékű átlagos jövedelemmel, és esetlegesen jövedelmet áldozunk fel a kockázat csökkentése érdekében.

Az alábbi ábrán két inflexiós ponttal rendelkező preferenciaindex-függvényt láthatunk. A $v(c)$ görbe a OK és az LN tartományban konkáv, ami normális kockázatkerülő magatartásra utal. A középső KL tartományban konvex, ami viszont kockázatkedvelő hajlamról tanúskodik. Az efféle $v(c)$ függvény esetén a kockázatvállaló magatartás a vagyontól függően változik.



2. ábra. Szerencsejáték és biztosítás: két inflexiós ponttal rendelkező preferenciaindex-függvény

Azok esetében, akik vagyonának a nagysága az első konkáv szakaszra esik, érvényesülni fog az a tendencia, hogy valószínűleg biztosítást fognak kötni a viszonylag kis kockázat ellen is, de el fogják fogadni azon igazságos szerencsejátékokat, melyek későbbi nagy nyereménnyel kecsegtetnek. Ez azt a lehetőséget kínálja számukra, hogy a görbe felső végénél található pozíciók valamelyikébe kerülhetnek. Belátható, hogy ez a magatartás különösen azokra jellemző, akik jövedelme az alsó tartomány felső részére esik - a kevésbé nélkülöző szegényekre és az alsó középosztályra. A nagyon szegények ezzel szemben sokkal kevésbé hajlandók szerencsejátékokat játszani. A ábra felső szakasza felé tekintve úgy tűnik, hogy azok, akik jövedelme a felső konkáv szakasz alsó részére esik - a gazdagok, de nem nagyon gazdagok, és a felső középosztály tagjai - kedvelik azokat a kockázatos helyzeteket, melyek kedvező kimenetellel kecsegtetnek, de hosszútávon igazán nagy veszteséggel járhatnak. A nagyon szegényekhez hasonlóan a nagyon gazdagok sem igazán hajlandóak a szerencsére bízni a sorsukat. A középső csoport örömmel lát mindenféle igazságos vagy nem túl kedvezőtlen szerencsejátékot.

Nehéz elhinni azonban, hogy a közepes jövedelműek mindig nagy szerencsejátékosok. Ha a fenti ábra helyesen mutatná be a valóságot, akkor a konvex KL szakaszhoz tartozó középső csoport nagy odaadással hazardírozna, azért hogy óriási "minden vagy semmit" fogadásokkal fordítson az életén. Ezek a jövedelműek csoportjának ebben az esetben hamarosan el kellene tűnnie, viszont ez egyáltalán nincs összhangban a tapasztalatokkal. Továbbá azt is nehéz elhinni, hogy társadalmunkban csak a nagyon szegények és a nagyon gazdagok törekednek a

kockázat elkerülésére. Miért kötnek biztosítást és hazardíroznak kérdésre elfogadható magyarázatnak tűnik, hogy a legtöbben kikapcsolódásként játszanak szerencsejátékokat és nem a jövedelemszerzés érdekében. A szerencsejáték inkább fogyasztási cikk, semmint befektetés. A valóságban nem nehéz megkülönböztetni a kikapcsolódást szolgáló vagy szórakoztató szerencsejátékokat, a komoly, meggazdagodásra irányuló szerencsejátéktól.

A bizonytalan helyzetekben hozott döntések esetén a referencialutri-eljárás segítségével megadhatunk egy olyan $v(c)$ függvényt, amely az adott helyzettől függően lehet konvex, konkáv vagy ezek keveréke. A függvény alakját minden esetben két egymással összefüggő elem határozza meg:

- 1) hogyan értékeli a döntéshozó a következményeket
- 2) milyen a kockázatvállalási hajlandósága.

Így a konkáv $v(c)$ függvényt úgy értelmezhetjük, mint amely vagy kockázatkerülő magatartásra utal (kockázatvállalási hajlandóság), vagy a csökkenő határhasznosságot tükrözi (jövedelemhez való viszonyulás). Hasonlóképpen, a konvex $v(c)$ függvényről azt mondhatjuk, hogy az vagy a kockázatkedvelést vagy a növekvő határhasznosságot fejezi ki.

Nézzünk egy példát a gyakorlatban a diverzifikációra. Három egyén különböző preferenciaindex-függvénnyel rendelkezik, melyek a következők: $v_1 = c$ - kockázat semleges, $v_2 = c^{0.5}$ - kockázatkerülő és $v_3 = c^2$ kockázatkedvelő. Mindegyiküknek lehetősége van arra, hogy pénzt fektessen be három kilátás vagy lutri vármelyikébe, melyek várható jövedelme rendre a következő:

$$G1 = (480, 480; 0.5, 0.5) \quad E1(c) = 480$$

$$G2 = (850, 200; 0.5, 0.5) \quad E2(c) = 525$$

$$G3 = (1000, 0; 0.5, 0.5) \quad E3(c) = 500$$

Az első két lutri összehasonlításakor a magasabb kockázat nagyobb matematikai várható jövedelemmel jár. A harmadik lutri kockázata a legnagyobb, de matematikai várható értéke a másik kettő közé esik. A kockázat semleges személy a legnagyobb várható értékkel rendelkező G2 lutrit fogja választani, míg a kockázatkerülő második személy a legkisebb kockázattal járó G1 lutrit preferálja. A kockázatkedvelő egyén pedig G3-at választja, mivel a kockázatot preferálja. Amennyiben lehetőségük lenne diverzifikációra, akkor az adott egyének melyiket választanák?

A kockázat semleges személy továbbra is kizárólag a G2-be fog befektetni, mivel a hasznosság matematikai várható értéke megegyezik a jövedelem matematikai várható értékével. A

kockázatkerülő egyén kerülni fogja G3-at, de a G1-nek és a G2-nek léteznek olyan kombinációi, mint például a (0.5, 0.5) arányú, melyek nagyobb hasznossággal kecsegtetnek, mint akár G1 vagy G2 önmagában. A kockázatkedvelő egyén esetében G2 és G3 kombinációi nagyobb hasznosságot ígérnek, úgy hogy mellette a kockázat egy kis mértékét fel kell áldoznia.

A Jensen-féle egyenlőtlenség

1) Mutassuk meg, hogy ha a $v(c)$ preferenciaindex-függvény kétszer folytonosan differenciálható és $v''(c) \leq 0$, akkor bármely $\check{c}$ véletlen valószínűségi változó esetén

$$Ev(\check{c}) \leq v(E(\check{c}))$$

Legyen $\bar{c} = E(\check{c})$! Taylor kifejtéssel élve, minden $c \neq \bar{c}$ esetén a c^* -nak létezik c és $\bar{c}$ közé eső olyan értéke, melyre igaz, hogy:

$$v(c) = v(\bar{c}) + v'(\bar{c})(c - \bar{c}) + \frac{1}{2} v''(c^*)(c - \bar{c})^2.$$

Ha c bármely értéke esetén $v''(c) \leq 0$, akkor:

$$v(c) \leq v(\bar{c}) + v'(\bar{c})(c - \bar{c}).$$

$$\text{Tehát } Ev(\check{c}) \leq v(\bar{c}) + v'(\bar{c})E(\check{c} - \bar{c}) = v(\bar{c})$$

2) Mutassuk meg, ha a $v''(c) < 0$ és $\text{Prob}(\check{c} \neq Ec) > 0$, akkor:

$$Ev(\check{c}) < v(E(\check{c}))$$

Ha c bármely értéke esetén $v''(c) < 0$, akkor:

$$v(c) < v(\bar{c}) + v'(\bar{c})(c - \bar{c}) \text{ minden } c \neq \bar{c} \text{ esetén.}$$

Ekkor mindaddig, amíg valamilyen pozitív valószínűséggel $c \neq \bar{c}$:

$$Ev(c) < v(\bar{c}).$$

2. Hasznossági paradoxonok és racionalitás

Megállapítások szerint a valóságos döntéshozók bizonytalanság keretei között nem viselkednek racionálisan, vagy legalábbis nem követik konzisztens módon a várható hasznosság szabályát. Ezeket az észrevételeket tapasztalati tények is alátámasztják. Ezek érzékeltetésére nézzünk három illusztrációt.

1) *Valószínűségek összeegyeztetése*

Minden alkalommal, amikor az ember eltalálja, hogy piros vagy fehér fény villan-e fel, kap 1\$-t. A fények véletlenszerűen villannak fel, de úgy állították be őket, hogy a piros kétszer olyan gyakran villanjon fel, mint a fehér.

Azt állapították meg, hogy az emberek kétszer annyiszor fogadnak a pirosra, mint a fehérre. Annak ellenére teszik ezt, hogy nyilván sokkal előnyösebb lenne mindig a pirosra fogadni.

2) *A kérdés megfogalmazása*

Tegyük fel, hogy kap 200\$-t, majd két opció közül választhatunk: a) kapunk további 50\$-t, vagy b) 25% eséllyel újabb 200\$-hoz juthatunk (vagy pedig nem kapunk semmit). Másik esetben tegyük fel, hogy kapunk 400\$-t és választani kell, hogy: a) lemondunk 150\$-ról vagy b) 75% eséllyel 200\$-t veszítünk (különben semmit).

A legtöbb kísérleti alany az a)-t választja az első esetben, de a b)-t a másodikban. Annak ellenére teszik ezt, hogy a kérdés megfogalmazásának módjától függetlenül az a) és a b) lehetőség esetében is nyilvánvalóan ugyanolyan jövedelemre van kilátás.

3) *Ellsberg-paradoxon*

Az I. urnában 50 piros golyó van és 50 fekete. A II. urnában is 100 piros és fekete golyó van, de nem tudjuk, hogy milyen arányban. Ha helyesen tippel, akkor 100\$-t nyerhet. A) Melyiket választaná két pirosra történő fogadás esetén P_I és P_{II} közül? P_I , ha az első urnából vesszük ki a golyót, míg az utóbbi azt jelenti, hogy a másodikból. B) A kérdés ugyanez, csak most az F_I és F_{II} fogadások a fekete golyókra vonatkoznak.

Azt állapították meg, hogy a legtöbb ember inkább a P_I -et választja, nem pedig P_{II} -t, illetve az F_I -et F_{II} -vel szemben. Ezek a preferenciák viszont nem konzisztensek: ha valaki azt mondja, hogy P_I -et preferálja P_{II} -vel szemben, akkor az azt jelenti, hogy F_{II} -t preferálja F_I -el szemben.

Ezek az ellentmondások összeegyeztethetetlenek a közgazdászok hagyományos

racionalitás felfogásával vagy legalábbis a várható hasznosság elvével, ami e felfogás sajátos következményének tekinthető. Viszont sokkal elfogadhatóbb magyarázat, hogy ezek az illusztrációk és bizonyítékok csupán azt mutatják be, hogy az emberi elme csak korlátozottan képes úgy működni, mint egy számítógép. A kérdés megfogalmazásával meg lehet zavarni elménket ugyanúgy, ahogy a szem is megtéveszthető optikai csalódások révén.

4) *Allais-paradoxon*

Ez a paradoxon azt illusztrálja, hogy milyen jelentős hatása van annak, hogy a kérdéseket hogyan fogalmazzuk meg.

A és B kilátások közül választhatunk:

- A: 1 000 000\$ biztosan kapunk
- B: 0,10 valószínűséggel 5 000 000\$-t nyerünk,
0,89 valószínűséggel 1 000 000\$-t nyerünk,
0,01 valószínűséggel nem nyerünk semmit.

A következő esetben pedig C és D közül kell választani:

- C: 0,11 valószínűséggel 1 000 000 \$-t nyerünk,
0,89 valószínűséggel nem nyerünk semmit.
- D: 0,1 valószínűséggel 5 000 000\$-t nyerünk,
0,9 valószínűséggel nem nyerünk semmit.

Az állapították meg, hogy a legtöbb ember A-t preferálja B-vel szemben, de D-t C-vel szemben. Könnyű belátni, hogy az A választása a B helyett és D választása a C helyett nincs összhangban a várhatóhasznosság-szabállyal, mivel a tétel szerint:

Ha A-t preferálja B-vel szemben, akkor

$$v(1\,000\,000\$) > 0,10v(5\,000\,000\$) + 0,89v(1\,000\,000\$) + 0,01v(0\$)$$

Elemi algebrai műveletek elvégzése után:

$$0,11v(1\,000\,000\$) + 0,89v(0\$) > 0,10v(5\,000\,000\$) + 0,90v(0\$).$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a várhatóhasznosság-szabály szerint ekvivalens azzal a kijelentéssel, ha C-t preferálja D-vel szemben. Ennek az a magyarázata, hogy a döntési szituáció A és B alternatívák formájában történő megfogalmazása feltűnően kiemeli annak 0,01-nyi valószínűségét, hogy nem részesedünk semmiben, ami a B opció nem kívánatos voltát igencsak megnöveli.

A kérdés az, hogy ez a megfigyelhető tévedés, mely alapján megállapítható, hogy

felmérésben részt vett egyének a döntéseiket nem igazítják a várhatóhasznosság-szabály kikötéseihez, csak logikai tévedésnek tekinthető-e. Az is előfordulhat, hogy a szabály nem helyes vagy csak a racionális viselkedés egy túlságosan szűkre szabott alesetére vonatkozik. Allais az utóbbi álláspontra helyezkedett, amellet érvelt, hogy az x cselekvési alternatíva hasznossága racionálisan nem feltétlenül adható meg a várható hasznosság egyszerű $U(x) = Ev(c_{xs})$ képlete alapján a következmények hasznosságából. Ehelyett egy általánosabb képletet javasolt:

$$U(x) = F(E[v(c_{xs})], \sigma^2[v(c_{xs})])$$

Allais a $v(c_{xs})$ -nek, azaz a következmények hasznosságának nem csak a várható értékét, de azok szórását, is számításba vetetné velünk a kockázattolerancia egyéni mértékét is figyelembe vevő F függvény szerint. Ugyanakkor a *Neumann-Morgenstern-szabály* Allais képletének egyik speciális határesetete.

A szűkebb és ezért erősebb Neumann-Morgenstern-szabály a helyes, melyet elegendő úgy alátámasztani, ha megcáfoljuk Allais példáját. Ha bemutatjuk, hogy egy racionális személy, miután rájön arra, hogy az Allais-féle probléma kapcsán a kérdés „megfogalmazásának a módjával” vezették félre, úgy módosítaná döntését, hogy az már összhangban legyen a várhatóhasznosság-szabállyal. Tehát ha A-t preferálja B-vel szemben, akkor C-t válassza D-vel szemben, és fordítva.

Nézzük a következő kilátást:

Y: 10/11 valószínűséggel 5 000 000 \$ kapunk,
1/11 valószínűséggel nem kapunk semmit.

A legtöbb ember A-t (a biztos 1 000 000 \$-t) preferálja Y-nal szemben. De a logika szabályai akkor sem sérülnének, ha egy kockázatkerülő személy Y-t választaná A helyett - egyszerűen az számít, hogy mekkora az emberek személyes kockázattoleranciája.

Nézzük a következő, összetettebb M kilátást:

M: 0,89 valószínűséggel A-ban lesz része,
0,11 valószínűséggel A-ban vagy Y-ban lesz része, attól függően, hogy melyiket választja.

Nyilvánvalóan, hogy ha egyszerű választásként A-t preferálta Y-nal szemben, és csak egy kicsit is racionális, akkor megint A-t kellene választania Y-nal szemben, ha az M kilátás esetén arra 0,11 esély van. Ekkor M A-ra - 1 000 000 \$ biztos elnyerésére - egyszerűsödne le. Ugyanakkor, ha először Y-t választotta A-val szemben és emellett következetesen kitart,

amikor arra alkalom nyílik az M kilátás esetén, akkor M B-re egyszerűsödne le.

Ha A-t preferálja Y-nal szemben, akkor A-t preferálja B-vel szemben

Ha Y-t preferálja A-val szemben, akkor B-t preferálja A-val szemben

Vegyünk egy másik összetett N kilátást:

N: 0,89 valószínűséggel nem kap semmit,

0,11 valószínűséggel A-ban vagy Y-ban lesz része, attól függően, hogy melyiket választja.

Ebben az esetben, ha A-t preferálja Y-nal szemben, akkor az N kilátás C-re egyszerűsödik le. De ha Y-t preferálja A-val szemben, akkor N a D-re egyszerűsödik le. És így:

Ha A-t preferálja Y-nal szemben, akkor C-t preferálja D-vel szemben.

Ha Y-t preferálja A-val szemben, akkor D-t preferálja c-vel szemben.

Így ha valaki A-t választja B-vel szemben (ezáltal fejezve ki az A iránti preferenciáját Y-nal szemben), akkor ugyanezen preferenciákkal összhangban C-t kell választania D-vel szemben. Tehát nincs ok arra, hogy egy racionális személy másképpen döntsön, hacsak a helyzet sajátos jellemzőit nem kell figyelembe venni, mint például ha valaki nagyobb értéket tulajdonít egy kétlépcsős szerencsejátéknak, mint egy vele megegyező nagyságú végeredményt adó egylépcsős szerencsejátéknak. Ennek oka lehet például, hogy nagyobb izgalomban van része, ha a rulett kerekét kétszer pörgetik meg. Az ilyen esetektől eltekintve, Allais ellenvetése nem állja meg a helyét.

Irodalomjegyzék

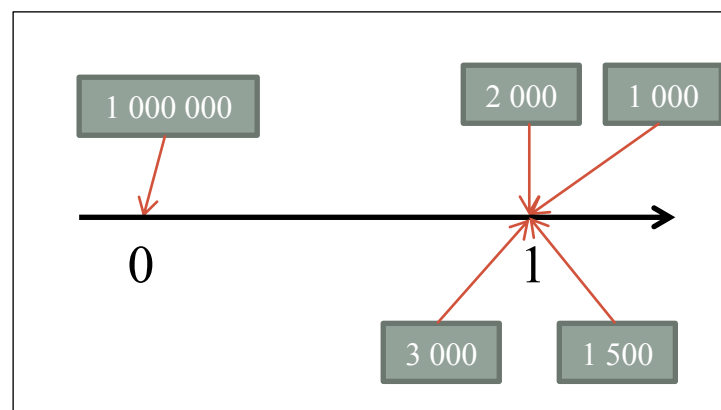
[1] A racionális döntések elmélete - Csontos László

- **Többtényezős döntések MACBETH felhasználásával - Csák Péter**

Bevezetés

A döntéselméletben egy-egy probléma megoldására több (általában véges sok) alternatíva áll rendelkezésre. Ezek közül kell a döntéshozónak (esetünkben) azt az egyet kiválasztani, amely a lehető legoptimálisabb. Egyik módja ennek, hogy a szóba jövő alternatívákat rangsoroljuk valamilyen pontozási rendszerrel. A pontszámokat az alternatívák tulajdonságainak kedvezősége/kedvezőtlensége alapján osztjuk ki és azt korrigáljuk egy súlyozási tényezővel, ami megadja, hogy az egyes tulajdonságok mennyire fontosak a számunkra. Ez több problémát is felvet:

- Az egyes tulajdonságok értékeinek meghatározása önkényes, amely okozhatja az eredmény hamisságát.
- A súlyok megválasztásánál előfordulhat olyan eset, amikor a tulajdonságok értékeinek nagyságrendje eltér, ami megbízhatatlanná teszi a pontszámokat. (1. ábra)



1. ábra

Jelölések

- X az alternatívák halmaza, amelynek elemeit a döntéshozó össze akarja vetni
- $\Delta att(x, y)$: az x és y elemek kívánatossága közötti különbség a döntéshozó szerint, ahol $x, y \in X$
- $\Delta att(x, y) > \Delta att(z, w)$ azt jelenti, hogy $\Delta att(x, y)$ nagyobb, mint $\Delta att(z, w)$

MACBETH - (measuring attractiveness by a categorical-based evaluation technique)

A MACBETH egy additív aggregációs modellen alapuló interaktív döntéstámogató keretrendszer kvalitatív információ számszerűvé tételére. Interaktivitása abban áll, hogy a döntéshozóval (kérdőív kitöltéshez hasonló módon) kommunikálva valós időben deríti fel a válaszokból származó inkonzisztenciát.

PREFERENCIÁRA VONATKOZÓ INFORMÁCIÓK

1-es típusú információ

Legyen x és y X -beli elemek. Az elsődleges információt az alábbi kérdésekkel tudjuk a döntéshozótól megszerezni:

Q1: „ x és y közül valamelyik jobb-e a másiknál?”

Erre három lehetséges választ adhat a döntéshozó: „Igen”, „Nem”, vagy „Nem tudom”. Ha a válasz „Igen”, akkor a következő feltett kérdés a (Q2) „Melyik elemet ítéli jobbnak?”

A kérdéseket megismételve X valamennyi elempárjára, a válaszok alapján készíthetünk három bináris relációt X elemei felett.

$$\blacksquare P = \{(x, y) \in X \times X : x \text{ jobb, mint } y\}$$

$$\blacksquare I = \{(x, y) \in X \times X : x \text{ nem jobb } y \text{ – nál és } y \text{ sem jobb } x \text{ – nél vagy } x = y\}$$

$$\blacksquare ? = \{(x, y) \in X \times X : x \text{ és } y \text{ nem összehasonlítható}\}$$

P aszimmetrikus, I reflexív és szimmetrikus, $?$ pedig irreflexív és aszimmetrikus

Ez alapján az 1-es típusú információ definíciója:

Definíció

Elsődleges információ egy X alternatíva halmaz felett egy $\{P, I, ?\}$ struktúra, ahol P , I , és $?$ diszjunkt relációk X felett. P aszimmetrikus, I reflexív és szimmetrikus, $? = X \times X \setminus \{I \cup P \cup P^{-1}\}$.

1+2-es típusú információ

Feltesszük, hogy 1-es típusú információ X -ről $\{P, I, ?\}$ formában adott. Eddig azt tudtuk meg, hogy minden X -beli elem jobb-e egy másik elemnél, vagy esetleg összehasonlíthatatlan, most pedig arra teszünk kísérletet, hogy megtudjuk a különbséget azon elemek jósága (angolul attractiveness) között, amelyekre a döntéshozó jelezte, hogy van közöttük különbség.

A harmadik kérdés, amit felteszünk a döntéshozónak minden $(x, y) \in P$ elempárra: Milyennek ítéli meg x és y elemek közötti (jóságbeli) különbséget? Erre a választ „ d_s ” formában kapjuk meg, (ahol $d_1, d_2, \dots, d_Q$ ($Q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) a vonzóság/jobbság különbségének szemantikus

kategóriái úgy, hogy ha $i < j$ d_i kisebb különbséget jelent két elem között, mint d_j) vagy általánosabban „ d_s -től d_t ” (ahol $s \leq t$) választ kapunk, ami megengedi a döntéshozó számára a bizonytalanságot. (a „Nem tudom” válasz a „ d_1 -től d_Q ”-nak felel meg)

Ha $Q = 6$, akkor a kategóriák a következők:

- d_1 = nagyon gyenge
- d_2 = gyenge
- d_3 = közepes
- d_4 = erős
- d_5 = nagyon erős
- d_6 = rendkívüli/extrem

A harmadik válasz alapján két elem közötti kapcsolat C_{st} ($s, t \in N$, $1 \leq s \leq t \leq Q$), ahol $C_{st} = \{(x, y) \in P \mid \Delta_{att}(x, y) \text{ a „} d_s\text{-től } d_t\text{-ig”}\}$. Ezek a kapcsolatok lehetőséget adnak egy aszimmetrikus reláció megkonstruálására P felett: $\{(x, y), (z, w)\} \in P \times P \mid \exists i, j, s, t \in N, \text{ hogy } 1 \leq i \leq j < s \leq t \leq Q, (x, y) \in C_{st} \text{ és } (z, w) \in C_{ij}\}$. Ezentúl az egyszerűség kedvéért C_{ss} helyett C_s jelölést használunk.

