

Budapesti Corvinus Egyetem
MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetébe kihelyezett
Gazdasági Döntések Tanszék

Rapcsák Tamás

Többszempontú döntési problémák

Egyetemi oktatáshoz segédanyag



2007.

Tartalomjegyzék

I. TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI MÓDSZEREK	4
I.1. Többszempon t u d o n t e s i p r o b l e m a k m o d e l l e z e s e	4
I.1.1. Polano m o d s z e r	11
I.1.2. Szubjektív értékelések számszerűsítése	12
I.1.3. Dominancia	14
I.1.4. MaxMin és MaxMax szabály	14
I.1.5. Szűrési módszerek	15
I.1.6. A szempontok súlyozása	18
I.1.7. Lexikografikus rendezés	18
I.1.8. A döntési modellezés lépései	19
I.2. Analytic Hierarchy Process (AHP)	20
I.2.1. Páros összehasonlítás	21
I.2.1.1. Páros összehasonlítás mátrixok	21
I.2.1.2. Sajátvektor módszer	24
I.2.2. Tá v o l s á g m i n i m a l i z á l ó m o d s z e r e k	26
I.2.3. Disztributív AHP modell	27
I.2.4. Ideális AHP modell	29
I.2.5. Minősítő AHP modell	29
I.2.6. Rangsortfordulás	32
I.2.7. Példa hibás összegzésre	33
I.2.8. A súlyozás és az értékelések összegzése fa struktúra esetén	34
I.2.9. Érzékenységvizsgálat	34
I.2.10. Csoportos döntések	42
I.2.11. Döntési problémák reprezentációi	42
I.2.12. Expert Choice szoftvertechnológia	43
I.2.13. Erőforrás szétosztása	43
I.2.14. Példa optimalizálási problémából származó döntési feladatra	44
Irodalomjegyzék	47
I.3. A PROMETHEE módszerek	49
I.3.1. A PROMETHEE döntési modell	49
I.3.2. A szempontok súlyozása	52
I.3.3. Preferencia relációk	52
I.3.4. Általánosított szempontok	54
I.3.5. Döntési folyamatok	59
I.3.6. PROMETHEE I részleges rangsor	63
I.3.7. PROMETHEE II teljes rangsor	64
I.3.8. PROMETHEE V: döntés kényerfeltételek mellett	66

I.4. A GAIA vizualizálási módszer	67
I.4.1. A nettó döntési folyamat dekompozíciója	67
I.4.2. Az alternatívák ábrázolása	68
I.4.3. A szempontok ábrázolása	69
I.4.4. A súlyrendszer ábrázolása	70
I.4.5. Az alternatívák és szempontok reprezentációinak kapcsolata	70
I.4.6. GAIA érzékenységvizsgálat	72
Irodalomjegyzék	76
I.5. Egyszerű és abszolút többségi szavazás	77
I.5.1. Az egyszerű és abszolút többségi szavazás jellemzése	78
I.5.2. Szavazási paradoxon	81
I.5.3. Szavazási módszerek	82
Irodalomjegyzék	84
I.6. Egyéni döntési modellek	85
I.6.1. Döntési elv választása adott döntési mátrix esetén	85
I.6.2. Érzékenységvizsgálat adott döntési mátrix esetén	92
I.6.3. Inverz érzékenységvizsgálat	97
I.7. Csoportos döntési modellek	99
I.7.1. Többszemponútú, csoportos döntési probléma megfogalmazása	99
I.7.2. Csoportos döntéshozatal páros összehasonlítás mátrixok esetén	100
I.7