Definíció:

Az 1+2-es típusú információ X felett egy $\{P, I, ?, P^e\}$ struktúra, ahol $\{P, I, ?\}$ 1-es típusú információ X felett P^e pedig egy aszimmetrikus reláció P felett amelynek jelentése $(x, y)P^e(z, w)$ ha $\Delta_{att}(x, y) > \Delta_{att}(z, w)$.

A PREFERENCIÁRA VONATKOZÓ INFORMÁCIÓ SZÁMSZERŰSÍTÉSE

1-es típusú skála

Legyen adott az X feletti $\{P, I, ?\}$ 1-es típusú információ

Definíció

1-es típusú skála X felett $\{P, I\}$ szerint egy $\mu: X \rightarrow R$ függvény, amely kielégíti a következő feltételt:

1. feltétel

$\forall x, y \in X, xPy \rightarrow \mu(x) > \mu(y)$ és $xIy \rightarrow \mu(x) = \mu(y)$.

Jelölje $S_{c1}(X, P, I)$ az X feletti $\{P, I\}$ szerinti 1-es típusú skálák halmazát, formálisan $S_{c1}(X, P, I) = \{\mu: X \rightarrow R \mid \mu \text{ 1-es típusú skála } X \text{ felett } \{P, I\} \text{ szerint}\}$, röviden S_{c1} .

Ha $? = \emptyset$, akkor $S_{c1}(X, P, I) \neq \emptyset$, $S_{c1}(X, P, I)$ minden eleme egy rangsort határoz meg X -en.

1+2-es típusú skála

Legyen adott az X feletti $\{P, I, ?, P^e\}$ 1+2-es típusú információ.

Definíció

1+2-es típusú skála X felett $\{P, I, ?, P^e\}$ szerint egy $\mu: X \rightarrow R$ függvény, amely kielégíti az 1.feltételt és a következőt:

2. feltétel

$$\forall x, y, z, w \in X, (x, y)P^e(z, w) \rightarrow \mu(x) - \mu(y) > \mu(z) - \mu(w).$$

Analóg módon jelölje $S_{c1+2}(X, P, I, P^e)$ az X feletti $\{P, I, P^e\}$ szerinti 1+2-es típusú skálák halmazát, vagy röviden S_{c1+2} .

Konzisztencia

Azt mondjuk, hogy a $\{P, I, ?\}$ X feletti 1-es típusú információ konzisztens, ha $S_{c1}(X, P, I) \neq \emptyset$, és inkonzisztens, ha $S_{c1}(X, P, I) = \emptyset$.

Azt mondjuk, hogy a $\{P, I, ?, P^e\}$ X feletti 1+2-es típusú információ konzisztens, ha $S_{c1+2}(X, P, I, P^e) \neq \emptyset$, és inkonzisztens, ha $S_{c1+2}(X, P, I, P^e) = \emptyset$.

Ha az $S_{c1+2}(X, P, I, P^e) = \emptyset$, akkor két eset lehetséges: $S_{c1}(X, P, I) = \emptyset$, vagy $S_{c1}(X, P, I) \neq \emptyset$. Az első esetben nem lehet rangsort felállítani, mert a döntéshozó olyan preferenciákat adott meg, amelyekre van olyan $x, y, z \in X$ elemhármass, hogy $(xIy, yIz \text{ és } xPz)$ vagy $(xPy, yPz \text{ és } zPx)$ fennáll. A második esetben az 1-es típusú információ konzisztens, de konfliktusban van a P^e relációval. Ez akkor fordul elő, ha vannak olyan $x, y, z \in X$ alternatívák, hogy az alábbiak valamelyike teljesül

- $(xPy, yPz, xPz \text{ és } (y, z) P^e(x, z))$ vagy
- $(xPy, yPz, xPz \text{ és } (x, y) P^e(x, z))$ vagy
- $(xIy, yPz, xPz \text{ és } (x, z) P^e(y, z))$ vagy
- $(xIy, zPy, zPx \text{ és } (z, x) P^e(z, y))$

Tesztelő eljárások

Tegyük fel, hogy $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Minden esetben, amikor a döntéshozóval történő interjú során egy új ítélet születik, le kell ellenőrizni az eddigi válaszokkal való konzisztenciát. Először egy PRETEST nevű eljárást futtatunk, amely arra szolgál, hogy a potenciális köröket felderítse a P relációval kapcsolatban. Ha nincs ilyen kör, akkor úgy rendezi sorba X elemeit, hogy azok a döntési mátrixban minden P vagy C_{ij} érték a főátló felett szerepeljen. Ha nincs kör P -ben,

akkor az 1-es típusú információt két féle módon tesztelhetjük:

- Ha $? \neq \emptyset$, egy lineáris programozási feladatot használhatunk (LP-test₁).
- Ha $? = \emptyset$, akkor LP helyett egy DIR-test₁ módszert használunk, amely képes egyszerűen megjeleníteni a lehetséges rangsorát az alternatíváknak a döntési mátrix szerint.

Amennyiben a $\{P, I, ?\}$ 1-es típusú információ konzisztensnek bizonyul, akkor az 1+2-es típusú vizsgálata kezdődik el egy LP σ -test₁₊₂

A preferencia vizsgálata

A PRETEST a következő tulajdonságon alapul:

Legyen $X^* \subset X$, ha $\forall x \in X^*$ -ra $\exists y \in X^*$ úgy, hogy xPy , akkor $\exists x_1, x_2, \dots, x_p \in X^*$, hogy $x_1Px_2P\dots Px_pPx_1$ (kör, vagy sportosabban: körbeverés).

A PRETEST egy permutációt keres azaz egy $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ függvényt, amely sorba állítja az alternatívákat:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\text{-re } (i > j \rightarrow a_{\varphi(i)}(\text{nem}P) a_{\varphi(j)}).$$

A PRETEST algoritmus:

1. $s \leftarrow n$
2. $a_1, a_2, \dots, a_s$ közül megkeresni azt az a_i -t, amelynél nincs preferáltabb alternatíva

IF	a_i	létezik,	akkor	3.	lépés
ELSE			Return		HAMIS
FINISH					
3. felcserélni a_i -t és a_s -t
4. $s--$

HA	s	=	1	Return	TRUE
FINISH					
ELSE 2. lépés					

1-es típusú információ konzisztenciája

Feltéve, hogy PRETEST nem talált kört P-ben és az X elemei a következő módon átsorszámozottak:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\text{-re } (i > j \rightarrow a_i(\text{nem}P) a_j)$$

Ha $? \neq \emptyset$, akkor az LP-test₁ kerül lefuttatásra $x_1, x_2, \dots, x_n$ változókra az alábbi módon:

$$\min x_1$$

feltéve, hogy

$$x_i - x_j \geq d_{\min} \quad \forall (a_i, a_j) \in P\text{-re}$$

$$x_i - x_j \geq 0 \quad \forall (a_i, a_j) \in I\text{-re, } i \neq j\text{-re}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\text{-re}$$

ahol $d_{\min}$ egy pozitív konstans és $x_1, x_2, \dots, x_n$ jelölik rendre a $\mu(a_1), \mu(a_2), \dots, \mu(a_n)$ értékeket, ahol μ egy 1-es típusú skála.

$S_{c1} \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $LP\text{-test}_1$ -nek létezik megoldása.

Amennyiben $? = \emptyset$, akkor egy másik algoritmust, a $DIR\text{-test}_1$ -et használjuk, hogy megbizonyosodjunk arról, hogy $P \cup I$ teljes előrendezés X felett. Ez azon alapszik, hogy ha a „P esetek” a döntési mátrixban egy „lépcsőt” formáznak, akkor létezik olyan rangsorolás, hogy mindegyik lépcső legalább részben a mátrix főátlóján nyugszik.

Ha $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, ahol $i < j$, $(a_i, a_j) \in P \cup I$, akkor $P \cup I$ akkor és csakis akkor teljes előrendezés X felett, ha $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, hogy $i < j$:

$$a_i Pa_j \Rightarrow \begin{cases} \forall s \leq i, \forall t \geq j, a_s Pa_t \\ \exists s: i \leq s \leq j-1 \text{ és } a_s Pa_{s+1} \end{cases}$$

FELHASZNÁLT IRODALOM

■ science4all.org

■ [MACBETH alkalmazás](#)

- **Kollektív cselekvés, mint megegyezéses, N szereplős fogolydilemma – Gasztány Richárd**

Az esszém célja egy átfogó kép nyújtása a fogolydilemmáról, a kollektív cselekvésről és a kettő között lévő kapcsolatról. Hogyan lehetséges egy kollektív cselekvést, döntést N szereplős fogolydilemmaként elemezni.

Bevezető, klasszikus fogolydilemma

Egy súlyos bűntény kapcsán két gyanúsítottat letartóztat a rendőrség. Mivel nem áll rendelkezésre elegendő bizonyíték a vádemeléshez, ezért elkülönítik őket egymástól és mindkettejüknek ugyanazt az ajánlatot teszik.

Tegyük fel, hogy mindkét fogoly abszolút önző és egyetlen céljuk, saját büntetésük minimalizálása. Egy fogolynak két lehetősége van: hallgatni, azaz kooperálni, vagy egy vallomással elárulni a társat. Mindkét választás eredménye függeni fog attól, mit tesz a másik személy, de egyikük sem tudja, hogyan fog dönteni a másik. Még ha lehetőségük is lenne az összebeszélésre, akkor sem biztosan bízhatnának meg abban, hogy a másik megtartja az ígéretét.

Ha az egyik fogoly arra számít, hogy a másik majd kooperál és hallgat, akkor az optimális stratégia a vallomástétel, hiszen ezzel elérhető az azonnali szabadulás, miközben a másik 10 évet tölt majd a rács mögött. Amennyiben azt feltételezi, hogy a másik vallani fog, akkor is az lesz a legjobb választás, ha ő is vallomást tesz, hiszen így megúszhatja a teljes 10 éves ítéletet, és csak 6 évet kell leülnie, ahogy a másiknak is. Amennyiben persze mindketten kooperálnak és hallgatnak, akkor mindketten kiszabadulhatnak 6 hónap után.

Mindképpen a vallomás lesz a meghatározó stratégia mindkét résztvevő számára. Mindegy, hogyan dönt a másik játékos, a vallomással elkerülhető a rosszabb lehetőség. A foglyok számára sajnálatos módon pont ez fog elvezetni ahhoz a szerencsétlen végkimenetelhez, mikor mindkettő vall és mindkettő súlyos büntetést kap. Ez a fogolydilemma gyökere.

Ha a csoport – azaz a két fogoly közös – érdekeit tekintjük, akkor a helyes stratégia a kooperáció, hiszen ez fogja az összesen letöltött büntetés idejét minimalizálni. Bármely más döntés előnytelenebb lenne, ha a két fogoly együttes érdekeit vizsgáljuk.

Táblázatos formába a következő alakban írhatjuk fel

	Egyik tagad	Egyik vall
Másik tagad	Mindketten 6 hónapot kapnak	Egyik szabad, másik 10 évet kap
Másik vall	Egyik 10 évet kap, másik szabad	Mindkettő 6 évet kap

Természetesen a fentebb említett példa általánosítható megannyi gazdasági problémára. Ilyen problémák közé tartozik például két bolt árcsökkentési stratégiája is.

A szükséges definíciók

- A közjavak olyan javak, amelyek az egyének adott köre számára osztatlanul, és valamennyi egyén számára hozzáférhetően képezik a szükséglet kielégítés előfeltételeit.
- A latens csoport olyan kategoriális csoport, amelynek tagjai számára egy adott jószág közjószágot képez, és így e jószág előállítására vagy megszerzésére irányuló érdekeik bizonyos összetevői egybeesnek.

Kollektív cselekvés

A valós világban előforduló fogolydilemma-szerű helyzetekben gyakran kettőnél több szereplő érintett. Miként képes a kollektív cselekvés egy csoport számára közjószágot előállítani, az Egyén és a Közösség játszójaként elemezhetjük. Latens és közepes nagyságú csoportok esetén n szereplős fogolydilemmáról beszélünk. Ez a két csoport viszont formailag nem különbözik a játékelmélet szempontjából. Nagy csoportok esetén, ahol egyetlen individuum hozzájárulása nem jelent érezhető különbséget a csoport egésze vagy az egyes egyének haszna és költségei szempontjából, a kollektív jószág biztosítására biztosan nem kerül sor.

$$A_i = V_i - C$$

- A_i – az az előny, amelyhez valamely csoport egyes tagjai (i) a csoport számára való közjószág előállításához való hozzájárulás eredményeként jut.
- V_i – a csoport számára biztosított összes közjószág i -re eső értékének a része
- $C - V_i$ i részéről C -nyi költséggel jött létre
- Ahhoz hogy $A_i > 0 \rightarrow V_i > C$, azaz i csak akkor lesz racionálisan ösztönözve a csoport számára való közjószág előállításához, ha annak rá eső hányada többet ér neki, mint amennyibe került.

Az Egyén szemben a Közösséggel

Vizsgáljunk meg egy 10 fős csoportot, akiknek a közös érdekük a költségek kétszeresét érő közjószág biztosítása. Két lehetséges eredménye lehet, ha az egyén nem fizet, akkor arányosan csökken a közös haszon, vagy a csoport többi tagjának nő arányosan a költsége.

		Más csoporttagok			
		Fizet		Nem fizet	
Adott egyén	Fizet	1	1	0,2	-0,8
	Nem fizet	0,8	1,8	0	0

- Ha mindenki fizet, 20 egység a teljes haszon
 - Fejenkénti haszon: 2 → az adott egyén nyereség 1
- Ha az egyén nem fizet, 18 egység a teljes haszon
 - Fejenkénti haszon 1,8 → az adott egyén nyereség 1,8
- A nem fizetés stratégiája dominálja fizetését

Mivel a közösség minden tagja az Egyén szemszögéből szemléli a fenti mátrixot, így a közösség stratégiája végső soron meg fog egyezni bármelyik egyén stratégiájával függetlenül attól, hogy mit sugallnak a közösség kifizetései.

N szereplős fogolydilemma

Az n szereplős játszmák teoretikusa számára az Egyén és a Közösség közötti játszmaként meghatározott kollektív cselekvés problémájának mélyrehatóbb elemzése olyan 10 dimenziós mátrixot igényel, amely minden egyén kifizetését összeveti az összes többivel

- Minden játékos fizetése által meghatározott cellák
 - Cellaérték: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
- Minden játékos nem fizetése által meghatározott cellák
 - Cellaérték: (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
- Minden más cellaérték kifizetése (m: fizető játékosok száma az adott cellában)
 - Minden egyes fizető játékos kifizetése: $2m/(10-1)$
 - Nem fizet: $2m/10$

- Ha i játékos számára $2m/(10-1)$ lesz a kifizetés, ha m számú játékos, őt is beleértve fizet
- Ha ő nem fizet, akkor $m-1$ játékos fizet $2(m-1)/10$ lesz a kifizetés, ami számára $+0.8$ egységgel kedvezőbb
- Így minden i játékos számára a nem fizetés stratégiája dominálja a fizetés stratégiáját.
 - Egyensúlyi kimenet: $(0,0,...,0)$ - rossz kifizetést eredményez

N szereplős fogolydilemma általánosított alakja

- A 10 fogoly helyett n fogoly
- Haszon-költség arány 2 helyett r
- Nem fizetés választása esetén $(n - r)/n$ egységgel nagyobb kifizetéssel jár, mint a fizetés esetén
- Ha mindenki fizet, akkor $r - 1$ kifizetésre tesz szert
- Ebben a játszmában az egyetlen erősen stabil kimenet, amikor minden játékos nem fizet
 - Egyensúlyi megoldás nem Pareto-optimális
 - Ha minden játékos számára r összegű kifizetés felé való elmozdulás növelné a kifizetést mindenki számára.
- Empirikus következmények: Tapasztalatok szerint a latens csoportok általában sikertelenek. Különösen fontos, hogy a fogolydilemma bármely elemzése, arra a következtetésre jut, hogy a kölcsönösen veszteséges kifizetés nem racionális, implicite ellentmond Olson azon feltevésének, miszerint a logika alapján egy latens csoportban „a kollektív jószág biztosítására egészen biztosan nem kerül sor”, hacsak kényszer hatására nem. Kísérleti tapasztalatok szerint, a kétszemélyes fogolydilemmában a jóhiszemű játékosoknak körülbelül fele együttműködik, a másik fele pedig kizsákmányolja a nem véletlenszerűen, 100%-ban együttműködő ellenfelet.

A kollektív cselekvés játszmájának megoldása Condorcet-választással

10 személyes fogolydilemma játszma mátrixa $2^{10} = 1024$ cellát, egyedi kimenetelt tartalmaz. Az 1024 kimenetel 20 osztályba sorolható és megállapítható, hogy melyik megvalósítható kimenetel. Tovább meghatározható, hogy melyik Condorcet-választás.

Condorcet-választás általános definíciója

Definíció: Egy választás Condorcet-jelöltje vagy Condorcet-nyertese az a jelölt, aki ha minden más jelölttel összehasonlítjuk, mindenki máshoz képest előnyt élvez.

Példa: A(Aladár), B(Béla), C(Cecil) szavaznak, hogy milyen színű legyen a szoba

- Aladár preferencia sorrendje: z, s, k (zöld, mint kék, és inkább sárga, mint kék)
- Béla preferencia sorrendje: k, s, z
- Cecil preferencia sorrendje: s (inkább legyen sárga, mint bármi más)
- Három lehetséges párosítása van a feladatnak: z-s 1-2 (A-B, C), z-k 1-1 (A-B)
- s-k 2-1 (A, C-B). Így a sárga minden párosításból győztesen kerül ki, tehát a szavazás eredménye a sárga szín.

Térjünk vissza az eredeti problémára, ahol 1024 kimenetelt 20 osztályba soroljuk.

A kimenetek 2n osztályai az egyén szempontjából az alábbi kifizetési mátrixba írhatók.

Fizet	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8
Nem fizet	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0

- Felső sor balról jobbra: mindenki fizet, → csak ő fizet
- Alsó sor: csak ő nem fizet, → senki nem fizet
- Pl.: 1.0 a felső sorban csak 1 esetben lehetséges, ha mindenki fizet, 0 a felső sorban viszont 126 különböző esetben lehetséges (az Egyén és a további 4 játékos fizet és 5 nem)

Általános alak

Fizet	P_{10}	P_9	P_8	P_7	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1
Nem fizet	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}

- P_k k játékos köztük az egyén fizet
- N_k k játékos köztük az egyén nem fizet

A következő táblázat a kifizetési osztályokat és az adott osztályokhoz tartozó kimenetek

számát tartalmazza.

Kifizetési osztályok	Az osztályba tartozó kimenetek száma
N_1	1
N_2	9
N_3	36
N_4	81
$P_{10} N_5$	1, 126
$P_9 N_6$	9, 126
$P_8 N_7$	36, 84
$P_7 N_8$	84, 36
$P_6 N_9$	126, 9
$P_5 N_{10}$	126, 1
P_4	84
P_3	36
P_2	9
P_1	1

P_4, P_3, P_2, P_1 - minimax vonal alá esnek. Az Egyén úgy akadályozhatja meg, hogy nem fizet viszont a szembenálló játékosok kiegészítő N_6, N_7, N_8, N_9 kimeneteli is meg lesznek akadályozva. Pl.: N_9 csak akkor jöhet létre, ha egyik játékos hajlandó fizetni, amikor senki más nem hajlandó, azaz hajlandó kitenni magát a P_1 kimenetelnek. Ezek egyik sem megvalósítható kimenetel, hiszen néhány játékosnak a minimax vonal alá kellene süllyednie.

A megvalósítható halmazból kell választani a játékosoknak, olyan kimenetelt keresniük, amelyben egyetértenek. Ha e kimenetek valamelyike Condorcet-választás a halmaz tekintetében, az lesz a játszma kiemelkedő racionális kimenete.

A Condorcet-választás két típusát különböztetjük meg

- **Definíció:** j erős Condorcet-választás, ha M halmaz minden egyes k eleméhez képest ($k \neq j$) C többsége preferálja, azaz $c_{jk} > n/2$, minden esetben, ha ($k \neq j$).
- **Definíció:** j gyenge Condorcet-választás, ha nem erős Condorcet-választás, hanem minden egyes ($k \neq j$) esetben, C -ben többen preferálják j -t k -hoz képest, mint k -t j -hez képest, azaz $c_{jk} > c_{kj}$, minden esetben, ha ($k \neq j$).

- n : a csoport létszáma
- j, k : kimenetek az M megvalósítható mátrixból
- C : csoport választása az n személyes kollektív cselekvés-játszma mátrix kimeneteli között

Belátható, hogy legfeljebb egy Condorcet-választás lehetséges.

Tétel: az n szereplős kollektív cselekvés játszmában P_n Condorcet-választás a játszma megvalósítható kimeneteleinek halmazából, erős Condorcet-választás, kivéve azt a játszmát, amelyben n páros szám és $r=2$, ebben az esetben P_n gyenge Condorcet-választás a megvalósítható kimenetek halmazából. Az esszé végén a tétel bizonyítása címszónál található, meg ennek a bizonyítása.

Kollektív cselekvés elfajult esetei

A kollektív cselekvés szélsőséges esetei során elfajult játszmáinak különböző osztályai tűnhetnek fel.

Ha $r=1$ (haszon-költség aránya)

- Megvalósítható kimenetek P_n és N_n és minden játékos közömbös az iránt, hogy melyik valósul meg közülük.
- Ha $r < 1$ akkor 1 kimenet $N_n \rightarrow$ nem játsszák le a játszmát

Ha $n=2$ (foglyok száma), akkor 5 különböző lehetőség: $r < 1$, $r=1$, $1 < r < 2$, $r=2$, $r > 2$

- $r < 1$ és $r=1$ esetén elfajult.
- $r=2$ minden kimenetel megvalósulhat és mindkét játék kimenetele gyenge Condorcet-választás
- $r > 2$ minden játékosnak nagyobb a megtérülése, mint a hozzájárulásuk, így feltehetően mindkettő fizetni fog és learatja a hasznot
- $1 < r < 2$ esetén pedig az alábbi mátrix

$r-1,$	$r-1$	$r/2-1$	$r/2$
$r/2,$	$r/2-1$	0,	0

A mátrix játszmáinak kifizetései preferencia sorrend szerint: $r/2 > r-1 > 0 > r/2-1$

Általánosított alakja a következő

J,	J	Bk,	K
K,	Bk	B,	B

Ahol a K – Kísértés az eltérésre, J – Jutalom (az együttműködésért), B – Büntetés (az eltérésért), B_k – Balek kifizetése az (együttműködésért). Preferencia sorrend: $K > J > B > B_k$

A preferencia sorrendből és a felső mátrixból jól látható, hogy csak az $(r-1, r-1)$ és $(0, 0)$ kimenetek valósíthatók, és hogy $(r-1, r-1)$ erős Condorcet-választás

Következtetések

- A kollektív cselekvés megjeleníthető a fogolydilemmához hasonló stratégiai szerkezetű játszmaként.
- Kollektív cselekvés olyan játszmában, ahol hasznok és hozzájárulások aránya $r > 1$, az összes megvalósítható kimenetek halmazából az a kimenetel, amelyhez az összes résztvevő hozzájárul, Condorcet-választás.
- Ha létezik Condorcet-választás, amely a definíciója szerint egyetlen, azt is jelenti, hogy egy valódi csoport is dönthet a Condorcet-választás mellett az összes többi megvalósítható következménnyel szemben
- „Mindenki mindenki ellen” fenyegetés nem logikai szükségszerűség, inkább csak potenciálisan hasznos eszköz.
- Fogoly dilemmán belül is vitás, hogy az együttműködés vagy a nem együttműködés kimenetele-e a racionális vagy logikus.

A tétel bizonyítása

Vegyünk egy m játékosból álló kollektív csoportot a kollektív cselekvés játszmában, amelyben a hasznoknak a hozzájárulásokhoz viszonyított aránya r . Amikor P_k osztály valamelyik kimenetele k játékosok számára érhető el, akkor a többi játékos számára N_{m-k} osztály kiegészítő kimenetele lesz elérhető. P_k osztályban lévő összes kimenetelt k játékosok számára és az N_{m-k} osztályban lévőket $(m - k)$ játékosok számára. Jelöljük c_{mk} -val azoknak a játékosoknak a számát, akik P_m kimenetelt preferálják k halmaz kimeneteleihez képest.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy a kollektív cselekvés m személyes játszmájának megvalósítható kimenetelei közül P_m Condorcet-választás, csak azt kell megmutatnunk, hogy minden $k < m$ esetén

$$(1a) \quad c_{mk} > m/2 \text{ vagy}$$

$$(1b) \quad c_{mk} > c_{km} \text{ vagy}$$

$$(1c) \quad \text{a } k \text{ halmaz kimenetelei nem megvalósíthatók.}$$

Szükséges még a bizonyításhoz az a feltétel, amely meg nem valósíthatóvá tesz egy

kimenetelt, az, hogy e kimenetel bizonyos játékosok számára kisebb kifizetést eredményezzen, mint a minimax kimenetelük, azaz nullánál kevesebbet. Amennyiben P_k osztályba tartozó kimenetel megvalósulása eseté, $n_m - k$ pedig az $N_m - k$ osztályba tartozó kiegészítő kimenetel esetén adódó kifizetést, akkor

$$(2) \quad p_k - kr/m$$

$$(3) \quad n_{m-k} - kr/m$$

A bizonyításhoz még szükséges két feltétel:

1. Feltétel: k kimenetelhalmaz kimenetelei nem megvalósíthatók, amennyiben $p_k < 0$.

A P_m esetén adódó kifizetés $(r - 1)$ lesz. P_k esetén, ahol $k < m$, a kifizetés $p_k < (r - 1)$ lesz. Ebből következik, hogy:

2. Feltétel: A P_k osztály kimenetelében k játékosok, ahol $k < m$, P_m kimenetelt fogják preferálni P_k kimenetelhez képest.

A tétel bizonyítása

A tétel bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy az 1. Követelmény k három lehetséges értéke esetén teljesül: I. $k > m/2$; II. $k < m/2$; és III. $k = m/2$.

- I. Tartomány:

$$k > m/2$$

A 2. Feltételből következőleg k játékosok P_m -t preferálják P_k -val szemben, így $c_{mk} > m/2$. Az (1a) követelmény teljesül.

- II. Tartomány:

$$(4) \quad k < m/2$$

A fizetés értékének három tartománya van azon játékosok számára, akik nem fizetnek: (a) $kr/m < (r - 1)$; (b) $kr/m = (r - 1)$; és (c) $kr/m > (r - 1)$. Meg kell mutatnunk, hogy az (1) követelmény mindegyik esetben teljesül.

$$kr/m < (r - 1) \quad (a)$$

Ebben a tartományban, amint az (2) és (3)-ból világosan következik, minden játékos P_m -et fogja előnyben részesíteni (P_k, N_{m-k}) halmazzal szemben. Így teljesül az (1a) követelmény.

$$kr/m = (r - 1) \quad (b)$$

Ebből következik, hogy

$$(5) \quad \begin{aligned} kr &= mr - m \text{ vagy} \\ (m - k)r &= m. \end{aligned}$$

De (4)-et figyelembe véve arra jutunk, hogy

$$(6) \quad m > 2k.$$

(5) és (6) alapján

$$(2k - k)r < m \text{ vagy}$$

$$(7) \quad kr/m < 1$$

De azok kifizetése, akik fizetnek, (2)-ből fog következni,

$$p_k = kr/m - 1$$

(7)-ből az következik, hogy

$$p_k < 1 - 1 \text{ vagy}$$

$$p_k < 0.$$

Az 1. Feltételből következik, hogy k kimenetelhalmaz kimenetelei nem megvalósíthatók. Így az (1c) követelmény teljesül.

$$kr/m > r - 1(4) \quad (c)$$

A fenti (b) feltétel argumentumával majdnem azonos argumentum segítségével arra jutnak, hogy

$$kr > mr - m \text{ vagy}$$

$$(m - k)r < m$$

(6)-ból következik, hogy

$$kr < m \text{ vagy}$$

$$kr/m < 1.$$

Ez egyezik (7)-tel; a fenti argumentumból tehát az következik, hogy (1c) követelmény teljesül.

III. Tartomány:

$$k = m/2$$

(2)-ből és (3)-ból az következik, hogy

$$(8) \quad p_k = r/2 - 1 \text{ és}$$

$$(9) \quad n_{m-k} = r/2.$$

Ahogy II.-ban, három lehetőség van:

$$(a) \ r/2 < r - 1; \ (b) \ r/2 = r - 1; \ \text{és} \ (c) \ r/2 > r - 1.$$

$$r/2 < r - 1 \quad (a)$$

(8)-ből és (9)-ből világosan következik, hogy ebben a tartományban minden játkos P_m kimenetelt részesíti előnyben (P_k, N_{m-k}) halmazhoz képest. Így (1a) követelmény

teljesül.

$$(10) \quad r/2 = r-1 \quad (b)$$

A 2. Feltételből az következik, hogy $m/2$ játékosok preferálják P_m -et (P_k, N_{m-k}) halmazhoz képest; és (9)-ből az következik, hogy a többi $m/2$ játékos közömbös a P_m és e halmaz közötti választásban. Így $c_{mk} = m/2$, $c_{mk} = 0$, úgyhogy $c_{mk} < c_{km}$. Az (1b) követelmény teljesül.

$$r/2 > r - 1. \quad (c)$$

Ebből az következik, hogy

$$r/2 < 1.$$

Így (8)-ból azt kapjuk, hogy

$$p_k < 1 - 1 \text{ vagy}$$

$$p_k < 0.$$

Az 1. Feltételből az következik, hogy a k kimenetelhalmaz kimenetelei nem megvalósíthatók. Így (1c) követelmény teljesül.

Az (1) követelmény teljesül r és m minden értéke esetén, úgyhogy a kollektív cselekvés játszmaja megvalósítható kimeneteleinek halmazában létezik Condorcet-választás. Sőt az (1) követelmény akár (a), akár (c) változata majdnem minden esetben teljesül, P_m ennél fogva minden esetben erős Condorcet-választás. Ez alól az egyetlen kivétel (III.b) esete, amelyben (1b) követelmény teljesül; ebben az esetben m osztható 2-vel és (10)-ből látható, hogy $r = 2$. Ebből következőleg P_m gyenge Condorcet-választás a kollektív cselekvés játszmajának megvalósítható kimenetelei közül, amelyben páros számú játékos játszik és $r = 2$. A tétel bizonyítva van.

• A nép akarata - Grósz Tamás

Johnson, David B.: Közösségi döntések elmélete, 5. fejezet alapján

Bevezetés

A társadalmat alkotó emberek különböző preferenciákkal rendelkeznek a magán- és a közjavakra vonatkozóan, mely preferenciák intenzitása is rendkívül eltérő lehet. A közösségekben élő emberek számára nagyon fontos eszköz a preferencia kifejezés, mivel csak akkor tudjuk a szűkös erőforrásokat a közösség szempontjából hatékonyan elosztani, ha információval rendelkezünk az emberek preferenciáiról. Napjainkra a rendkívül nagy fontosságra tett szert a politikai gazdaságtan, amely a preferencia-kifejezési eljárásokat, illetve azok hatékonyságát tanulmányozza a politikai és a magánpiacon.

Mik is valójában a preferencia-kifejezés eszközei? Belátható, hogy a szabad magánpiacon az árakra tekinthetünk úgy, mint aggregált preferencia-kifejezési eszköz. Ennek magyarázata, hogy a termelők tájékozódnak a fogyasztók preferenciáiról (kereslet), a fogyasztókat pedig tájékoztatják a javak viszonylagos szűkösségéről (kínálat). Az árak a következő hatással rendelkeznek: a termelőket arra ösztönzi, hogy a ritka forrásból és javakból többet állítson elő, a fogyasztót pedig megjutalmazza a legkritkább szolgáltatások és javak megóvásáért, azaz túl magas ár esetén nem veszi meg a terméket.

A politikai piacon a preferencia-kifejezés eszközeinek hasonló szerepet kell ellátniuk. Egy országban használt preferencia-kifejezési eszközök típusát meghatározza a politikai berendezkedése. Diktatúra esetén két lehetőség van:

- Totális diktatúra: csak a diktátor preferenciája számít, parancsai az ő preferenciarendezését és preferenciái intenzitását jelzik.
- Puha diktatúra: a diktátor és az őt korlátozó politikai ellenzék preferenciái fejeződnek ki.

Oligarchikus és elitista berendezkedés esetén is a diktatúrához hasonló eszközöket figyelhetünk meg.

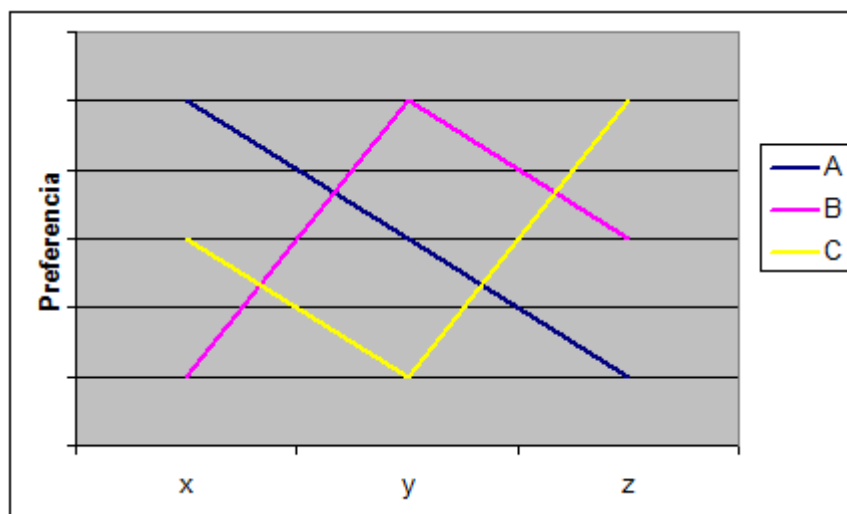
A diktatúra eszközei azonban nem felelnek meg a demokrácia kívánalmainak, nem teljesül, hogy minden polgár preferenciája számít. A preferencia-kifejezési eszközök hatékonyságának vizsgálatához fontos bevezetni az individualisztikus modellt.

Individualisztikus modell: az állam az emberek összessége, nem pedig egy az egyénektől függetlenül létező organikus entitás.

Az individualisztikus modell azt fejezi ki, hogy demokrácia esetén az egyéni szavazat a preferencia-kifejezés legjobb módja, persze ez azon feltétel teljesülése esetén igaz, hogy a polgárok tájékozódnak a politikai kérdésekről és jelöltekről, illetve ténylegesen elmennek szavazni is.

Preferenciarendezés

Döntés esetén minden ember rangsorolni tudja különböző szempontok szerint a választható alternatívákat, így lényegében egy preferenciarendezést készít. A preferenciákat többféle módon is ábrázolhatjuk, például grafikusan. Az 1. ábrán 3 preferenciagörbét láthatunk, 3



1. ábra Preferenciagörbék

alternatíva (x,y,z) felett.

A preferenciagörbék egyik fontos tulajdonsága, hogy egycsúcsú-e. Egy preferenciagörbe egycsúcsú, ha maximum csak egyszer változtat irányt és akkor is lefelé tart (a minimumpontja a görbe valamelyik szélén található). Az 1. ábrán például az A és B is egycsúcsú, de a C többcsúcsú.

Abszolút többség elvén nyugvó szavazás és a diszkrimináció

Politikai piacon az egyéni szavazással kialakuló eredmény fejezi ki a preferenciákat, a szavazás módszere azonban sokféle lehet.

Tekintsük a legegyszerűbb szavazási módszert, az abszolút többség elvén alapulót. Ezen szavazási módszer esetén minden szavazó megjelöl egy alternatívát (amit legjobban preferál), a szavazást az az alternatíva nyeri, amelynek sikerül a szavazatok több mint felét (50%+1) megszereznie. A módszer megértéséhez vegyük a következő példát: egy 300 fős közösségnek

döntenie kell egy 25 000 értékű közjóság előállítandó mennyiségéről. A 300 fős közösség 2 csoportra oszlik: A (100 fő) és B (200 fő). A két csoport közjóságra vonatkozó határértékelése:

A közjavak egységei	A csoport	B csoport
1	150	200
2	125	175
3	100	150
4	60	120
5	50	100
6	25	50
7	0	0

1. táblázat

A politikai piacon, ahogy a szabadpiacon is, minden egyén azt szeretné, hogy határértékelése egyenlő legyen a piaci árral. Amennyiben kikötjük, hogy az A csoport tagjainak 50, a B csoport tagjainak pedig 100 egységet kell fizetniük, akkor a döntés 5 közjóság megvétele lenne.

Amikor egy gazdaságban a javaknak a gazdasági szereplők közötti elosztását megváltoztatjuk, *Pareto-javítást* hajtunk végre, ha legalább egy szereplő jólétét javítjuk anélkül, hogy bárki más jóléte (hasznossága) csökkenne. Egy elosztás akkor Pareto-hatékony, ha már nem végezhető rajta Pareto-javítás. A Pareto-hatékony elosztást **Pareto-optimumnak** is nevezzük. Látható, hogy az 5 közjóság megvétele Pareto-optimális döntés, mivel $100 \cdot 50 + 200 \cdot 100 = 25\,000$, Pareto-javítás pedig már nem lehetséges.

A többség elvén nyugvó szavazás igazán akkor hatékony, ha csak 2 alternatíva közül kell választani, több alternatíva esetén könnyen előfordulhat, hogy egyik alternatíva se szerzi meg a többséget, így nem születik döntés.

Diszkriminancia

A többség elvén nyugvó szavazás nagy hátránya, hogy a többség rákényszerítheti akaratát a kisebbségre, ezt nevezzük diszkriminanciának. Néhány példa diszkriminációra:

1. Amennyiben törvény nem tiltja, a B csoport tagjai átháríthatják az összes adóterhet az A csoportra, hiszen többségben vannak, és senki nem szeret adózni. Ekkor a B csoport tagjai 7 közjóság megvételére szavaznak (ekkor lesz a határértékelésük 0) és a teljes költséget az A

csoport tagjaival, így 250-et kell fizetniük egységenként annak ellenére, hogy még a legelsőt is csak 150-re értékelik.

2. Vegyük a következő esetet, mindenkinek 100 egységnyi adót kell fizetnie. Az A csoport ekkor 3 közjóság megvételére szavaz, B viszont továbbra is 5 darabra fog szavazni. A döntés 200 szavazattal 5 darab megvétele lesz, azaz $300 \cdot 100 = 30\,000$ -et fog fizetni a közösség egy olyan közjóságért, ami csak 25 000-et ér (erőforrások pazarlása).

Wicksell egyöntetűségi szabály

Knut Wicksell felismerve a diszkriminancia problémáját a következő javaslatokat tette annak kiküszöbölésére:

- Minden kiadási törvény legyen összekapcsolva egy adótörvénnyel, lehetővé téve, hogy az állami kiadások költségeit és hasznait egyidejűleg figyelembe véve döntsenek a képviselők.
- A döntést egyhangúlag kell meghozni, ezzel megakadályozva, hogy a többség rákényszerítse akaratát a kisebbségre.

Bár a javaslatok valóban megoldják a diszkriminancia problémáját, de a valóságban 2 nagy probléma merül fel velük kapcsolatban. Az első, hogy egyhangú döntés elérése rengeteg időt és más forrást emészt fel, a második, hogy stratégia viselkedésre ösztönöz. Stratégiai viselkedés alatt azt értjük, hogy a szavazó megváltoztatja a preferenciáját, jelen esetben megvétőzza a döntést mindaddig, amíg az ő akarata nem teljesül (például minden hasznot neki nem adnak). Ezen problémák kiküszöbölésére ad megoldást az interakciós költségek elmélete.

Interakciós költségek elmélete: a kollektív döntéshozatal során a társadalomban az emberek kétféle költséggel szembesülnek, az alkuköltséggel és a döntéshozatali költséggel. A döntés eléréséhez az egyetértő szavazók százalékarányát meghatározhatjuk úgy, hogy megkeressük azt az arányt, amikor a két költség összege minimális.

Relatív többség elvén nyugvó szavazás

Ez a szavazási módszer főleg az angolszász országokban terjedt el, a módszer lényege, hogy minden szavazó egy szavazatot adhat le és a legtöbb szavazatot kapott alternatíva lesz a győztes. Előnye, hogy mindig lesz győztes (esetleg győztesek), míg az abszolút többség elvén alapuló esetben ez nem teljesül. A megértéshez tekintsük a következő példát:

A (8 fő)	B (7 fő)	C (5 fő)	D (3 fő)	E (2 fő)
v	z	w	y	x
y	y	x	z	w
x	x	y	x	v
w	w	z	w	y
z	v	v	v	z

2. táblázat

Látható, hogy a győztes a v alternatíva lesz 8 szavazattal, annak ellenére, hogy a legtöbb szavazó (15 fő) számára v a legkevésbé preferált alternatíva. Ebből már láthatjuk is a módszer gyengeségét: csak a legelső preferenciákat veszi figyelembe, azt feltételezve, hogy a választókat első preferenciájukat kivéve nem érdekli az alternatívák sorrendje. Tehát nem teljesíti a hatékony szavazási rendszerekkel szemben támasztott feltételeket:

- A szavazók teljes preferenciáját reprezentálja
- Azt az alternatívát kell győztesnek kihoznia, amely átlagosan a legjobb helyet foglalja el a választók preferenciáiban

Relatív többségen alapuló szavazás legnagyobb veszélye, hogy szélsőséges alternatívát hozhat ki győztesnek, amelyet a szavazók abszolút többsége elutasít. Erre példa, hogy Adolf Hitler a szavazatok 40%-ánál soha nem szerzett többet, mégis megválasztották, mivel ezt a szavazási módszer volt használatban.

Relatív többség elvén nyugvó előválasztás

Az előválasztási rendszereket általában az alternatívák számának csökkentésére lehet használni. A relatív többség elvén nyugvó előválasztás során az első fordulóban minden alternatívát szavazásra bocsátanak, második fordulóban pedig már csak a két legtöbb szavazatot kapott alternatíva versenyez. A 2. táblázatban a v és z kerül be a második fordulóba, majd 15 szavazattal z nyer.

Ezen módszer súlyos hibája, hogy első fordulóban könnyen kieshet az a jelölt, aki a szavazók preferenciáiban átlagban a legjobb helyet foglalja el (2.táblázatban az y alternatíva). További hátrány, hogy stratégiai viselkedést vált ki a választókból, ami eltorzíthatja az eredményt. A 3. táblázatban látható preferenciarendezések esetén első fordulóban kiesik az X alternatíva 700 szavazattal, majd 1500 szavazattal V nyer. Most tekintsük a következő esetet: A D csoport tagjaihoz eljut a rémhír, hogy kedvencüknek, W-nek esélye sincs arra, hogy bejusson a második körbe. Emiatt D tagjai átrendezik a preferenciájukat (V és W megcserélődik). Első

fordulón ekkor a V és X - V 1100, X 700 szavazattal - jut tovább, második fordulóban pedig X nyer 1300 szavazattal (B és C szavazatai).

A (800 fő)	B (700 fő)	C (600 fő)	D (300 fő)
V	X	W	W
W	V	X	V
X	W	V	X

3. táblázat

A fent ismertetett esetben V elveszítette a választást mivel előrébb került néhány szavazó preferenciarendjében, ezt a paradoxont monocitási paradoxonnak nevezik.

Monocitási paradoxon: egy jelöltnek árthat, ha néhány szavazó preferenciarendjében előrébb kerül, miközben a többi szavazó nem változtat a preferencia sorrendjén.

Alternatívás szavazás

Ezt a szavazási rendszert Ausztráliában használják, elmondható, hogy hatékonyabb az előbbi két relatív többségen alapuló módszernél. Alternatívás szavazás során a választó rangsorolja a jelölteket, ha valamelyik jelölt megszerzi a szavazatok több mint felét, akkor győz. Amennyiben egyik alternatíva se győz, akkor a legkevesebb elsőpreferencia-szavazatot begyűjtő jelölt kiesik, és a rá leadott szavazatokat azok kapják, akiket mögötte a szavazók második helyre rangsoroltak. Az eljárás mindaddig folytatódik, amíg győztest nem találunk.

A 2. táblázat esetén első lépésben nincs győztes, így x-et kizárják, mert ő kapta a legkevesebb szavazatot. Következő lépésben w megkapja az x-re leadott két szavazatot, majd y kiesik. Az y-ra leadott 3 szavazatot z kapja, a legkevesebb szavazatot ekkor w-re adták le (7 db). Miután már csak 2 alternatíva maradt (v és z) és z a 25-ből 15 szavazatot megszerzett, z lesz a győztes.

A legnagyobb probléma, hogy első fordulóban kieshet az a jelölt, akit mindenki a második helyre rangsorol és átlagosan a legjobban preferált lenne.

Kizárásos előválasztási rendszer

Kizárásos előválasztási rendszer esetén minden választó eggyel kevesebb szavazattal rendelkezik, mint ahány alternatíva van, lényegében a legkevésbé preferált alternatíván kívül az összes többire szavaz. Előválasztási rendszer, hiszen fordulókból áll, minden fordulóban kiesik a legkevesebb szavazatot szerző alternatíva, a végső szavazáson 2 alternatívából a több

szavazatot szerző nyer. Látható, hogy ezen módszer segítségével a választók teljes preferenciájukat kifejezhetik, tehát az a jelölt lesz a győztes, aki átlagosan a legjobban preferálnak. A választók stratégia viselkedése itt is eltorzíthatja az eredményt. Például a másodikként preferált alternatíva ellen szavazhatnak, ha azt hiszik, hogy az veszélyezteti az első helyre rangsorolt jelöltjüket.

Súlyozott rangsorolás elvén nyugvó szavazás

1781-ben Jean-Charle de Borda javasolta ezt a módszert. A választás során a szavazók rangsort készítenek, majd a választóbizottság a rangsorok elemeihez súlyokat rendelnek. A legtöbb súlyozott szavazatot szerző alternatíva lesz a győztes.

Vegyük a 2. táblázatban látható preferenciákat és a következő súlyozást: az első helyre 5, a másodikra 4, a harmadikra 3, a negyedikre 2, és az ötödikre 1 pont jár. Ekkor az alternatívák súlyozott szavazatai: $v = 61$, $w = 69$, $x = 84$, $y = 94$, $z = 67$. Tehát az y alternatíva lesz a győztes, amely átlagosan is a legjobban preferált alternatíva.

A súlyozott rangsorolás egyszerű, könnyen megérthető és számítható, a választók teljes preferenciáját figyelembe veszi és a hatékony jelöltet választja ki.

Napjainkban a F1 autóverseny használja ezt a módszert a világbajnok kiválasztására a versenyek eredményei alapján.

Jóváhagyásos szavazás

A jóváhagyásos szavazás az egyik legújabb szavazási mechanizmus, lényege, hogy a szavazók nem csak egyetlen jelöltre szavazhatnak, hanem az összes olyan jelöltre, akit elfogadhatónak tartanak. A szavazást az a jelölt nyeri, aki a legtöbb szavazatot kapja.

A módszer előnye, hogy nagyobb valószínűséggel választja a hatékony jelöltet, mint a relatív többség elvén nyugvó, illetve csökkenti annak a lehetőségét, hogy szélsőséges jelölt nyerjen.

Ahogy a többi módszernél, úgy ennél is gondot okoz a szavazók stratégiai viselkedése. Előfordulhat, hogy egy jelöltet - aki amúgy elfogadható - azért nem fogad el egy szavazó, mert az veszélyezteti a leginkább preferált jelöltjét.

A módszer során nagyon fontos kérdés, hogy az egyes választók a preferencia-sorrendjükből mennyi alternatívát tartanak elfogadhatónak. Például a 2. táblázatban látható preferenciák esetén befolyásolja az eredményt, hogy az első 3 vagy az első 2 helyen szereplőt tartják-e elfogadhatónak:

Alternatívák	Szavazatok (első 3)	Szavazatok (első 2)
v	10	8
w	7	7
x	25	7
y	23	15
z	10	10

4. táblázat

A 4. táblázatban láthatjuk, hogy ha az első 3 az elfogadható alternatíva, akkor az x nyer, míg ha csak az első 2 akkor az y nyer.

Pontelosztásos módszer

Ezen módszerben már nem csak a szavazók preferenciáit kívánjuk figyelembe venni, hanem azok intenzitását is. Ezt a következő módon tehetjük meg: szavazás során minden választónak 100 pontot kell szétosztania az alternatívák között, az egyes alternatívákhoz rendelt pontszámok a preferencia intenzitást reprezentálják.

Sajnos a valóságban a stratégia viselkedés miatt nem igazán működik a módszer, a többség mind a 100 pontot annak a jelöltnek adja, akit a leginkább preferál, ezzel a módszer relatív többség elvén nyugvó szavazássá fajul.

Körkörös többség, intranszitiv társadalmi preferenciák, avagy sok hűhó szinte semmiért

Egy szavazó preferenciarendezéséről akkor mondjuk, hogy tranzitív, ha nincs benne ellentmondás vagy ciklus. Körkörös többségről akkor beszélhetünk, ha egyik alternatíva se szerez abszolút többséget az összes többivel szemben. Példa:

A	B	C
v	w	x
w	x	v
x	v	w

5. táblázat

Az 5. táblázatban látható preferenciák esetén az x alternatíva 2 esetben jobb a v-nél, v 2 esetben jobb w-nél, ami pedig a gondot okozza: w 2 esetben jobb x-nél. A kialakuló preferencia-sorrend egy ciklus: $x > v > w > x$, a szavazásnak nincs egyértelmű győztese. Ezt az

eredményt nevezik intranzitivitásnak, lehetetlenségi tételnek vagy Arrow-problémának. A fenti preferenciák esetén a korábban ismertetett módszerek közül se a relatív többség elvén alapuló, se a súlyozott, de még a kizárásos előválasztási rendszer se adna eredményt, ez önkényes választási eredményhez vezethet.

Intranzitív társadalmi preferenciáról akkor beszélhetünk, ha némely szavazó preferenciagörbéje többcsúcsú (jelen példában a C választóé). A valóságban akkor alakulhat ki intranzitivitás, ha a szavazók jelentős százalékának többcsúcsú a preferenciarendezése, amennyiben ez kialakul, akkor az egész választás feleslegessé válik, mivel végül önkényes eredmény születik.

• Intertemporális erőforrás-allokáció – Hegyaljai Norbert

Bevezetés

Az intertemporális döntéshozatal több tudományágban is fontos kutatási területnek számít. Megjelenik a mikroökonómián belül, a fogyasztáselméletben ahol a vásárlók időközi fogyasztási döntéseit vizsgálják vagyis, hogy milyen plusz jövedelemért cserélik le a jelenbeli fogyasztásukat egy jövőbeli fogyasztásra és fordítva, milyen költséget hajlandóak fizetni az előrehozott fogyasztásért. A viselkedési közgazdaságtan is foglalkozik a témával, az előzőeket kibővítve olyan szociológiai és pszichológiai tényezőkkel amelyek eltéríthetik a fogyasztót a racionális döntésektől. Fontos részét képezi még a közösségi döntések elméletének ahol a gazdasági és a politikai piac intertemporális erőforrás-allokációval kapcsolatos döntéseinek hatását vizsgálják. Ez a dokumentum főleg az utóbbi terület alapvető összefüggéseivel foglalkozik.

A dokumentum a következő struktúra alapján rendeződik: először bemutatom a használt alapfogalmakat, majd megvizsgálom az intertemporális erőforrás-allokáció kérdéskörét, tényezőinek összefüggéseit és egymásra hatását. Az esszé során megpróbálom gyakorlati példák alapján, egyszerűen bemutatni a témát, úgy hogy előzetes alaptudás nélkül is érthető legyen.

Alapfogalmak

Először magát az intertemporális erőforrás-allokáció fogalmát szeretném bemutatni, kezdjük a szavak jelentésével.

intertemporális – időközi

erőforrás allokáció – az erőforrás elhelyezés

Tehát az intertemporális erőforrás allokáció az erőforrások (például az egyszerűség kedvéért gondoljunk a pénzre mint erőforrásra) felhasználásának az elhelyezését jelenti az időskálán. Egy felületes példán keresztül szemléltetve sokkal egyszerűbb a megértés.

Példa: Egy személynek meghatározott pénzmennyisége van, kétféle döntési lehetősége van, az egyik hogy azonnal elkölti a pénzt a másik, hogy később költi el. Ha elkölti, akkor kielégítette valamilyen szükségletét és ez a számára nyilvánvalóan pozitív, ha viszont nem költi el akkor kölcsön adhatja valakinek vagy befektetheti, ekkor egy idő után több pénzt kap vissza, tehát a jelenbeli fogyasztását elhalasztotta egy jövőbeli fogyasztásra, meghatározott haszonért cserébe. Ebből láthatóan a döntési probléma az lesz hogy mekkora haszon mellett

és mekkora időtávra éri meg az egyénnek elhalasztani a fogyasztását.

A továbbiakban az intertemporális erőforrás-allokációhoz szorosan kapcsolódó tényezők fogalmát ismertetném, amelyek szorosan kapcsolódnak a modern pénzügyek egyik alaptételéhez, a pénz időértékének elvéhez, amely szerint egy egységnyi mai pénz, értékesebb mint egy egységnyi jövőbeni pénz. A tényezők a következők: jelenérték, jövőérték, kamatláb.

- **Jelenérték** (PV – present value) – kifejezi az egy egységnyi jövőbeni pénz jelenlegi értékét, a meghatározott kamatláb alapján

$$PV = \frac{FV}{1 + r}$$

- **Jövőérték** (FV – future value) – kifejezi az egy egységnyi jelenleg befektetett pénz egy bizonyos időszak utáni megnövekedett jövőbeni értékét, a meghatározott kamatláb alapján

$$FV = PV(1 + r)$$

- **Kamatláb** (r) – a jövőérték és a jelenérték közötti különbség aránya a jelenértékhez viszonyítva

$$r = \frac{FV - PV}{PV}$$

Ez a három tényező szoros összefüggésben van egymással, ezt később közelebbről is bemutatom. Miután megismerkedtünk az alapfogalmakkal és van egy felületes képünk a problémáról, ismerjük meg azt közelebbről.

Intertemporális erőforrás-allokáció

Az intertemporális erőforrás-allokáció igen fontos szerepet játszik a közösségi döntések elméletében. A gazdasági és politikai piacokon jelenlévő probléma komoly félreértéseket okozott a szakértők között. Vizsgáljuk meg ezt egy aktuális problémán keresztül.

Példa: Jelenleg az emberiség egyik legnagyobb problémájának számít földünk erőforrásainak a hosszú távú helyes hasznosítása, ami jelentősen kapcsolódik témánkhoz. Egyes bíráló vélemények szerint az erőforrások kimerülését a piaci mechanizmus okozza, mivel a fogyasztók és a termelők nem érdekeltek az erőforrások megőrzésében. A piaci szereplőket egyik oldalról csak a szükségleteik kielégítése a másik oldalról pedig a profit mielőbbi realizálása foglalkoztatja. Ennek eredményeképp túl sok fát vágunk ki, túl sok halat halászunk, túl sok kőolajat termelünk ki stb. A jövő nemzedékre csak túlfogyasztást és környezetszennyezést hagyunk. A bírálók szerint ezeket a problémákat a politikai piac eszközeivel lehetne szabályozni. A törvényi keretbe foglalás elsőre meggyőző, azonban a

teljesebb kép érdekében hasonlítsuk össze a két piacon jelenlévő, az erőforrások megőrzésére ösztönző erőket.

A magánpiac bírálói sok erőforrás pazarlását a piac számlájára írják, miközben ez nem jogos, sok esetben a törvényhozás a vétkes, mert nem határozta meg pontosan az erőforrások tulajdonjogait. Ahol a tulajdonjogok nincsenek meghatározva a magánpiac nem tud hatékonyan működni, ami azt feltételezni hogy ezekről az erőforrásokról a politikai piacnak kell gondoskodnia. A köztulajdonban lévő erőforrások merülnek ki leggyorsabban mivel senkinek nem áll érdekében a megőrzésük. Egyes állatfajok azért kerültek a kihalás szélére mert az emberek csak úgy vehették őket tulajdonba ha megölték őket. Ilyenkor a törvény erejével kellene szabályozni az erőforrások felhasználását.

Példa: az Amerikában őshonos bölénycsordáknak a túlzott vadászat miatt drasztikusan lecsökkent az állományuk. Egy idő után a vadászok is megértették hogy nem kellene ilyen meggondolatlanul vadászni, de mivel a tulajdonjogok nem voltak meghatározva, a vadászok úgy gondolták ha nem ők lövik le a bölényt akkor valaki más fogja, így folytatták a vadászatot. Nagyon sokáig kellett várni bölényeket védő törvények bevezetésére, és eddig a pontig csak olyan csordák maradhattak fenn amelyek magánterületen legelésztek.

Tehát az erőforrások magánúton történő megőrzésének kulcsa a tulajdonjog, ugyanis amíg a javak nincsenek magántulajdonban a piaci mechanizmusok nem tudnak érvényesülni, mivel senkinek sem származik közvetlen haszna a megőrzésükből.

Sok erőforrás esetében a tulajdonjog meghatározása túlságosan költséges, ezek felhasználását a politikai piac döntéshozatali mechanizmusán keresztül kell korlátozni, például az óceánokban lévő halrajok túlzott halászatát a halászati jogok kiárúsításával lehetne korlátozni.

Intertemporális döntéshozatal

A magánpiacon az intertemporális erőforrás-allokáció legfontosabb tényezői a kamatláb, a folyó ár és a várható jövőbeni ár. A kamat azért létezik mert az emberek előnyben részesítik a javakhoz való korábbi hozzáférést a későbbi hozzáféréssel szemben, és mert a mai fogyasztás csökkentése lehetővé teszi a jövőbeni fogyasztás növelését.

Példa: valaki választhat, hogy ma, vagy mához egy évre kapjon egy gallon benzint. A döntésnél több tényezőt is figyelembe kell venni ha az egy év múlva esedékes időpontot választja, akkor a benzint egy évig nem használhatja fel, sőt azzal is számolnia kell hogy lehetséges hogy már nem lesz életben. Ha a jelenlegi időpontot választja akkor eladhatja és a

pénzt tőkejavakba fektetheti, amelyek a jövőben magasabb jövedelmet biztosítanak számára. Tehát ha ma lemondok egy gallon benzinnről, akkor azért a jövőben több benzint kell kapnom. Itt be kell vezetni az időpreferencia hányados fogalmát ami jelenbeli és a jövőbeli érték közötti átváltási összefüggés. Például 1.1 gallon benzint akarunk kapni a jövőben a jelenbeli felhasználás elhalasztásáért, ezt úgy is mondhatjuk hogy az 1.1 gallon benzin jelenértéke 1 gallon, vagy hogy a kamatláb 10%. A kamatláb tehát a korábbi elérhetőség magasabb értékét tükrözi a jószág jelenértékének százalékában kifejezve.

Példa: a kölcsönadó kölcsönad valakinek 100 dollárt, akkor ő lemond a jelenbeli fogyasztásáról annak érdekében, hogy amikor visszakapja már 110 dollárja legyen. A kölcsönvevő a 100 dollárral tegyük fel, hogy 10 ing vásárlóerőhöz jut, de ennek a 10 ingnek a költsége igazából 11 ing amelyről a jövőben lemond az egyén.

Jelenérték az idő múlásával csökken

Minél későbbre kell halasztani a fogyasztást a jelenérték annál alacsonyabb lesz, ugyanolyan kamatláb mellett.

$$90,91\$ = \frac{100\$}{1 + 0,1}$$

$$82,64\$ = \frac{100\$^2}{1 + 0,1}$$

$$75,13\$ = \frac{100\$^3}{1 + 0,1}$$

A jelenérték kiszámításának általános alakja, r éves kamatlábbal, és n időre.

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^n}$$

Minél alacsonyabb a kamatláb, annál magasabb a jelenérték

A jelenérték kiszámítása egyszerű, a kamatláb helyes kiválasztása viszont sok tényezőtől függ, mivel ennek kiválasztása igencsak nagy hatással van a jelenértékre, figyeljük meg a következő példát.

r = 5%

$$86,38\$ = \frac{100\$}{(1 + 0,05)^3}$$

r = 10%

$$75,13\$ = \frac{100\$}{(1 + 0,1)^3}$$

$r = 20\%$

$$57,87\$ = \frac{100\$}{(1 + 0,2)^3}$$

Figyeljük meg tehát, hogy minél magasabb a kamatláb annál kevesebb pénzt kell befizetni a bankba hogy egy év múlva 100 dollárunk legyen.

Példa: Egy munkás meg akarja győzni a főnökét hogy vegyen új számítógépet, a komputer 5 ezer dollárba kerül, a várható élettartalma 3 év. Tehát rá kell mutatni arra hogy a számítógép legalább 5000 dollár megtakarítást eredményez. Adatokkal alátámasztható hogy évente 2000 dollár költség megtakarítható évente.

$$4722\$ = \frac{2000\$}{1,13} + \frac{2000\$}{(1,13)^2} + \frac{2000\$}{(1,13)^3}$$

$$4973\$ = \frac{2000\$}{1,1} + \frac{2000\$}{(1,1)^2} + \frac{2000\$}{(1,1)^3}$$

$$5249\$ = \frac{2000\$}{1,07} + \frac{2000\$}{(1,07)^2} + \frac{2000\$}{(1,07)^3}$$

Tehát a 7%-os kamatláb estében érné meg a számítógép beszerzése. A vállalatoknál persze nem a saját igényeinkhez igazodva választunk kamatlábat, hanem előre meghatározott a vállalati politikában.

A költségek és hasznok értékelése kétféle módon történhet, állandó és folyó árakon. Állandó árakat használva nem számolunk az inflációs rátával, a folyó áraknál viszont igen.

Térjünk vissza a komputer vásárláshoz, tehát 2000 dollár takarítható meg évente a számítógép beszerzésével, a mai árakon kifejezve, és ezeket az árakat feltételezzük a jövő évekre nézve. Tehát az árak nincsenek kiigazítva az infláció hatásával, vagyis az állandó költségek és hasznok módszerét alkalmazzuk.

$$4973\$ = \frac{2000\$}{1,1} + \frac{2000\$}{(1,1)^2} + \frac{2000\$}{(1,1)^3}$$

Számoljunk 7%-os inflációs rátával, ekkor a következő években várható bérekkel számolunk.

$$5678\$ = 2140\$/1,1 + 2290\%/(1,1)^2 + 2450\%/(1,1)^3$$

Ebből látható hogy folyó árakkal számolva sokkal nagyobb jelenértéket kapunk.

A haszon kiszámítható állandó és folyó árak használatával is, csak fontos hogy a megfelelő kamatlábat használjuk, nem használhatjuk mindkét esetben ugyanazt. A piaci kamatláb két részből áll össze az inflációs rátából és a reálkamatlábból, az állandó módszer alkalmazásánál

nem szabad figyelembe venni a piaci kamatlábban megjelenő inflációs rátát. Tegyük fel hogy a piaci kamatláb 10%, a reálkamatláb 3% az inflációs ráta pedig 7%, ekkor az állandó kamatlábbal számolt jelenérték a következőképpen alakul.

$$5657\$ = \frac{2000\$}{1,03} + \frac{2000\$}{(1,03)^2} + \frac{2000\$}{(1,03)^3}$$

A folyó árak esetén pedig a piaci kamatlábbal számolunk helyesen.

$$5657\$ = \frac{2140\$}{1,1021} + \frac{2290\$}{(1,1021)^2} + \frac{2450\$}{(1,1021)^3}$$

Ekkor a két érték egyenlő lesz. A folyó áras módszernél a kamatláb meghatározásánál figyelembe kell vennünk egy statisztikai anomáliát, amely a két növekedési tényező egyesítéséből következik. $(1 + 0,1 + 0,03 \cdot 0,07)$

A kamatláb és a tőke határtermelékenysége

Ha a tőkepiacok szabadon működhetnek, nem szabályozzák a kamatlábakat, nem adóztatják meg a kamatbevételeket és nem korlátozzák a tőke nemzetközi áramlását, és kötvénykibocsátásból finanszírozzák a tőkeberuházásokat, akkor a kamatláb éppúgy tükrözi a tőke határtermelékenységet mint az egyének időpreferenciáit. Vagyis a kölcsönzött pénz után fizetendő kamatot a vállalatok egyenlővé kívánják tenni a beruházás határhozamával. Tehát egy beruházást akkor érdemes véghez vinni ha a kölcsön után fizetendő kamat kisebb vagy egyenlő a beruházás által megtermelt haszonnal.

Példa: a vállalatok a beruházásaik előtt értékelik az azzal járó költségeket és bevételeket, ezáltal meghatározzák a beruházások határhozamát, ezt a következő táblázat mutatja.

beruházás	beruházás határhozama (%)	beruházás	beruházás határhozama (%)
A	45	F	15
B	38	G	13
C	24	H	10
D	22	I	8
E	18	J	5

A vállalati beruházások legfontosabb tényezője hogy tőkéhez tud e jutni olyan feltételek mellett amelyek a beruházást vonzóvá teszik, tehát a kamatot összehasonlítják a tőke határhozamával.

A példa szerint ha 15%-os kamattal tudnának pénzhez jutni, akkor az F beruházásig mindet megvalósíthatnánk.

A kamatlábak tükrözik a fogyasztók időpreferenciáit, ha a fogyasztók a jelenbeli fogyasztást részesítik előnyben, akkor a kevesebb pénzt takarítanak meg, vagyis kevesebb pénz kerül a kötvénypiacra, ennek hatására a kamatlábak emelkednek. Fordított esetben viszont a kamatlábak csökkennek. Vagyis ha a fogyasztókra jobban jellemző fogyasztás későbbre halasztása akkor a vállalatok kötvény kibocsájtással, könnyebben tudják finanszírozni az alacsonyabb hozammal járó beruházásokat is.

Példa: a 10%-os kamatláb azt jelenti a fogyasztók hajlandók feláldozni 100 dollár jelenbeli fogyasztást 110 dollár jövő évi fogyasztásért, vagyis tükrözi a fogyasztók időpreferenciáit.

Adottnak véve az fogyasztók időpreferenciáit, a megtakarításaikat a kamatlábhoz igazítanák. Ha a kamatbevételeket nem adóztatnák meg a kamatláb tükrözné a jövőbeli és jelenbeli fogyasztás közötti átváltási összefüggést.

A kamatok befolyásoló tényezőihez tartozik még a kötvények lejárat ideje, ez lehet egy héttől, pár hónapon keresztül akár több év vagy évtized. A hosszabb lejáratú kötvények magasabb kamatot fizetnek. Másik fontos tényező még a kockázat, a magasabb kockázatú kötvényekre nagyobb kamatlábat határoznak meg. Legalacsonyabb kockázatuk és ezáltal kamatuk az állampapíroknak van, ez néhány százalék szokott lenni, ez szinte biztos garancia arra hogy visszkapjuk a pénzünk. Magasabb kockázattal jár a magánvállalatok kötvényeinek vásárlása, ehhez természetesen nagyobb kamat is társul, a kamat nagysága főleg a vállalat gazdasági mutatóitól függ.

A kamatlábak értékes információt nyújthatnak azoknak akik az erőforrások megőrzését részesítik előnyben. Ha a választott erőforrásból a jövőben hiány várható, annak ára feltehetőleg emelkedni fog, így a befektető plusz hasznot húzhat annak megőrzéséből. A befektetőnek figyelembe kell vennie azokat a bevételeket amiket az erőforrás jelenbeli eladásával érhet el (az erőforrásért kapott pénz befekteti és kamatoztatja), ezt össze kell hasonlítani a későbbi eladásból származó haszonnal.

A tőkepiac társadalmi funkciója összehozza azokat akiknek felesleges pénzük van azokkal akiknek szükségük van pénzre a beruházásaik megvalósításához, így segíti a hasznos beruházások létrejöttét és a gazdaság fejlődését. A megtakarítók a fogyasztásukat csökkentve olyan tőkeberuházásokat hajtanak végre tőkepiacok közvetítő funkcióját kihasználva, amelyekről nincsenek is pontos ismereteik. Ezek a pénzek azokhoz kerülnek akik a legtöbb

kamatot hajlandóak fizetni érte, vagyis amely beruházások a legnagyobb megtérülési rátával rendelkeznek.

A magánpiac azokat jutalmazza akik megtakarítanak annak érdekében hogy olyan beruházásokba fektessenek be amelyek a jövőben hasznot hoznak. Tehát működnek olyan mechanizmusok amelyek az egyént az erőforrások megőrzésére ösztönzik.

A politikai piacon viszont ilyenek nincsenek, a politikusok általában csak a következő szavazásokig terveznek, és hajlandóak olyan intézkedéseket is hozni amelyek rövidtávon sikeresek hosszútávon viszont több kár származik belőlük, csak azért hogy a választóikat megtartsák.

Példa: az olajimport korlátozása rövidtávon segíti az olajipart, hosszútávon viszont az állami olajtartalékok gyors felhasználását eredményezi.

A magánpiac bírálói tehát tévednek, a piaci mechanizmusok jól működnek, csak talán nem az ő igényeiknek megfelelően, nem olyan javakat nyújtanak, amelyekre szükségük van. Tehát, az ha a fogyasztók a jelenben túl sokat fogyasztanak és ezzel kevés erőforrás marad a jövő nemzedékei számára nem a piac működésének a problémája, mert az csak a fogyasztók időpreferenciáját tükrözi, vagyis azt, hogy inkább a jelenbeli fogyasztást részesítik előnyben a jövőbeni fogyasztással szemben. A fogyasztók befolyásolása, tehát egy jövőközpontú gondolkodásmód kiépítése a politikai piac feladata volna, viszont ezt nehéz megvalósítani olyan mechanizmusok nélkül amelyek az erőforrások megőrzésére ösztönöznek.

Természetesen a magánpiac sem hibátlan, a kamatlábakat több tényezővel egyetemben befolyásolja a monetáris és fiskális politika és a nemzetközi pénzáramlás, ezért nem tükrözi pontosan az egyének fogyasztásra vonatkozó időpreferenciáit. Ezenkívül, a vállalatok felsővezetői túl sűrűn váltanak állást vagy munkakört ahhoz, hogy hosszútávon gondolkozzanak, és olyan döntéseket hozzanak, amelyek jövőbeni hasznot hoznak.

A kormányzat azzal segítheti legjobban az erőforrások intertemporális allokációját, ha meghatározza a tulajdonjogokat, ahol ez költséges, korlátozhatja az erőforrásokhoz való hozzáférést, illetve az erőforrások használatát rábíthatja olyan csoportokra amelyek érdekeltek a megőrzésükben.

Irodalomjegyzék

David B. Johnson – A közösségi döntések elmélete, a dokumentum a könyv 11. fejezete alapján készült

• Az UTA módszer kiterjesztései – Kovács György

Bevezetés

Az a feladat, amely során véges számosságú alternatívából kell egyet kiválasztanunk egy szintén véges kritériumhalmaz alapján, fontos része mindennapi életünknek, és így a döntéseinket támogató eszközök kérdésében is jelentős szerepe van. Gondoljunk bele, milyen gyakran hozunk meg ilyen döntéseket, akár anélkül, hogy ennek tudatában lennénk. Ilyen döntést hozunk, amikor közlekedési eszközt választunk induláskor, vagy még előtte, amikor ruhatárunkból öltözetet választunk. De akkor is ezt a feladatot oldjuk meg vásárlásaink során, a legkisebb tételektől (választott ásványvíz márkája), egészen a nagyobbakig (autó, lakás, ház kiválasztása) nézve. És bár a kisebb tételek esetén általában könnyen boldogulunk, amikor nagyobb a tét, és döntésünkkel hosszabb távon kell együtt élnünk, hasznos lehet, ha valamilyen rendszerre támaszkodhatunk döntésünk meghozatalakor. Ebben lehetnek segítségünkre az olyan döntéstámogató módszerek, mint például az UTA. De nem csak saját hétköznapijainkat könnyíthetik meg ilyen alkalmazások, hanem vállalatok döntéseiben és beszerzéseiben is szerepet játszhatnak.

UTA módszer

Az UTA (UTilités Additives – Additív Hasznosságok) felhasználói preferenciák megtanulására alkalmas módszer, amelyet eredetileg többtényezős döntéshozásra fejlesztettek ki. 1982-es megjelenése óta több kiterjesztést javasoltak hozzá, többek között az eredeti szerzők, E. Jacquet-Lagrèze és J. Siskos is. Ahhoz azonban, hogy ezeket a meg tudjuk vizsgálni, először nézzük meg az alap feladatot, amit az érthetőség érdekében egy egyszerű példával illusztrálunk.

1.1. Döntési feladat

Vegyük adottnak lehetőségek egy X halmazát, ahol minden választási lehetőség tulajdonságok egy vektorával van leírva. Ezen lehetőségek közül kell a Döntéshozónak kiválasztania a számára leginkább hasznosat, amely döntésében az UTA módszer lesz segítségére. Ahogy más hasonló feladatoknál, a megfelelő döntéstámogatás érdekében bizonyos információkért fordulhatunk a döntéshozóhoz. Ez történhet megadott paraméterek bekérésével – ami a döntéshozót nehéz helyzetbe hozza – vagy számára természetesebb

módon, a lehetőségek egy csoportjának részben rendezésével. Ez után a módszer egy vagy több additív értékfüggvényt keresi azt a hasznosságfüggvényt, ami illeszkedik a bemenő adatokhoz. Végül kimenetként megadja ezt a hasznosságfüggvényt, amellyel az alternatívák a döntés meghozatalához rendezhetők.

Nézzünk is rögtön egy példát a döntési feladatra. Képzeljük, hogy döntéshozónknak számítógépes konfigurációk közül kell választania. Ehhez első körben két tulajdonság, a processzor számítási kapacitása és a memória áll rendelkezésre. A döntéshozó által létrehozott rendezést a következő táblázat írja le:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
CPU	2,2 GHz	2,0 GHz	2,0 GHz	1,6 GHz	1 GHz
Memória	2,5 Gbyte	2 Gbyte	1,5 Gbyte	5 Gbyte	1 Gbyte
Rang	*	**	***	****	*****

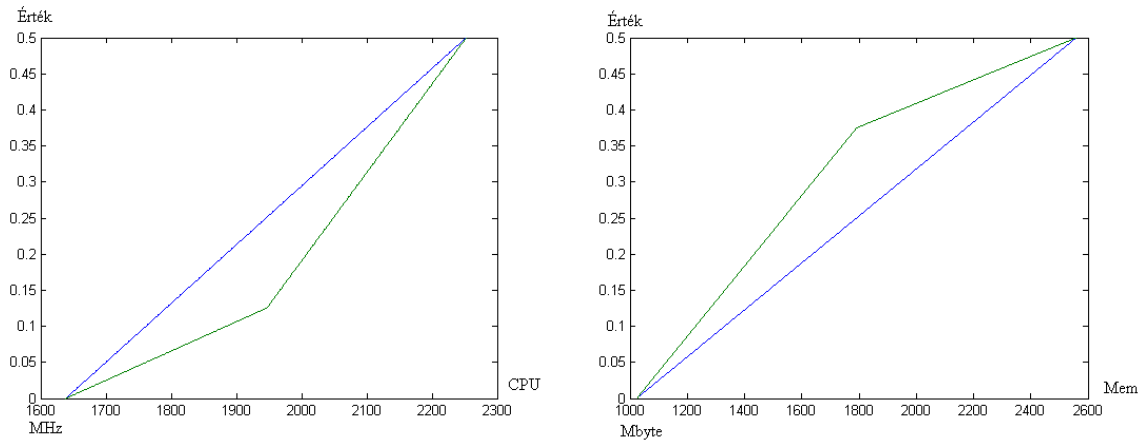
Ahol x_1 számítógépet értékelte a legjobbnak, x_5 számítógépet pedig a legrosszabbnak. Mielőtt rátérnénk a lehetséges értékelő függvényekre, nézzük meg, hogy nézne ki ez formalizáltan.

1.2. Formalizált döntési feladat és megoldása

Adott tehát alternatívák egy $X = \{x_1, \dots, x_M\}$ halmaza, ahol az alternatívákat különböző kritériumok, és a kritériumokhoz tartozó $g_i: X \rightarrow [g_i^*, g_i^*]$ értékelő skála írja le. Itt g_i^* jelenti a legrosszabb, míg g_i^* a legjobb értéket i kritériumra nézve. Ekkor a hasznossági függvényt az értékelő függvények összegeként keressük, ahol u_i az i kritériumon vett értékelő függvény.

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N u_i(\mathbf{x})$$

Az egyes kritériumokhoz tartozó értékelő függvények keresése pedig az értelmezési tartomány egyenlő részekre osztásával és a bemenetként kapott részben rendezés felhasználásával visszavezethető egy lineáris programozási feladatra. Ennek a feladatnak azonban gyakran több megoldása is van, ahogy azt a számítógépes példánkban is láthatjuk.



Könnyen belátható, hogy a függvények bármely kombinációja helyesen fogja visszaadni a felhasználó által meghatározott sorrendet X^R -en, hiszen a számítógépek oly módon vannak sorba állítva, hogy minden egyes gép az összes attribútumában legalább olyan jó, mint a sorban utána következő, és legalább egy attribútum esetén meg is előzi azt. A keresett függvényeknek azonban nem csak ennek a kritériumnak kell megfelelniük.

- $\forall x_1, x_2 \in X^R : U(x_1) > U(x_2) \Leftrightarrow x_1 \succ x_2$
- $\forall x_1, x_2 \in X^R : U(x_1) = U(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- $u_i(g_i(a_{\pi_i}(j))) - u_i(g_i(a_{\pi_i}(j-1))) \geq 0,$
ahol $i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n$
- $u_i(g_i(a_{\pi_i}(1))) \geq 0, i = 1, \dots, n$
- $u_i(g_i(a_{\pi_i}(m))) \leq u_i(\beta_i), i = 1, \dots, n$
- $u_i(\alpha_i) = 0, i = 1, \dots, n$
- $\sum_{i=1}^n u_i(\beta_i) = 1$

Ahol az első két feltétel azt az intuitív elvárást formalizálja, hogy ha a felhasználó az általa adott részben rendezésben egy x_1 alternatíva megelőzi x_2 -t, akkor hasznossága is nagyobb legyen annál. Illetve, ha a két alternatíva indifferens, akkor hasznosságuk megegyező legyen. A további kritériumok leírásához bevezetünk egy a_{π_i} rendezését az alternatíváknak, ahol azok az adott i kritériumra kapott értékük szerinti növekvő sorrendbe vannak állítva. Ennek segítségével megérthetjük a további, az értékelő függvényekre vonatkozó elvárásokat. A harmadik pont a monoton növekedés feltételét írja le, amíg az azt követők a peremfeltételeket határozzák meg. Ezek értelmében a függvények nullától indulnak, és a különböző kritériumokhoz tartozó értékelő skálák maximumának összege nullát kell, hogy

adjon. Ezek a kritériumok nem csak a használható függvényekre adnak megszorítást, de a lehetséges attribútumok körét is szűkítik a monotonitási feltétel által.

Nem monoton attribútumok kezelése

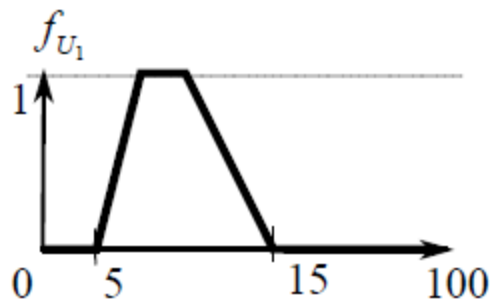
Ahogy azt korábban láttuk, mivel az értékelő függvényektől elvártuk a monotonitást, ehhez attribútumainknak is igazodnia kell. Azonban gyakran kell olyan esetekben döntést hoznunk, amikor ez nem áll fenn. Ebben az esetben az attribútumot kézileg kell átalakítani, azonban előfordulhat, hogy ez akár az attribútumok számossága, akár más okból nem kivitelezhető. Erre az esetre egy heurisztikus megoldást az UTA módszer egy bővítése, amelyet Alan Eckhardt és Tomáš Kliegr vezetett be, és amely automatikusan elvégezhető.

Előző példánkat a számítógépekkel folytatva, tegyük fel, hogy a felhasználó által ugyan úgy megadott rendezés mellett nem a memóriára és a CPU számítási kapacitására vonatkozó adataink vannak, hanem a számítógép színét, és processzorának típusát ismerjük. Tegyük fel, hogy új táblázatunk a következőképp néz ki:

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
CPU	Motorola	AMD	Intel	AMD	Intel
Ár	220 ezer	200 ezer	180 ezer	160 ezer	10 ezer
Rang	*	**	***	****	*****

1.3. Kardinális attribútumok

Amikor például az ár tűnik fel, mint attribútum, az első problémánk az, hogy az elvárt monoton növekedéssel szemben, általában a döntéshozó azt preferálja, ha minél olcsóbb egy árucikk. Ezt a lineáris regresszió megoldaná, megfelelően rendezve az értékeket. Azonban a valóságban ennél valamivel összetettebb a helyzet. Bár valóban igaz, hogy a vásárló minél olcsóbban szeretne az adott javakhoz hozzájutni, azonban egy bizonyos árszint alatt egyre inkább gyanakodni fog. Ezért fordulhat elő, hogy például az x₅ Intel processzorral ellátott számítógépet, ami mindössze tízezer forintba kerül, az összes többinél kevesebbre értékelte. Általában azt láthatjuk, hogy a monotonitás az ár típusú attribútumokra csak egy pontig teljesül, utána a visszajára fordul. Azaz ilyen esetekben az értékelő függvényt a következő alakban kell keresnünk:



1.4. Nominális attribútumok

Nehezebb helyzetben vagyunk abban az esetben, amikor – szemben az ár esetével – egyértelmű sorbarendezésünk sincs az attribútum értékeire. Például amikor a számítógép színe, vagy a processzor típusa is szerepet játszik a döntésben. Felhasználhatnánk ugyan a színskálát vagy az abc-t egy rendezés megadására, de ezek aligha vannak kapcsolatban a döntéshozó preferenciáival.

Ezekre az esetekre Alan Eckhardt és Tomáš Kliegr egy kézenfekvő módszert vezetett be: a döntéshozó által megadott sorrend szerint rendeljük értékeket a különböző alternatívákhoz egy és nulla között, ekvidisztáns módon. Az egyes attribútum értékek értékelését pedig oly módon kapjuk, hogy vesszük azon alternatívákhoz rendelt értékek átlagát, amelyek azzal az attribútummal rendelkeznek. Formálisan ezt a következő képlet kiszámításával kapjuk az a attribútum értékhez tartozó értékelést:

$$f_i(a) = \frac{\sum_{\{\mathbf{x} | x_i = a\}} r(\mathbf{x})}{|\{\mathbf{x} | x_i = a\}|},$$

Ahol $r(\mathbf{x})$ az alternatívákhoz rendelt érték, és $\{\mathbf{x} | x_i = a\}$ azon $\mathbf{x}$, az X halmazba tartozó alternatívákat adja, ahol az i -edik attribútum értéke a . Így tehát $|\{\mathbf{x} | x_i = a\}|$ ezen esetek számossága. Az alábbi táblázat megadja ennek a számításnak az eredményét előző példánkra, amit a plasztikusság érdekében a szín tulajdonsággal egészítettünk ki.

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
CPU	Motorola	AMD	Intel	AMD	Intel
Szín	fekete	vörös	vörös	fekete	vörös
Rang	*	**	***	****	*****
Értékelés	1	0,75	0,5	0,25	0
CPU értékelés	1	0,5	0,25	0,5	0,25
Szín értékelés	3,75/6	2,5/6	2,5/6	3,75/6	2,5/6

Ez a példa meg is mutatja a módszer azon gyengeségét, hogy a monotonitási kritériumot nem feltétlen teljesíti. Hiszen hiába teljesít jobban x₄ mind a szín, mind pedig a processzor típusa szerinti összehasonlításban, mint x₃, a döntéshozó mégis rosszabbul értékelte.

A másik fellépő probléma, amit a példánk illusztrál, hogy az átlagszámításnál jelentősen torzíthat az eredmény, ha nem rendelkezünk megfelelő számú példával minden tulajdonságra. Láthatjuk, hogy a Motorola processzort értékeltük a legmagasabbra, de ezt csak egyetlen példa alapján tettük. Kérdéses, hogy ez azért van-e, mert a döntéshozó általában többre értékeli a Motorola processzorokat, vagy, mert az általa rendezett elemek nem reprezentálják jól az elemek összességét. A színek alapján való döntés akkor is problémákhoz vezethet, ha megfelelő számú rendezett elemünk van minden szín esetére. Ha egy gyártó a színeket mellőzve csak feketében illetve fehérben hoz piacra termékeket, és ezeknek általában magas a minősége, akkor az az átlagolással kapott eredményt könnyen a fekete és a fehér felé billentheti, miközben könnyen lehet, hogy azonos tulajdonsággal rendelkező számítógépek közül a döntéshozó a rózsaszínt részesíti előnyben, és ez akár az általa adott részrendezésen is látszik (a szín attribútum azonban megsérti a monotonitást). Ezen ugyan segíthet, ha virtuális alternatívákat vezetünk be, mégis felmerül a kérdés, hogy érdemes-e a számítógépek között való választásnál a színt, mint kritériumot felvenni. Ha a döntésben igazán fontosnak, és a többi attribútumtól függetlennek nem is bizonyulna, de mindenképp hasznos abból a szempontból, hogy illusztrálni tudtuk vele a nominális attribútumok kezelésének problémáját.

GRIP

Az UTA módszer kiterjesztésének is tekinthető GRIP (Generalized Regression with Intensities of Preference – Általánosított Regresszió a Preferencia Intenzitásaival) nem csak egy hasznossági függvényt ad kimeneteként, hanem a különböző párokra vonatkozóan a

preferencia intenzitásáról is információt ad. A módszer fejlesztői, José Rui Figueira, Salvatore Greco, Roman Słowiński, azt is felismerték, hogy a döntéshozó bizonyos esetekben azon túlmenő információkat is hajlandó nyújtani, mint hogy melyik alternatívát preferálja egy párból. A GRIP tehát két tekintetben terjeszti ki az alap UTA módszert: egyrészt többlet információt vár el a döntéshozótól, cserébe azonban ő is többletinformációval szolgál.

1.5. Többlet információ a bemeneten

Nézzük, milyen módon ad a döntéshozó többlet információt. Ehhez legyenek adottak x_1, x_2, x_3 és x_4 alternatíváink. Korábban a döntéshozó olyan állításokat tett, hogy x_1 jobb, mint x_2 , vagy x_3 jobb, mint x_4 . Itt azonban pontosabban is fogalmazhat: az egyes alternatívákról, általánosan szólva mondhatja, hogy

- x_1 legalább annyival jobb x_2 -nél, mint x_3 jobb x_4 -nél $((x_1, x_2) \succeq^* (x_3, x_4))$
- x_1 pontosan annyival jobb x_2 -nél, mint x_3 jobb x_4 -nél $((x_1, x_2) \sim^* (x_3, x_4))$
- x_1 jobb x_2 -nél, és különbségük nagyobb, mint x_3 és x_4 közti $((x_1, x_2) \succ^* (x_3, x_4))$

Illetve elmondhatja ugyan ezt az egyes attribútumokra nézve is, azaz:

- x_1 legalább annyival jobb x_2 -nél i attribútumon, mint x_3 jobb x_4 -nél $((x_1, x_2) \succeq_i (x_3, x_4))$
- x_1 pontosan annyival jobb x_2 -nél i attribútumon, mint x_3 jobb x_4 -nél $((x_1, x_2) \sim_i (x_3, x_4))$
- x_1 jobb x_2 -nél i attribútumon, és különbségük nagyobb, mint az x_3 és x_4 közti különbség $((x_1, x_2) \succ_i (x_3, x_4))$

Vegyük észre, hogy ez automatikusan azzal is jár, hogy az érték függvényekre vonatkozó kritériumok is szigorodnak, azaz több feltételnek kell megfelelniük a bemeneti információval való kompatibilitáshoz:

- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : U(x_1) - U(x_2) \geq U(x_3) - U(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succeq^* (x_3, x_4)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : U(x_1) - U(x_2) > U(x_3) - U(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succ^* (x_3, x_4)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : U(x_1) - U(x_2) = U(x_3) - U(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \sim^* (x_3, x_4)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : u_i(x_1) - u_i(x_2) \geq u_i(x_3) - u_i(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succeq_i (x_3, x_4)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : u_i(x_1) - u_i(x_2) > u_i(x_3) - u_i(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \succ_i (x_3, x_4)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X^R : u_i(x_1) - u_i(x_2) = u_i(x_3) - u_i(x_4) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \sim_i (x_3, x_4)$

Emlékezzünk vissza, hogy a számítógépes példánk esetén több értékelő függvény is megfelelt az elvárásainknak. Akkor megkerültük a kérdést, hogy a lehetséges megoldások ezen nagy

teréből hogyan választjuk a hasznossági függvényünket. Ezzel a többlet információval azonban szűkíthetjük ezt a teret, így könnyítve a végső választást. Ezt szemléltetendő nézzük azt az esetet, amikor a döntéshozó azt az információt adja nekünk, hogy x_2 számítógép legalább annyival jobb x_3 -nál a memória attribútum értékelésében, mint x_4 az x_5 számítógépnél. Azaz két Gigabájt memória legalább annyival jobb a másfél Gigabájt nál, mint amennyivel a másfél jobb az egynél. Ekkor a memóriára a korábban látott zöld értékelő függvényt már nem használhatjuk, mivel annak meredeksége x_2 és x_3 között kisebb, mint x_4 és x_5 között.

1.6. Többlet információ a kimeneten

Hiába szűkítettük azonban a lehetséges megoldásaink terét, ha ebből végül csak egy hasznossági függvényt választunk, azzal fontos információt veszíthetünk el. Ilyen fontos információ lehet, hogy ha két alternatíva közül az egyik minden a kritériumoknak megfelelő hasznossági függvény szerint jobb a másíknál. Ugyan így fontos lehet tudni, hogy van-e olyan hasznossági függvény, amely alapján egy kritérium jobb a másíknál. Ennek megfelelően vezet be a GRIP új relációkat, amelyekkel a kimeneten ezeket az információkat leolvashatjuk:

Az új relációk két kulcsszava a szükségszerűen és a lehetségesen. Egy relációt szükségszerűnek neveznek, ha az minden kimenetként kapott hasznossági függvény esetén teljesül, míg lehetségesnek, ha az nem teljesül minden hasznossági függvényünkre, de létezik olyan, amelyre igen. Mindez formálisan a következőképp néz ki:

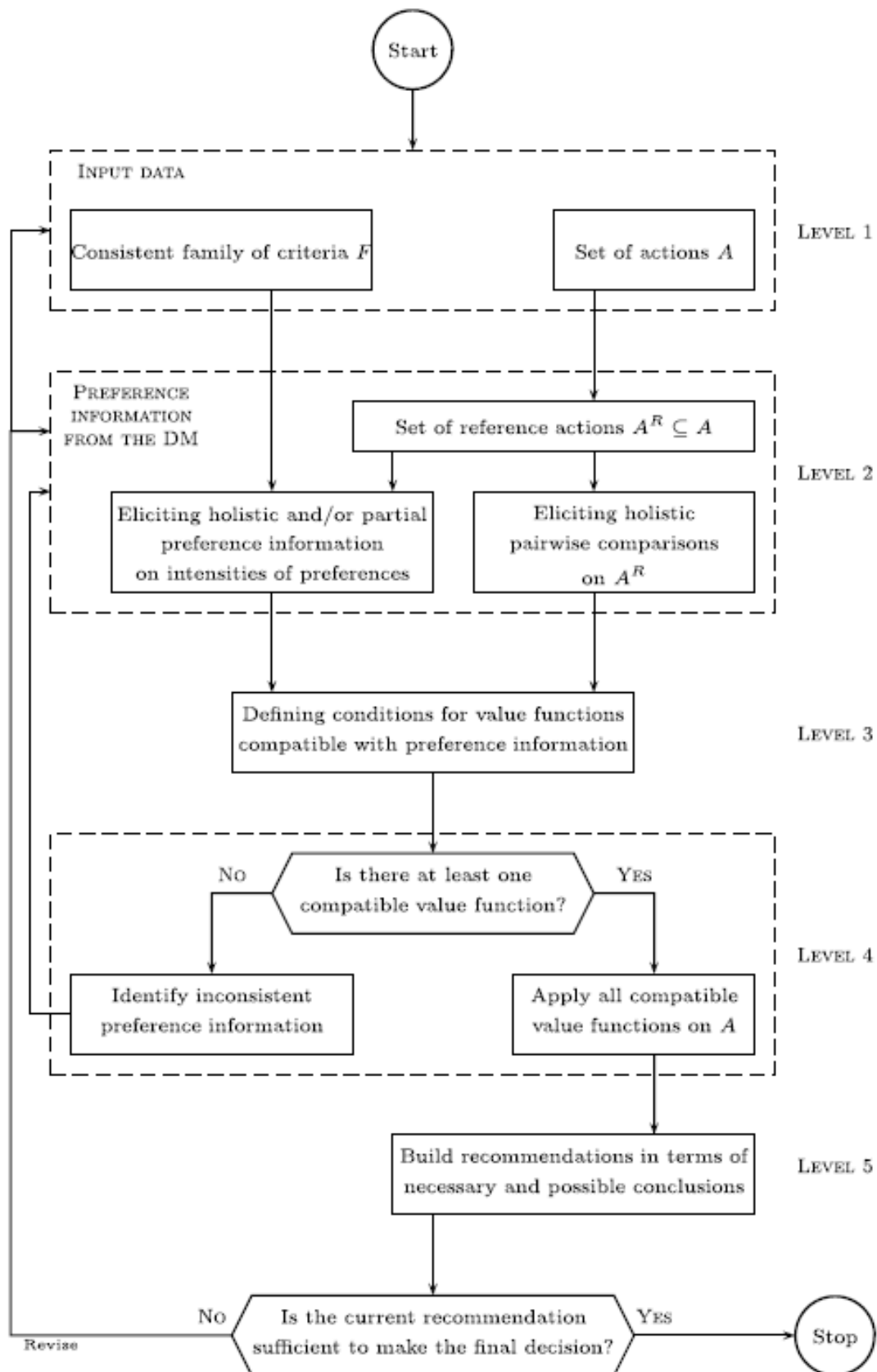
- $x_1 \succeq^N x_2 \Leftrightarrow x_1$ szükségszerűen (N - necessarily) legalább annyira jó, mint x_2 , azaz $\forall U$ kompatibilis hasznossági függvényre: $U(x_1) \geq U(x_2)$
- $x_1 \succ^N x_2 \Leftrightarrow x_1$ szükségszerűen jobb, mint x_2 , azaz $\forall U$ kompatibilis hasznossági függvényre: $U(x_1) > U(x_2)$
- $x_1 \sim^N x_2 \Leftrightarrow x_1$ szükségszerűen jobb, mint x_2 , azaz $\forall U$ kompatibilis hasznossági függvényre: $U(x_1) = U(x_2)$
- $x_1 \succeq^P x_2 \Leftrightarrow x_1$ lehetségesen (P - possibly) legalább annyira jó, mint x_2 , azaz $\exists U$ kompatibilis hasznossági függvény, hogy $U(x_1) \geq U(x_2)$
- $x_1 \succ^P x_2 \Leftrightarrow x_1$ lehetségesen jobb, mint x_2 , azaz $\exists U$ kompatibilis hasznossági függvény, hogy $U(x_1) > U(x_2)$
- $x_1 \sim^P x_2 \Leftrightarrow x_1$ lehetségesen jobb, mint x_2 , azaz $\exists U$ kompatibilis hasznossági függvény, hogy $U(x_1) = U(x_2)$

Ezek a tulajdonságok értelemszerűen kiterjeszthetők a $\succeq^*$ és $\succeq_i$ relációkra is. Ezek leírásától most eltekintünk, ahogy a relációk tulajdonságainak részletes bemutatásától és

bizonyításától is. Ezek miközben részletesen megtalálhatók a Figueira et al [2] cikkében, nem visznek közelebb az algoritmus lényegének megértéséhez. Ehelyett nézzük meg inkább egy példán keresztül a szükségszerűség és lehetségesség különbségét.

Tekintsük első, számítógépekkel kapcsolatos táblázatunkat, ahol minden gépet a processzor teljesítménye és a memória kapacitása ír le. Tekintsük továbbá a már látott értékelő függvényeinket (ezúttal eltekintünk a döntéshozó által adott többlet információtól, amit megtehetünk, hiszen az algoritmus által adott többlet információ nem feltételezi azt). Ahogy azt korábban beláttuk, a függvények megfelelnek a kritériumainknak, továbbá teljesül, hogy $x_1 \succeq^N x_2$ (ez szükségszerű, hiszen a kompatibilitás egyik kritériuma, hogy U hasznossági függvény legalább akkora értéket adjon x_1 -re, mint x_2 -re, és itt csak kompatibilis függvényekkel kell számolnunk). Ily módon a szükségszerűségre találtunk példát. A lehetségességhez vegyünk fel egy új elemet számítógépeink közé. Az x_6 gép CPU teljesítménye 2 GHz, és memóriája 1 Gigabájt. Ha az x_4 géppel összehasonlítjuk a kék (U_1), illetve zöld (U_2) színnel jelzett függvényeken, akkor azt kapjuk, hogy $U_1(x_6) = 0.33305 > 0.1665 = U_1(x_4)$, miközben $U_2(x_4) = 0.25 > 0.24875 = U_2(x_6)$. Azaz lehetséges, hogy x_6 jobb döntés, mint x_4 , azonban az is lehetséges, hogy x_4 a jobb döntés, mint x_6 . Ha bevezetnénk a korábbi, memóriára vonatkozó, többletinformációt a felhasználó preferenciájáról (Fél Gigabájt növekedést legalább annyira értékel másfél Gigabájtról, mint egy Gigabájtról), ez a bizonytalanság eltűnne.

1.7. A metódushoz tartozó algoritmus felépítése



Végezetül nézzük meg a módszer alapján épített algoritmus felépítési rajzát. Erről könnyen leolvashatók a főbb lépések:

- Elsőként összegyűjtjük a szóba jöhető alternatívákat, és azok attribútumait.
- Majd a döntéshozóhoz fordulunk, hogy határozza meg a preferenciáit az alternatívák egy részhalmazán, illetve a tulajdonságokon.
- Az algoritmus ezután megpróbálja meghatározni a szóba jöhető érték függvényeket.
 - Amennyiben nem talál megfelelő függvényt, újra a döntéshozóhoz kell fordulnunk, hogy módosítsa preferenciáit, mivel azok nem kielégíthetők.
- A megfelelő függvények előállítását követően azokat alkalmazza az alternatívákra, és felállítja a szükségszerű illetve lehetséges kapcsolatokat. Ekkor felmerül a kérdés, hogy az így kapott információ elegendő-e a döntéshozáshoz.
 - Ha a végső döntés nem hozható meg a meglévő információk alapján, visszatérhetünk az első lépéshez, és felülvizsgálhatjuk az alternatívákat, illetve a jellemzőket.
 - Visszatérhetünk továbbá a döntéshozóhoz is, hogy újabb preferenciákat határozzon meg, ezzel segítve a döntési folyamatot.
- Amikor úgy ítéli meg az algoritmus, hogy a döntéshez elegendő információt gyűjtött, a kimenetét a döntéshozó rendelkezésére bocsátja, és a végső döntés megszületik.

Konklúzió

Bár az alap UTA algoritmus a nyolcvanas évek elején keletkezett, a döntéseket az összes kompatibilis hasznossági függvény figyelembevételével meghozó megközelítésnek köszönhetően újra az érdeklődés homlokterébe került [2]. Ennek apropóján áttekintettük az UTA néhány javasolt kiterjesztését, módosítását. Az egyik ilyen módosítás arra törekedett, hogy újfajta attribútumok váljanak automatikusan beépíthetővé a döntési folyamatba. Mint láttuk, ennek megvannak a maga gyengéi, de Eckhardt et al [1] összehasonlításában mégis jobbnak bizonyult elődjénél, amely hasonló célokat tűzött ki maga elé. Egy másik ilyen módosítás a döntéshozó által adott, valamint a döntéshozónak nyújtott információk körét bővítette ki jelentősen. Ahogy láttuk a GRIP relációi számos előnyös tulajdonsággal bírnak (meghatározza például, hogy elegendő információk adott-e a döntéshez), azonban valós

feladatokon történő megmérettetése még várat magára [2].

Források

1. Alan Eckhardt, Tomáš Kliegr, „Preprocessing Algorithm for Handling Non-Monotone Attributes in the UTA method”, 08/2012; In proceeding of: Preference Learning Workshop at ECAI 2012, At Montpellier, France
2. José Rui Figueira, Salvatore Greco, Roman Słowiński, „Building a set of additive value functions representing a reference preorder and intensities of preference: GRIP method”, European Journal of Operational Research, Volume 195, Issue 2, 1 June 2009, Pages 460-486, ISSN 0377-2217, 10.1016/j.ejor.2008.02.006.
3. E. Jacquet-Lagrange, J. Siskos, „Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method”, European Journal of Operational Research DOI:10.1016/0377-2217(82)90155-2

- A bizonytalanságban hozott döntések - Krisztián Emese

Bevezetés

Döntések során az embernek különböző cselekvési alternatívák közül kell választani, azaz döntéseket kell hozni, különféle lehetőségek közül kell választani. Viszont ha ezt bizonytalanságban teszi meg, a természet is választ egyet a természetállapotok közül. Tehát például én reggel eldöntöm munkába menet előtt, hogy viszek e magammal esernyőt, az időjárás viszont eldönti, hogy esni fog e aznap az eső vagy sem. Azaz én a lehetséges cselekvési alternatívák közül választok egyet, emellett pedig a természet is választ egyet a világállapotok közül. Ezt jól szemlélteti az alábbi táblázat:

1. TÁBLÁZAT
*A cselekvési lehetőségek és a világállapotok
következményei*

		Világállapotok	
		$s = 1$	$s = 2$
Cselekvési alternatívák	$X = 1$	c_{11}	c_{12}
	$X = 2$	c_{21}	c_{22}

Az egyén választási lehetőségei a bal oldalon lévő egyes sorok, azaz x_1 és x_2 , a természet által választható állapotok pedig felül az egyes oszlopok, azaz s_1 és s_2 vannak feltüntetve. A táblázat egyes celláiban a c_{xs} következményértékek lelhetők, melynek jelentése: az egyén x alternatívát választja, a természet pedig s állapot mellett teszi le a voksát.

A bizonytalan helyzetben történő döntési probléma elemei:

megvalósítható cselekvési alternatívák $(1, \dots, x, \dots, X)$ halmaza

természet által választható állapotok $(1, \dots, s, \dots, S)$ halmaza

Az előző kettő összes lehetséges kombinációjához rendelhető következményfüggvény $c(x,s)$

$\pi(s)$ valószínűségi függvény: a döntéshozónak - a természet által választható, minden egyes állapot bekövetkezési valószínűségére_vonatkozó – vélekedését fejezi ki

$v(c)$ elemi hasznossági függvény (preferenciaindex-függvény): a lehetséges következmények kívánatosságát fejezi ki

A cselekvési alternatívák listája

A cselekvési alternatíváknak két fő osztálya van: a végső lépések, illetve a tájékozási

lépések. A végső lépéseknél az egyén ismereteinek és tájékozatlanságának adott szintjén hozza meg a számára lehető legjobb döntést. Ide tartoznak azok a statisztikai problémák, amelyeknél a meglévő minta alapján hozzuk meg a döntést. Ilyen például ha egy szabályzó hatóság döntést hoz egy eddigi kísérletek eredményeire fektetett tudás alapján, hogy az adott gyógyszer forgalmazását engedélyezi e. Ehhez képest a tájékozódási döntések során az egyén arra vonatkozóan hoz döntést, hogy a végső döntése előtt bővítse e még az ismereteit, vagy sem, illetve ha igen, hogyan. Ide olyan statisztika döntések tartoznak, ahol valamennyi információt szerzünk még a végső döntés előtt valamilyen mintavételi eljárással. Erre lehet példa, amikor megvesszük a napi hírlapot az időjárás előrejelzés vagy a tőzsdei hírek miatt, vagy ha egy szakembert kérünk fel tanácsadónak bizonyos kérdésekben, döntésekben.

1.2. A valószínűségi függvény

Egy szubjektív valószínűségi eloszlással mindenki ki tudja fejezni a különféle világállapotok bekövetkezésének valószínűségére vonatkozóan várakozásait. Diszkrét esetben minden s állapothoz egy bizonyos fokú hitet rendelünk súlyként. Ez az érték nulla és egy közé esik, π_s –el jelöljük. Ezek összege $\sum \pi_s = 1$. Amennyiben biztosak vagyunk, hogy ez az s állapot be fog következni, a teljes valószínűségi érték ehhez fog rendelődni, ekkor ez $\pi_s = 1$, az összes többi π érték nulla lesz. Általánosítva tehát a lehetséges állapotok felett értelmezett szűk valószínűségi eloszlás nagyobb szubjektív bizonyosságot tükröz, míg a nagyobb szórás pedig nagyobb fokú bizonytalanságot. Viszont folytonos állapotban, azaz ha a különböző világállapotok száma végtelen számú, minden állapot bekövetkezésének nulla, másképpen végtelenül kicsi a valószínűsége, noha ez az esemény nem lehetetlen. Ekkor az egyének szubjektív valószínűségi várakozásai a $\pi(s)$ valószínűségeloszlási sűrűségfüggvénnyel adható meg, ahol Ilyenkor az s 0 és S közé eső valós szám értékét veheti fel.

$$\int_0^S \pi(s) ds = 1.$$

1.2.1. Kockázat és bizonytalanság

Rengeteg közgazdász próbált már meg különbséget tenni kockázat és bizonytalanság között. Frank H. Knight szerint (1921) a kockázatról olyan szituáció esetén beszélünk, amikor az emberek az események objektív mérlegelése alapján meg tudják adni a bekövetkezési valószínűségek értékeit. Például egy dobókocka feldobása esetén pontosan $1/6$ eséllyel mutatja bármelyik számot a hat közül. Bizonytalanság pedig olyan helyzetekre vonatkozik, ahol nincs lehetőség ilyen objektív mérlegelésre. Ilyen például annak a valószínűsége, hogy feltalálják-e a rák ellenszerét a következő tíz évben vagy sem. Ehhez képest Savage (1954) szerint a valószínűség esetén egyszerűen a vélekedés foka, azaz nem számít, hogy lehetséges-e objektív mérlegelés vagy sem. A dobókocka esetén is csak akkor igaz, hogy $1/6$ eséllyel mutatja valamelyik számot a feldobás után, ha a kocka nem hamis, viszont ez olyan feltétel, amiben senki sem lehet objektíven biztos.

1.2.2. "Kemény" és "puha" valószínűségek

Knight érvelése során arra a megállapításra jutott, hogy az egyén cselekedetei nagymértékben függhet attól, hogy milyen mértékben hisz a saját becsléseinek pontosságában, azaz a hitünkbe vetett bizalmunktól. Ez jelenti a „kemény” és „puha” valószínűségek közötti különbséget. A mi példánkban azt akarjuk megbecsülni, hogy a feldobott „A” pénzérme fej lesz. Ha ezt megfelelő mennyiségben teszteljük, arra jutunk, hogy közel azonos gyakorisággal lesz fej illetve írás. Tehát 50%-ot adunk a fej valószínűségéhez és 50%-ot az íráshoz. Ebben az állításban tehát meglehetősen biztosak lehetünk. Ezzel szemben viszont, legyen egy másik érménk is, melyet „B” érmének nevezzünk. Erről az érméről viszont semmit sem tudunk. Az is könnyen előfordulhat, hogy ennek az érmének mindkét oldalán fej vagy mindkét oldalán írás szerepel. Viszont a tapasztalatok alapján erre is 50%-os valószínűséggel mondanánk azt, hogy az érme feldobása után fejet fog mutatni. Ebben az esetben viszont az érmébe vetett bizalmunk foka sokkal kisebb. Láthatjuk tehát, hogy mindkét esetben 50% valószínűségi értékkel dolgozunk, a kérdés tehát az, hogy van-e valamilyen különbség a kétféle eset között a döntéshozatalt nézve. Első ránézésre azt mondanánk, hogy nincs, viszont igenis van különbség a két eset között, akkor, ha tájékozódási lépésre is van lehetőségünk. Ez annyit jelent, hogy ha bizonyos mennyiségű pénzt vagy plusz energiát fektetünk be a B érmével kapcsolatosan abba, hogy új ismereteket, információkat tudjunk meg róla. Azaz az alacsonyabb fokú bizalom növeli a további plusz ismeretek

megszerzésének a fontosságát a végső döntés meghozatala előtt. Ebből is látszik, hogy az egyén tájékozódási lépései függenek a hitünkbe vetett bizalmunktól. (Knight)

Példa – egy befektetési döntés

Egy vállalkozónak 14 millió forint befektetni való pénze van. Két féle befektetési lehetőség van. Az egyik, hogy telket vásárol a környéken, a másik, hogy bankba rakja a pénzét. A telek pont 14 millió forintba kerül, így ezzel a lehetőséggel értékálló befektetéshez jutna a vállalkozó. Viszont tudjuk, hogy bár a telek nem a legjobb ingatlanbefektetés céljára (valószínűleg 1%-kal csökken a következő évben), de a város bevásárlóközpontot tervez építeni a közelben, így akár 10%-kal is nőhet a telek értéke. A másik esetben ugye bankba tenné a pénzét. A kamatláb most 5%, viszont a bevásárlóközpont felépülésével ez olyan üzleti fellendülést hozhat, hogy akár 5,5% is lehetne. A bevásárlóközpont építésének valószínűsége 75%.

Események	Cselekvési lehetőségek	
	a_1 = telekvásárlás	a_2 = pénz a bankban
s_1 = bevásárlóközpont épül	1400	770
s_2 = nem épül bevásárlóközpont	-140	700

3.3. táblázat

A szubjektív valószínűségek: $P(s_1) = 0.75$, $P(s_2) = 0.25$.

A várható érték alapján való döntés esetén kiszámoljuk az egyes cselekvési alternatívákhoz tartozó várható pénzürtéket:

$$VPRI(a_1) = 1400 \cdot 0.75 - 140 \cdot 0.25 = 1015$$

$$VPRI(a_2) = 770 \cdot 0.75 + 700 \cdot 0.25 = 752.5$$

Tehát ebben az esetben az a_1 -et kell választania a vállalkozónak.

Ha további szakembereket von be a döntésbe az egyén és megkérdezi, hogy vajon megépül-e a bevásárlóközpont vagy sem, akkor minden esethez ki lehet számolni az optimális cselekvési alternatívát és annak a nyereségét. Az előrejelző cég tehát a következőket adja még hozzá az eredeti döntésünkhöz:

- z_1 : az előrejelzés szerint megépül a bevásárló központ
- z_2 : az előrejelzés szerint nem épül meg

Így négy valószínűségi változót vezetünk be: $P(s_1|z_1)$, $P(s_1|z_2)$, $P(s_2|z_1)$, $P(s_2|z_2)$. Ekkor

például $P(s_2|z_1)$ annak valószínűsége, hogy a bevásárló központ nem épül meg, miközben a felkért cég azt jelezte, hogy meg fog épülni.

Tegyük fel, hogy az alábbiakat jósolta meg az előrejelző cégünk:

$$P(z_1|s_1)=0,8 \rightarrow P(z_2|s_1)=1-P(z_1|s_1)=0,2 \text{ és}$$

$$P(z_2|s_2)=0,9 \text{ így } P(z_1|s_2)=0,1$$

Amennyiben ezek az információk a rendelkezésünkre állnak, a következő Bayes-tétel alapján ki tudjuk számolni azokat a valószínűségeket, amelyek minket érdekelnek:

$$P(s_1 | z_1) = \frac{P(z_1 | s_1) \cdot P(s_1)}{\sum_i P(z_1 | s_i) \cdot P(s_i)} = \frac{P(z_1 \cap s_1)}{\sum_i P(z_1 \cap s_i)}$$

Ezt a következő táblázat is reprezentálja:

	$P(s_i)$	$P(z_1 s_i)$	$P(z_1 \cap s_i)$	$P(s_i z_1)$
s_1	0.75	0.80	0.600	$0.600/0.625 = 0.96$
s_2	0.25	0.10	0.025	$0.025/0.625 = 0.04$

A táblázatból kiszámolható, hogy a $P(z_1) = P(z_1 \cap s_1) + P(z_1 \cap s_2) = 0.625$, azaz annak a valószínűsége, hogy az előrejelző cég a bevásárlóközpont megépítését fogja előre jelezni. Ugyanígy:

$$P(s_1 | z_2) = 0.4 \text{ és } P(s_2 | z_2) = 0.6, \\ P(z_2) = 0.375.$$

Ezzel megvannak az egyes előrejelzésekhez tartozó várható pénzürtékek minden cselekvési alternatívára. Legyen $VP(a_1|z_1)$ az a_1 alternatíva várható pénzürtéke akkor, ha az előrejelző cég a bevásárlóközpont megépülését jósolta meg. Ekkor tehát:

$$VP(a_1 | z_1) = v(s_1, a_1) \cdot P(s_1 | z_1) + v(s_2, a_1) \cdot P(s_2 | z_1) = \\ = 1400 \cdot 0.96 + (-140) \cdot 0.04 = 1338.4$$

$$VP(a_2 | z_1) = v(s_1, a_2) \cdot P(s_1 | z_1) + v(s_2, a_2) \cdot P(s_2 | z_1) = \\ = 770 \cdot 0.96 + 700 \cdot 0.04 = 767.2$$

Ezzel megállapítható, hogy ha az előrejelzés szerint megépül a bevásárlóközpont, akkor az első a_1 a helyes cselekvési alternatíva, azaz a telekvásárlás a jó döntés.

Ugyanígy kiszámítható, hogy mi lesz a jó döntés, ha cég szerint nem épül meg a

bevásárlóközpont:

$$VP(a_1 | z_2) = 1400 \cdot 0.40 + (-140) \cdot 0.60 = 476$$

$$VP(a_2 | z_2) = 770 \cdot 0.40 + 700 \cdot 0.60 = 728$$

Tehát ha az előrejelzés szerint a bevásárlóközpont nem épül meg, akkor az a2 bankbetét a jó döntés. Megvannak a megfelelő döntési alternatívák. A kérdés már csak az, hogy mennyit érdemes áldozni erre a plusz ismeretre? Ennek kiszámolását a következő táblázat foglalja össze:

Előrejelzés	Optimális cselekvés	Az optimális cselekvés nyeresége	Az előrejelzés valószínűsége	Várható pénzürték
z_1	a_1	1338.4	0.625	836.5
z_2	a_2	728	0.375	273.0

A várható pénzürték tehát $836,5 + 273,0 = 1109,5$ lesz, így a maximális költség ami még jó: $1109,5 - 1015 = 94,5$ ezer forint. Ha ennél kevesebbe kerül a plusz információ, akkor megéri felkérni az előrejelző céget, ha többbe, akkor viszont nem.

1.3. A hasznossági függvény és a várhatóhasznosság-szabály

A hasznosság közvetlenül a következményekhez kapcsolódik, a cselekvéseinkhez pedig közvetetten, ezért a következő jelöléseket fogjuk alkalmazni:

- $v(c)$ a következmények felett értelmezett precedenciaindex-függvény
- $U(x)$ a cselekvések felett értelmezett hasznossági függvény

Ha a következmények felett adottak a preferenciák, akkor a döntés nem más, mint a megvalósítható cselekvési alternatívákra vonatkozó sorrend felállítása. Azaz az x cselekvéssel párosuló valószínűségeloszlás/"kilátás", amelynek $c_x = (c_{x1}, c_{x2}, \dots, c_{xs})$ következményeikor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ valószínűségekkel (összegük 1) lesz részük, nem más, mint $x = (c_{x1}, c_{x2}, \dots, c_{xs}; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$. Ezt pedig a Neumann-Morgenstern (1944) ismert „várhatóhasznosság-szabálya” alapján adhatjuk meg a következőképpen:

A VÁRHATÓHASZNOSSÁG-SZABÁLY

$$U(x) \equiv \pi_1 v(c_{x1}) + \pi_2 v(c_{x2}) + \dots + \pi_s v(c_{xs}) \equiv \sum_{s=1}^S \pi_s v(c_{xs})$$

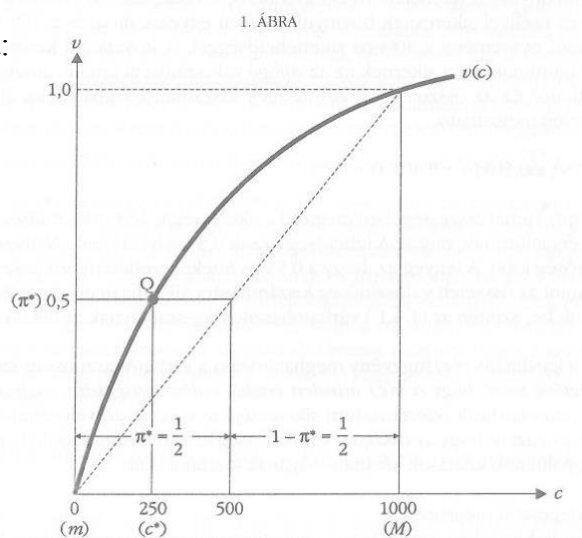
Tehát az x cselekvés $U(x)$ hasznossága: a várható következmények $v(c_{xs})$ elemi hasznosságának matematikai várható értéke (a bekövetkezési valószínűségekkel súlyozott átlaga).

1.3.1. "Referencialutri-eljárás"

Hogyan szerkeszthető meg közvetlenül a kívánt preferenciafüggvény? *Robert Schlaifer (1959)*

m pozitív valószínűséggel előálló lehető legrosszabb következmény (legkisebb jövedelem nagysága)

Mivel a nagyobb jövedelem jobb, mint a kisebb, így ez már egy ordinális hasznossági skálát ad. A probléma ennek kardinalizálása, azaz az egyes jövedelemszintekhez kapcsolódó preferenciaszintekhez számszerű értékek hozzárendelése, mindezt úgy, hogy az értékeknek nőniük kell az ordinális skála miatt.

$$v(c^*) = U(M, m; \pi^*, 1 - \pi^*) = \pi^*$$


Legyen $m=0$ és $M=1000$ dollár.

A c^* értéke legyen 250 dollár

Ekkor a $\pi^*=0,5$, azaz ez az a szint, ahol közömbösek vagyunk a biztos 250 dollár jövedelem és a bizonytalan szerencsejáték között. Tehát a 250 dollár biztos jövedelmet jelentő következményhez $\frac{1}{2}$ hasznossági értéket rendelünk: $v(250)=0,5$, ami nem más, mint a $v(c)$ görbe Q pontja az ábrán.

Ha ezt A esetnek hívjuk és ehhez veszünk egy B alternatívát, ahol három lehetséges kimenetel fordulhat elő: $B=(810,360,160; 0,1, 0,5, 0,4)$, tehát 10%-al kapunk 810 dollárt, 50%-al 360 dollárt illetve 40%-al 160 dollárt. A kérdés a szokásos, melyiket válasszuk? Ehhez a következő $v(c)$ függvényt tudjuk: $v(c)=(c/1000)^{1/2}$, mely a referencialutri-hasznosság értékei. Ezek a következők szerint alakulnak: $v(810)=0,9$; $v(360)=0,6$; $v(160)=0,4$, azaz a 810 dolláros összegű nyeremény a preferenciákat illetően 90%-os eséllyel sikeresnek bizonyuló referencialutrival egyenértékű, és így tovább.

A kérdés tehát, hogy mi a siker átfogó valószínűségi értéke? Ez pedig megadható a következőképpen: $0,1(0,9)+0,5(0,6)+0,4(0,4) = 0,55$ – ami pedig az összetett valószínűségek kiszámítási szabálya alapján jön ki.

Így tehát láthatjuk, hogy ebben a példában a B opció jobbnak minősül az A-nak, hiszem $0,55 > 0,5$.

Iromdalomjegyzék

1. J. Hirschleifer – J. G. Riley: A bizonytalanságban hozott döntések elemei. In Csontos László (szerk.): A racionális döntések elmélete, Budapest, Osiris, 1998
2. Temesi József: A döntéselmélet alapjai

• Kilátáselmélet (Prospect Theory) – Szűcs Katalin

A dolgozat alapjául vett, kilátáselméletről szóló cikket 1979-ben publikálta Daniel Kahneman és Amos Tversky. E munkájuk sokáig nem volt elismert, azonban 2002-ben közgazdasági Nobel-díjban részesültek érte, amit sajnos Tversky nem élt meg.

A kilátáselmélet egy alternatív magyarázat a kockázatos helyzetben történő egyéni döntéshozatalhoz. Azért született meg, hogy pénzbeli nyereséggel vagy veszteséggel járó, ismert valószínűségű kilátások közötti választást írassunk le vele, azonban bonyolultabb választásokra is kiterjeszthető. A választási folyamatot két szakaszra osztja. A kezdeti, *szerkesztő szakaszban* a lehetséges kilátások előzetes elemzése történik meg, az ezt követő, *értékelő szakaszban* pedig a megszerkesztett kilátások értékelése, majd ezek közül a legnagyobb értékű kiválasztása következik.

A szerkesztő szakasz

Ebben a szakaszban a választási lehetőségek megszerkesztése, újrafogalmazása történik, ezzel segítve a későbbi értékelést és választást. Műveletei segítségével átalakíthatóak a lehetséges kilátásokhoz kapcsolódó következmények és valószínűségek. Az alábbiakban részletesebben bemutatom a legfőbb műveleteit.

Kódolás

Az emberek a következményeket általában nyereségként vagy veszteségként fogják fel, nem pedig a gazdagság vagy jólét végső állapotaiként. A nyereségek és a veszteségek valamilyen semleges vonatkoztatóponthoz viszonyítva vannak meghatározva. Ez általában megfelel az épp fennálló vagyoni helyzetnek, amely esetben a nyereségek és veszteségek megegyeznek a ténylegesen megkapott vagy kifizetett összegekkel. Ugyanakkor a vonatkoztatópont helyét és a következmények e pontból adódó kódolását befolyásolja a lehetséges kilátások megfogalmazása és a döntéshozó várakozásai.

Összevonás

A kilátások időnként egyszerűsíthetők az azonos következményekhez kapcsolódó valószínűségek összevonásával. Pl. a (200, 0.25; 200, 0.25) kilátásból az összevonás után (200, 0.50) lesz, és később ebben a formában értékeljük.

Elválasztás

Amennyiben létezik kockázatmentes összetevő, azt elválaszthatjuk a kockázatos összetevőtől.

Pl. a $(300, 0.80; 200, 0.20)$ kilátás felbontható egy 200-as biztos nyereségre és $(100, 0.80)$ kockázatos kilátásra. Ugyanígy a $(-400, 0.40; -100, 0.60)$ kilátás felbontható egy biztos 100-as veszteségre és egy $(-300, 0.40)$ -es kilátásra.

Az eddig bemutatott műveletek egyetlen kilátás szerkesztésére vonatkoznak, a következők azonban kettő vagy annál több kilátásra alkalmazhatóak.

Törlés

Az elszigeteléshatás lényege a lehetséges kilátások közös összetevőiben rejlik. Ha egy játszma két szakaszból áll, az első szakasz eredményétől eltekinthetünk, az nem lesz befolyással a második szakaszban hozott döntésre. Emiatt a lehetséges kilátások ilyen közös összetevőit elvethetjük. A másik típus, amikor közös elemek, vagyis következmény-valószínűség párok szerepelnek a két kilátásban, ekkor ezektől mindkét kilátás esetén eltekinthetünk. Pl. A $(200, 0.20; 100, 0.50; -50, 0.30)$ és a $(200, 0.20; 150, 0.50; -100, 0.30)$ kilátásokból törlés után a következő, egyszerűsített kilátásokat kapjuk: $(100, 0.50; -50, 0.30)$ és $(150, 0.50; -100, 0.30)$.

Ezek voltak a fontosabb műveletek, de ezeken kívül még van kettő, amit érdemes megemlíteni.

Egyszerűsítés

Valószínűségek vagy következmények kerekítését értünk alatta. Pl. a $(101, 0.49)$ kilátás újrakódolható a 100 megnyerésére való 50%-os esélyként. Különösen fontos változata a nagyon valószínűtlen következmények elvetése.

Dominancia felderítése

Olyan alárendelt alternatívák keresése, amelyeket további értékelés nélkül el lehet vetni. Pl. $(500, 0.20)$ dominálja a $(500, 0.15)$ kilátást, ezért az utóbbi elhagyható.

Megjegyzés: Indokolt feltételezni, hogy az eredeti megfogalmazás nem teszi lehetővé a további szerkesztést vagy a megszerkesztett kilátások egyértelműen meghatározhatóak.

Az értékelő szakasz

A szerkesztő szakaszt követően a döntéshozó feltehetően értékelni fogja mindegyik megszerkesztett kilátást, és azok közül kiválasztja a legnagyobb értékűt. A megszerkesztett kilátás teljes értéke (jele: V) két skála segítségével fejezhető ki.

Az első skála a π , amely minden p valószínűséghez egy $\pi(p)$ döntési súlyt rendel, amely p -nek a kilátás teljes értékére gyakorolt hatását mutatja (tehát nem valószínűséget mér). Általában

$$\pi(p) + \pi(1-p) < 1.$$

A második skála a v , amely minden x következményhez egy $v(x)$ számot rendel, amely az adott kimenetel vonatkoztatóponttól való eltérését mutatja, vagyis a nyereséget vagy a veszteséget.

A kilátások

Jelen esetben $(x, p; y, q)$ alakú kilátásokkal foglalkozunk, melyek legfeljebb két nem nulla következménnyel rendelkeznek. Ilyen esetekben p valószínűséggel x -hez, q valószínűséggel y -hoz lehet jutni, $(1-p-q)$ valószínűséggel pedig semmit nem nyerünk és nem veszítünk, ahol $p + q \leq 1$.

A kilátás szigorúan pozitív, ha minden következménye pozitív, azaz $x, y > 0$ és $p + q = 1$. Szigorúan negatív, ha minden következménye negatív, azaz $x, y < 0$ és $p + q = 1$. Szabályos, ha nem szigorúan negatív, és nem is szigorúan pozitív.

Alapegyenlet

Az elmélet alapegyenlete azt a módszert írja le, amellyel π -t és v -t összekapcsolva meghatározhatjuk a szabályos kilátások általános értékét. Amennyiben $(x, p; y, q)$ szabályos kilátás, tehát vagy $p + q < 1$ vagy $x \geq 0 \geq y$ vagy $x \leq 0 \leq y$, akkor $V(x, p; y, q) = \pi(p) \cdot v(x) + \pi(q) \cdot v(y)$, ahol $v(0)=0$, $\pi(0)=0$ és $\pi(1)=1$. V -t a kilátásokon, v -t pedig a következményeken definiáljuk. A két skála a biztos kilátásra egybeesik, ahol $V(x, 1, 0) = V(x) = v(x)$. Az egyenlet a várható hasznosság elvét általánosítja azzal, hogy enyhíti a várakozás elvét.

Szigorúan negatív és szigorúan pozitív szabályok értékelése

A szerkesztő szakaszban az ilyen kilátások két összetevőjét elválasztják. Egyrészt a kockázatmentes összetevőt, azaz a minimális nyereséget vagy veszteséget, amely biztosan megszerezhető vagy kifizetendő. Másrészt a kockázatos összetevőt, azaz azt a járulékos nyereséget vagy veszteséget, amely a valódi tét. Értékelésük a következő egyenlettel írható le: ha $p + q = 1$ és $[x > y > 0$ vagy $x < y < 0]$, akkor $V(x, p; y, q) = v(y) + \pi(p) \cdot [v(x) - v(y)]$.

Tehát egy szigorúan negatív vagy pozitív kilátás egyenlő a kockázatmentes összetevő értékének és a következmények értéke közti különbség összegével, a különbség megszorozva a legszélsőségesebb következményhez kapcsolódó súllyal. Pl. $V(400, 0.25; 100, 0.75) = v(100) + \pi(0.25) \cdot [v(400) - v(100)]$. Ezek alapján látható, hogy a döntési súly nem vonatkozik a

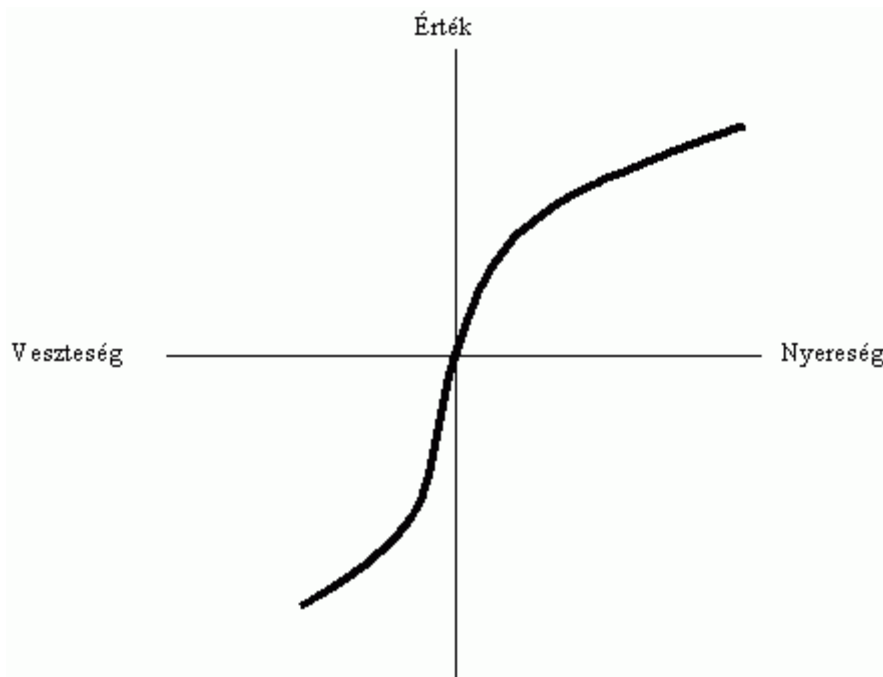
kockázatmentes összetevőre.

Megjegyzés: Az értékek a változásokhoz, nem pedig a végső állapotokhoz kapcsolódnak, illetve a döntési súly nem esik egybe a megállapított valószínűségekkel.

Az értékfüggvény

Az értéket nem végső állapotok hordozzák, hanem a vagyonban vagy a jólétben bekövetkezett változások. Szigorúbban véve az értéket kétargumentumú függvénynek kell tekinteni, argumentumai a vonatkoztatópontul szolgáló vagyoni helyzet és a vonatkoztatóponthoz képest bekövetkezett (pozitív vagy negatív irányú) változás nagysága.

A pénzbeli változásokra is érvényes, hogy a pszichológiai válasz a fizikai változás nagyságának konkáv függvénye. Pl. könnyebb megérezni, ha a szoba hőmérséklete 3 °C és 6 °C között változik, mint a 13 °C és 16 °C közötti változást. Ezt pénzbeli változásokra vonatkoztatva: a 100-as és a 200-as veszteség közötti különbség nagyobbban tűnik, mint az 1100-as és 1200-as közötti, hacsak nem tűrhetetlen a nagyobb veszteség. Ebből adódóan feltételezhetjük, hogy az értékfüggvény általában konkáv a vonatkoztatópont felett ($v'(x) < 0$, ahol $x > 0$), alatta pedig gyakran konvex ($v'(x) > 0$, ahol $x < 0$). Ennek jelentése, hogy a nyereségek és veszteségek határértéke egyaránt csökken a nagyságuk csökkenésével együtt. Meredekebb a veszteségek, mint a nyereségek esetén (a veszteség jobban látható, mint a nyereség). Az értékfüggvényt a következő ábra szemlélteti.



2. ábra – Az értékfüggvény

Nézzünk erre egy példát. Adott a következő két alternatíva az első problémában: (6000, 0.25) és (4000, 0.25; 2000, 0.25), illetve ennek tükrözése a második problémában: (-6000, 0.25) és (-4000, 0.25; -2000, 0.25)

Az első problémánál a megkérdezettek közül a többség a második opciót preferálta. A második problémánál pedig a többség az első opciót választotta.

Az alapegyenletet alkalmazva e két probléma modális preferenciájára a következőket kapjuk:

$$\pi(0.25)*v(6000) < \pi(0.25)*[v(4000) + v(2000)]$$

$$\pi(0.25)*v(-6000) > \pi(0.25)*[v(-4000) + v(-2000)]$$

Ebből a súlyok elhagyásával (egyszerűsítés) a következőket kapjuk: $v(6000) < v(4000) + v(2000)$ és $v(-6000) > v(-4000) + v(-2000)$

Ezek a preferenciák megegyeznek azzal a feltevéssel, hogy az értékfüggvény konkáv nyereség esetén és konvex veszteség esetén. A sajátos körülmények preferenciára gyakorolt hatása befolyásolhatja a hasznossági függvényt, ezért az nem mindig az egyén „tisztá” attitűdjét tükrözi.

A jólét változásaira vonatkozó attitűdök kiemelkedő jellegzetessége, hogy a veszteség jobban látható, mint a nyereség. Ebből következhet az is, hogy a legtöbb ember határozottan elutasítja az $(x, 0.50; -x, 0.50)$ formájú szimmetrikus fogadásokat. Ha egy $0 \leq y < x$ értékre nézzük ugyanezt a problémát, akkor az $(y, 0.50; -y, 0.50)$ preferenciát fog élvezni $(x, 0.50; -x, 0.50)$ felett.

Összefoglalva az értékfüggvény a vonatkoztatóponttól való eltérés alapján határozható meg, nyereség esetén konkáv, veszteség esetén általában konvex, illetve meredekebb a veszteségek, mint a nyereségek esetén.

A súlyfüggvény

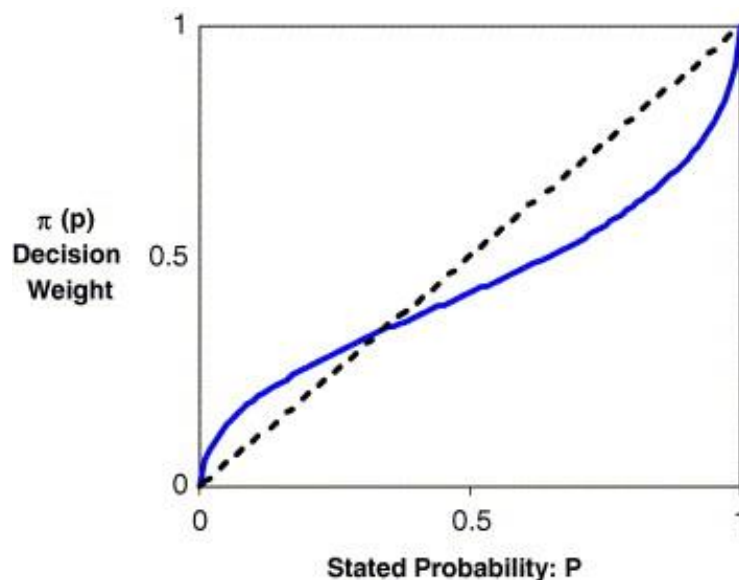
A kilátáselméletben minden következményt meg kell szorozni a döntési súllyal. A döntési súly a kilátások közötti választásokból következtethető ki. Ezek azonban nem valószínűségek, mert nem követik a valószínűségi axiómákat és nem lehet a vélekedés mértékét kifejező mértékegységnek felfogni őket.

Például vegyünk egy olyan szerencsejátékot, amelyben a pénzfeldobás kimenetelétől függően 1000-t lehet nyerni vagy semmit. Ebben a helyzetben alapvetően 0.50 az esély a nyeresésre, a választásokból származó döntési súly azonban valószínűleg ennél kisebb lesz: $\pi(0.50) < 0.50$. A döntési súlyok az eseményeknek a kilátás kíváncsiságára gyakorolt hatását mérik, nem csak az események bekövetkezésének észlelt valószínűségét. A két mérték akkor

esik egybe (pl. $\pi(p)=p$), ha érvényes a várakozáselv, egyébként nem.

A p döntési függvény a döntési súlyokat a megállapított valószínűségekhez kapcsolja. π p -nek emelkedő függvénye: $\pi(0)=0$ $\pi(1)=1$. Ez azt jelenti, hogy nem vesszük figyelembe azokat a következményeket, amelyek a lehetetlen eseménytől függnak, és a skálát úgy normalizáljuk, hogy $\pi(p)$ a p valószínűséghez és az adott eseményhez rendelt súlyok arányát jelenti.

Kis p értékek esetén π a p -nek szubadditív függvénye lesz, azaz $\pi(rp) > r\pi(p)$, ahol $0 < r < 1$. A nagyon kis valószínűségeket általában túlsúlyozzák, azaz $\pi(p) > p$ (kis p esetén). Ennek ellenére a bizonyítékok azt sugallják, hogy minden $0 < p < 1$ esetén $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$. Ezt a tulajdonságot csökkent bizonyosságnak nevezzük (subcertainty). Ebből következik, hogy π regresszív p tekintetében, azaz a preferenciák kevésbé érzékenyek a valószínűség változásaira, mint amennyire azt a várakozás elve előírná.



3. ábra – egy lehetséges súlyfüggvény

Források:

- Csontos László által válogatott – A racionális döntések elmélete című könyv kapcsolódó fejezete, mely az 1979-ben megjelent cikk fordítása (Daniel Kahneman, Amos Tversky)
- http://hu.wikipedia.org/wiki/Amos_Nathan_Tversky

Képek forrásai:

- <http://www.szociologia.hu/dynamic/9901sz02.gif>
- <http://ars.els-cdn.com/content/image/1-s2.0-S0968090X05000136-gr2.jpg>

- **A ZAPROS módszer bemutatása a többszemponútú rangsorolás és az összehasonlíthatóság problémájára Nagy Viktor**

Bevezetés

Strukturálatlan döntési problémák

Egy cég vagy csoport döntései mögött sokszor nem lehet pontos összefüggéseket találni, a döntések mögött nincsenek kvantitatív értékek, kardinális skálára helyezhető kritériumok. A döntéshozók preferenciái ilyenkor jellemzően teljesen szubjektívek, a döntések mögötti matematikai modellt lehetetlen megtalálni. Ennek ellenére ezeknek a döntési problémáknak szükségük lehet döntéstámogatási rendszerekre. Jellemzően olyankor, amikor sok alternatíva közül kell választani és az alternatívákban több, nehezen összehasonlítható kritérium van, melyek csak ordinális skálán helyezhetők el. A döntéshozók továbbá jellemzően nem ismerik a döntéstudományt, preferenciáikat, válaszaikat verbális formában fejezik ki. Ezeket a problémákat a strukturálatlan döntési problémák egy laza csoportjába sorolhatjuk. Ezek a problémák területüket tekintve nagyon különbözőek lehetnek, de a fent leírt jellemzők közősek bennük.

Verbális döntésanalízis

A verbális döntésanalízis (Verban Decision Analysis - VDA) a többszemponútú döntésanalízis (Multicriteria Decision Analysis - MCDA) területének egy ígéretes ága. A VDA legmeghatározóbb jellemzője az, hogy a teljes eljárás alatt verbális információkat (pusztán kvalitatív, csak ordinális skálán elhelyezhető) használ, és nincs olyan fázis, amikor az adatokat numerikus formába transzformálná. Az eljárás során jellemző még, hogy a probléma leírásánál és információ gyűjtésnél a döntési problémára jellemző szaknyelvet használja, amely a döntéshozónak megszokott és természetes. A döntéshozótól kapott információk az adott döntéshozóra jellegzetesek, és az ő szubjektív preferenciáit jellemzik. A kapott köztes és végső eredmények visszafejtése betekintést adhat a döntéshozó gondolkodásába, további következtetések levonását teheti lehetővé. Mivel az információt a döntéshozó és csak a döntéshozó szolgáltatja, így abban lehetnek hibák, azaz inkonzisztenciák. Mivel egy adott döntéshozó szempontjából mérlegelünk, ezért a döntési szabályokról meg kell követelni, hogy racionálisak és konzisztensek legyenek. Ez teljesen érthető hiszen „tévedni emberi dolog”, de

a tévedéseket egy VDA eljárásnak tudnia kell kezelni. Ez a kezelés olyan speciális eljárásokat jelent, amelyek lehetővé teszik a döntésekben kódolt ellentmondások felderítését és eltávolítását. Ha a döntési szabályok több független döntéshozó döntésein alapulnak, akkor a fenti követelmények nem lehetnek érvényesek, mert a döntéshozók döntései tudjuk, hogy szubjektívek és különbözőek lehetnek. Tehát egyes döntéshozók döntései lehetnek hasonlóak, különbözőek de akár ellentmondásosak is. Az ilyen különleges esetek nem hagyhatók ki, és nem is lehet a kezelésüket a döntéshozók megegyezésére bízni. Ha egy VDA eljárás ezeket megengedi, akkor a kezelésükről is gondoskodnia kell. Látható tehát, hogy a VDA eljárások egy az emberi gondolkodással, logikával és pszichével harmonizáló eljárást igyekeznek megvalósítani, ami egy-egy döntéshozó gondolkodásának absztrakt lenyomatát igyekszik tömöríteni, hogy az később nagy mennyiségű alternatíva közötti döntések támogatásában alkalmazható legyen.

Oleg I. Larichev

Oleg I. Larichev professzor (1934 - 2003) a VDA és MCDA területeinek egyik jeles kutatója. Több könyve, és több mint 200 cikke született a döntéelmélet, irányítás technika és mesterséges intelligencia témáiban, és a dolgozatban ismertetett ZAPROS módszer kidolgozása is az ő nevéhez fűződik. Egyetemi tanulmányait 1958-ban a Moszkvai Műszaki Egyetemen végezte el, majd 1965-ben kapta meg a PhD fokozatát a Moszkvai Tudományos Akadémiától. A témája akkor az irányítás elméletéhez fűződött. Habilitációját 1975-ben már a döntéelmélet területén, kutatási-fejlesztés erőforrás allokáció témában végezte.

Többszemponú rangsorolási probléma

Az MCDA olyan feladatok strukturálásával és megoldásával foglalkozik, amelyekben a döntést egyszerre több kritérium alapján kell meghozni. A cél nyilván az ilyen jellegű problémákkal foglalkozó döntéshozók támogatása. Jellemzően nincs egy darab jól meghatározott optimális döntés, és ezért szükséges a döntéshozó preferenciáit figyelembe venni ahhoz, hogy a megoldások között választhassunk. A probléma „megoldása” több módon is értelmezhető. Jelentheti egy „legjobb” alternatíva kiválasztását alternatívák egy halmazából. Ebben az esetben persze a legjobb az a döntés hozó által leginkább preferáltat jelenti. A megoldás egy másik értelmezése az alternatíva halmazból egy jó alternatívából álló kis méretű részhalmaz kiválasztása, vagy az alternatívák csoportosítása különböző preferencia halmazokba. Szélsőséges esetben jelentheti akár az összes „nem dominált”

alternatíva kiválasztását, ami nyilván lehet egymással azonos mértékben elfogadható, vagy egymással nem összehasonlítható alternatívák halmaza. A nehézség a több kritérium jelenlétéből adódik, hiszen ilyenkor nincsen többé úgy optimális megoldás, hogy ne használtunk volna fel valamilyen preferencia információt. A kritériumokról érdemes még annyit megjegyezni, hogy megkülönböztetünk olyan eseteket, ahol egyes kritériumok helyettesíthetők más kritériumokkal és olyanokat, ahol nem értelmezett a helyettesíthetőség fogalma.

Modell

A következőkben megkísérlem a dolgozatban elemzett többszemponútú problémák modelljének formális leírását.

Adott :

1. $K=1,2,\dots,N$ a kritériumok halmaza
2. n_q a q -adik kritérium skáláján felvehető lehetséges értékek száma ($q \in K$);
3. $X_q = \{x_{iq}\}$ a q -adik kritérium skáláján felvehető értékek halmaza; $|X_q| = n_q$ ($q \in K$);
a skálán az értékek a legjobb értéktől a legrosszabb felé tartanak;
az értékek rendezése a skálán a többi skála értékeitől független;
4. $Y = X_1 * X_2 * \dots * X_N$ a következő típusú $y_i \in Y$ vektorok halmaza:

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iN}), \text{ ahol } y_{iq} \in X_q \text{ és } P = |Y| = \prod_{i=1}^N n_i;$$

Az összes lehetséges alternatívák halmaza.

5. $A = a_i \in Y$; $i=1,2,\dots,t$ – vektorok egy t elemű halmaza, ami a valós alternatívák halmaza.

Példa

A fenti modellre illeszkedő példa lehet egy intézmény, amely kutatás-fejlesztési projektekre ad támogatást, és el kell bírálnia nagy számú pályázó közül, hogy melyek azok, amelyek a támogatást végül megkapják. Ahhoz, hogy a példa könnyen levezethető legyen és ne vesszünk el a részletek és mellékes számítások között, egy egyszerű kritériumrendszert vezetünk be. A pályázatokat négy szempont alapján osztályozzuk:

- Eredetiség, innováció mértéke

1. Teljesen eredeti, innovatív pályázat

2. Eredeti elemeket tartalmazó pályázat
3. Régebbi innovációk bizonyos szempontból való továbbfejlesztése
4. Korábbi kutatásból összegyűlt adatok újrafeldolgozása, összegyűjtése

- Kilátások a sikerre

1. A siker nagyon valószínű
2. A siker valószínű
3. A siker nem kizárható
4. A siker valószínűtlen

- A pályázó képzettsége

1. A pályázó magasan képzett
2. A pályázó átlagosan képzett
3. A pályázó képzettségéről nincsenek információk
4. A pályázó alacsonyan képzett

- Szükséges munka mennyisége

1. Nagy mennyiségű munka
2. Közepes mennyiségű munka
3. Kis mennyiségű munka

Az alternatívák tehát egy-egy szempont értékből álló vektorok. Az összes lehetséges alternatíva halmaza az összes ilyen vektor, azaz a szempontokból képezhető összes permutáció. A valós életben ennek csak egy részhalmaza fog jelentkezni, de feltételezhető, hogy nagy számú pályázat lesz.

A könnyebb hivatkozás érdekében minden szempontot egy betűvel jelölünk. Az eredetiség, a siker, a képzettség és a munka mennyisége, rendre kapják az A, B, C és D betűket. Adott szempont rendezett skáláján legyen X_1 a legjobb lehetséges érték, és rendre $X_2, \dots, X_N$ a

soron következő értékek, ahol X a szempont betűjele és N az adott szemponton felvehető értékek száma.

A. Eredetiség	A1. Teljesen eredeti, innovatív pályázat
	A2. Eredeti elemeket tartalmazó pályázat
	A3. Régebbi innovációk bizonyos szempontból való továbbfejlesztése
	A4. Korábbi kutatásból összegyűlt adatok újrafeldolgozása, összegyűjtése
B. Kilátások a sikerre	B1. A siker nagyon valószínű
	B2. A siker valószínű
	B3. A siker nem kizárható
	B4. A siker valószínűtlen
C. Képzettség	C1. A pályázó nagyon képzett
	C2. A pályázó átlagosan képzett
	C3. A pályázó képzettségéről nincsenek információk
	C4. A pályázó alacsonyan képzett
D. Munka mennyisége	D1. Nagy mennyiségű munka
	D2. Közepes mennyiségű munka
	D3. Kis mennyiségű munka

ZAPROS

A ZAPROS módszer egy többszempontú választási eljárás, amelynek működése a döntéshozók által szolgáltatott kvalitatív információkon alapszik. A módszer alapjait Larichev és Moshkovich dolgozták ki. A ZAPROS módszer, és későbbi variánsai mind azon alapszanak, hogy a több szempontból felépülő alternatíván hogy részleges rendezést valósítsanak meg. A részleges rendezés megengedhet tehát össze nem hasonlítható értékeket is. Larichev szerint az embernek erősen korlátozott az a képessége, hogy nagy számú alternatíva között konzisztensen adja meg a preferenciáit. Az ő véleménye az volt, hogy a legbiztonságosabb megoldás ezen a téren, hogyha a döntéshozónak két alternatíva között kell döntenie és azok is csak két szempontból különbözhetnek. Nyilván ebben az esetben feltételezhető, hogy egy racionális döntéshozó ezt a preferenciát az összes többi szempont értékétől függetlenül képes meghatározni. A módszerhez feltételezzük, hogy egy szemponton

belül felállítható a felvehető értékeknek egy ordinális skálája, melyen egyértelmű preferencia rendezés állítható fel. Az értékek nagyvonalú kategóriákat jelölnek ki, és az árnyalatnyi eltérések elhanyagolhatók. A korábban felállított modell és példa megfelel ennek a leírásnak, és a ZAPROS módszer ilyen modelleken dolgozik, valamint a fenti alternatíva rendezés problémájára ajánl implementációt.

A ZAPROS eljárásra épülő minden eljárásban közös és alapvető lépés egy úgynevezett egyesített ordinális skála megalkotása (Joint Ordinal Scale – JOS). Ez a JOS a szempontok alapján létrehozott ordinális skála, ami alapján az egyes alternatívák a kritérium értékeiktől függően helyet kapnak az eljárás által megvalósított részleges rendezésben. A JOS egy a döntéshozó preferenciái alapján létrehozott preferencia rendezés. A ZAPROS módszer csak egy részleges rendezést kínál, mivel csak egy ideális „referenciával” szomszédos megoldásokat vesz számításba. A ZAPROS maga is egy orosz mozaikszó, amelynek hozzátétele fordítása a „Zárt eljárások referencia-közeli helyzetekre”. A következőkben az eredeti ZAPROS eljárást fogom ismertetni.

ZAPROS I

Amint azt az előzőekben említettem, a ZAPROS módszer a lehetséges alternatívák közötti preferencia mátrix részleges meghatározását kísérel meg. A tudás megszerzését itt az jelenti, hogy az ideális megoldással szomszédos alternatívák között meghatározásra kerül a döntéshozó relatív preferenciája. A valós alternatívák közötti részleges rendezés a következő 4 elv alapján kerül meghatározásra:

1. A nem dominált alternatívák szekvenciális kiválasztása. Ez egy rekurzív eljárás, melyben minden nem dominált alternatíva az 1-es rangot kapja, majd eltávolításra kerül a halmazból. A következő lépésben a maradék halmazból ismét kiválasztjuk a nem dominált alternatívákat, amelyek így a 2-es rangot kapják és szintén eltávolításra kerülnek. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a halmaz ki nem ürül.
2. A nem domináló alternatívák szekvenciális kiválasztása. Ez egy rekurzív eljárás, melyben minden nem domináló alternatíva az 1-es rangot kapja, majd eltávolításra kerül a halmazból. A következő lépésben a maradék halmazból ismét kiválasztjuk a nem domináló alternatívákat, amelyek így a 2-es rangot kapják és szintén eltávolításra kerülnek. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a halmaz ki nem ürül.

3. A legtöbb alternatívát domináló alternatívák szekvenciális kiválasztása. Az 1-es rangot azon alternatívák kapják, amelyek a legtöbb alternatívát dominálják, majd ezeket figyelmen kívül hagyva 2-es rangot kapják azok, akik a maradékból a legtöbbet dominálják és így tovább.
4. A legkevesebb alternatíva által dominált alternatívák szekvenciális kiválasztása. Ez tulajdonképpen az előző eljárás megfordítása.

Ebből a négy elvből kapott átlagos rang alapján már rendezhetővé válnak a valós alternatívák.

Döntéshozói preferenciák kinyerése

Ahhoz, hogy a dominanciát vizsgálhassuk az alternatívák között, szükségünk van a döntéshozó preferenciájával kapcsolatos információira. Az előzőekben ismertetettek alapján a ZAPROS módszer a lehetséges alternatívák összehasonlítását páronként végzi, feltételezve, hogy két szemponton kívül minden más szempont a lehető legjobb értéket veszi fel. A maradék két szempont közül azt vizsgáljuk, hogy az egyik vagy a másik romlása elfogadhatóbb a döntéshozó szempontjából. Ezt természetes nyelvű kérdésekkel tudjuk meg a döntéshozótól:

„Melyik elfogadhatóbb? (a) Az X szempont X2-be romlása (Y1 mellett), vagy (b) az Y szempont Y2-be romlása (X1 mellett)? (c) Egyformán rosszak.”

A döntéshozó a , b vagy c válasza határozza meg a preferenciát. Értelmezhetünk itt egyfajta tranzitivitást a lehetőségek között. Ha döntéshozó válasza szerint X2-be romlás preferáltabb mint az Y2-be romlás, akkor nyilván való, hogy az X2-be romlás preferáltabb az Y3, Y4, ... etc. lehetőségeknél is. Ezt az összehasonlítást páronként az összes szempontra el kell végezni. Érdemes kitérni arra, hogy a döntéshozó válaszai inkonzisztenciákat, ellentmondásokat is tartalmazhatnak. A rendszernek ezt tudnia kell érzékelni és kezelni. A kezelés azt jelenti, hogy az ellentmondásra fel kell hívni a döntéshozó figyelmét és meg kell kérni az ellentmondás feloldására. Ilyen ellentmondás lehet például: X2 preferáltabb Y2-nél, amely preferáltabb Z2-nél, amely preferáltabb X2-nél. Ez egy kört hoz be a modellbe, amely egy ellentmondás a tranzitivitás sérülése miatt. Ha megfelelő mennyiségű információt összegyűjtött a rendszer, akkor elkezdődhet a valós alternatívák rangsorolása.

Példa az eljárás működésére

Az eljárás bemutatására a már ismertetett modellre adott példán keresztül fog történni, ahol kutatás-fejlesztés projekteket kell rangsorolni. Az alternatívák a modell szerint (A, B, C, D) alakú vektorok, és ezek között kell a döntéshozónak a preferenciákat meghatározni. A, B, C, D lehetséges értékei esettől függően 1, 2, 3 vagy 1, 2, 3, 4. Az értékek rangsorolása úgy történik, hogy a legjobb érték kapja az 1-es rangot, a következő legjobb a 2-eset és így tovább. A lehetséges vektorok tehát:

- (1, 1, 1) – Kitüntetett szerepű vektor. Ez a legjobb amit elérhetünk, nyilvánvalóan mindenkit dominál.
- (2, 1, 1, 1); (3, 1, 1, 1); (4, 1, 1, 1); (1, 2, 1, 1); (1, 3, 1, 1); (1, 4, 1, 1); (1, 1, 2, 1); (1, 1, 3, 1); (1, 1, 4, 1); (1, 1, 1, 2); (1, 1, 1, 3)

Kapják ezek a vektorok rendre az a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, d1, d2 jelzéseket.

Ekkor a döntéshozó által adott preferenciákból elkészíthető az úgynevezett egyesített ordinális skála, azaz a JOS, a tranzitív dominancia információkat felhasználva. A JOS ebben a példában a következő:

JOS	$d1 > a1 > d2 > c1 > a2 > c2 > b1 > a3 > c3 > b2 > b3$
-----	--

Ez a skála leírható természetes nyelvű jelentéssel is, miszerint pl.:

„A sikerre való nagy esély jobban preferált, mint a nagyon felkészült pályázó.”

Ettől most eltekintek a tömörség érdekében. A JOS elemeihez a következőképpen rendelünk értékeket:

Rang	Vektor
1	(1, 1, 1, 1)
2	d1 (1, 1, 1, 2)
3	a1 (2, 1, 1, 1)
4	d2 (1, 1, 1, 3)
5	c1 (1, 1, 2, 1)
6	a2 (3, 1, 1, 1)
7	c2 (1, 1, 3, 1)

8	b1 (1, 2, 1, 1)
9	a3 (4, 1, 1, 1)
10	c3 (1, 1, 4, 1)
11	b2 (1, 3, 1, 1)
12	b3 (1, 4, 1, 1)

A JOS mellé még szükségünk van olyan szabályokra, amelyekkel el tudjuk dönteni két alternatíváról, hogy melyik a preferáltabb. Ehhez a következő definíciót kell bevezetni.

- Az X alternatíva nem kevésbé preferált Y -hoz képest, ha X minden Q kritérium értékéhez, létezik olyan R kritérium érték Y -ban, hogy az $(1, \dots, Q, \dots, 1)$ vektor nem kevésbé preferált mint az $(1, \dots, R, \dots, 1)$ vektor, a JOS szerint.

Az X és Y vektor összehasonlítására tehát a következő eljárás adódik.

- Legyen $R(X_{Q_i})$ annak a vektornak a rangja a JOS-ben, amelynek értéke a következő szerint alakul: $(1, \dots, Q_i, \dots, 1)$, ahol Q_i az i -edik szempont értéke X vektorában. Ekkor X ábrázolható egy $R(X) = (R(X_{Q_1}), \dots, R(X_{Q_n}))$ vektorral, ahol n nyilván a szempontok száma. A vektorban található értékeket rendezhetjük egy nem csökkenő sorrendbe. Legyen ez a rendezett vektor az $R^*(X)$. Ha ugyan ezt eljárást végrehajtjuk az Y vektorra (alternatívára), akkor megkapjuk az $R^*(Y)$ vektort is. Ebben az esetben a döntés a következő: X nem kevésbé preferáltabb Y -nál, ha $R^*(X) \leq R^*(Y)$.

Most már minden adott a valós alternatívák összehasonlítására. Tegyük fel, hogy a következő besorolású pályázati anyagok érkeztek:

Pályázat	Vektor
1	1243
2	3311
3	2122
4	2132
5	3321
6	3343
7	1243
8	2113
9	3443
10	3423

11	3233
12	3443

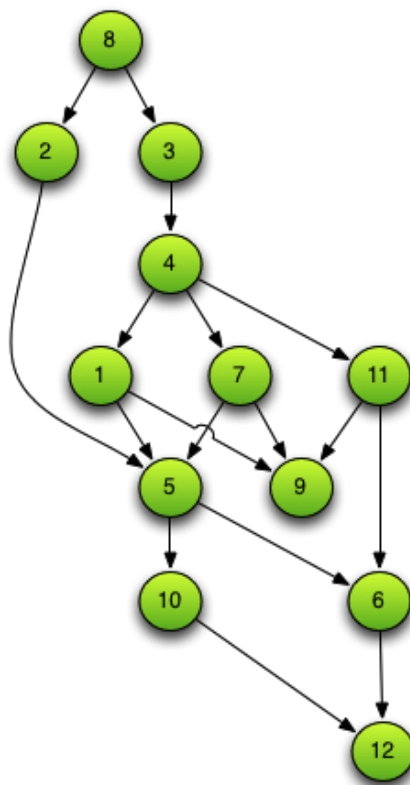
Emlékeztetőül itt vannak a JOS-ban elfoglalt rangok:

Rang	Vektor
1	(1, 1, 1, 1)
2	d1 (1, 1, 1, 2)
3	a1 (2, 1, 1, 1)
4	d2 (1, 1, 1, 3)
5	c1 (1, 1, 2, 1)
6	a2 (3, 1, 1, 1)
7	c2 (1, 1, 3, 1)
8	b1 (1, 2, 1, 1)
9	a3 (4, 1, 1, 1)
10	c3 (1, 1, 4, 1)
11	b2 (1, 3, 1, 1)
12	b3 (1, 4, 1, 1)

A vektorok értékeit kicseréljük a JOS-ban fellelhető rangjukra.

Pályázat	Vektor	Rang	Rendezett rang
1	1243	1, 8, 10, 4	1, 4, 8, 10
2	3311	6, 11, 1, 1	1, 1, 6, 11
3	2122	3, 1, 5, 2	1, 2, 3, 5
4	2132	3, 1, 7, 2	1, 2, 3, 7
5	3321	6, 11, 5, 1	1, 5, 6, 11
6	3343	6, 11, 10, 4	4, 6, 10, 11
7	1243	1, 8, 10, 4	1, 4, 8, 10
8	2113	3, 1, 1, 4	1, 1, 3, 4
9	3443	6, 12, 10, 4	4, 6, 12, 10
10	3423	6, 12, 5, 4	4, 5, 6, 12
11	3233	6, 8, 7, 4	4, 6, 7, 8
12	3443	6, 12, 10, 4	4, 6, 10, 12

A dominanciák alakulását a következő gráf szemlélteti:



Ebben a példában is látszik, hogy számos alternatíva nem összehasonlítható, és valóban a rendezés emiatt erősen részleges jellegű. A ZAPROS eljárás még nem fejeződött be, mert most került alkalmazásra az előzőekben említett négy elv a rendezés finomításához. A gráf felépítéséből adódóan belátható, hogy itt az eljárások alkalmazása sem segít feloldani az összehasonlíthatatlanság problémáját. Látszik tehát, hogy a ZAPROS módszer csak egy részleges rendezéssel tud szolgálni. Felhasználva a 4 elvet, a következő részleges rendezést kapjuk:

Rang	Alternatíva
1	8
2	2, 3
3	4
4	7, 1
5	11, 5
6	6, 10
7	9, 12

Jól látható, hogy a 8-as alternatíva konzisztensen első marad, ez nyilvánvaló, hiszen mindenkit dominál. A kettes, hármass alternatívák nem összehasonlíthatók, de a 3-as alternatíva többet dominál. A 7-es és 1-es alternatíva azonos, de például többet dominálnak a 11-nél, így az elé kerültek.

Megjegyzés

A ZAPROS módszer természetesen olyan szempontokra is alkalmazható, amelyek numerikus értékeket vesznek fel, esetleg még folytonosak is. Ilyenkor feltétel, hogy 5-7 kategóriába soroljuk az értékeket és a ZAPROS eljárás már csak ezeken a kategóriákon dolgozzon.

A 7-es számot az emberi megkülönböztető képesség határának ismerik el.

Larichev munkái alapján a 5-7 szempont és 2-5 érték/szempont esetén a döntéshozó által bevitt ellentmondások száma 1-3. Átlagosan 50 kérdésenként 1-2 ellentmondás volt egy egy döntéshozónál.

Következtetések

A ZAPROS módszer egy konzisztens, ellentmondás mentes eljárást nyújt a többszempontú döntések támogatására. A használatához nincsen szükség a döntéshozó előképzettségére a döntéselmélet területén, sőt annyit követel meg csak, hogy a döntéshozó egyszerű természetes nyelven megfogalmazott kérdésekre adjon válaszokat. A válaszok jól tömörítik a döntéshozó preferenciáit, és a módszer szoftveres implementációja sem bonyolult, csak elemi műveletekre van szükség. Nincs szükség arra sem, hogy a kritériumokhoz bármilyen kvantitatív értéket becsüljön a döntéshozó vagy egyéb szakértők, mert az eljárásnak csak

kvalitatív információkra van szüksége. A modell nagyon egyszerű maradhat mégis nagyban megkönnyítheti a döntés folyamatát, és a lehetséges alternatívák számának csökkentését.

A probléma az, hogy nagy számú szempont és érték esetén rengeteg kérdésre kell válaszolnia a döntéshozónak. Hozzávetőlegesen $\frac{N}{2} * (N - 1)$ lehetséges kritériumpár lehet egy adott feladatban. Ezekre mind kikérdezni a döntéshozót nem fizibilis, így a módszer alkalmazása limitált speciális problémákra. Ennek ellenére a módszert sikeresen alkalmazták valós kutatás-fejlesztés pályázatokra, és a használata elterjedt. Ha a döntési probléma jellege megfelel, akkor a ZAPROS módszer egy rendkívül hasznos és hatékony eljárást biztosíthat a döntéstámogatásra.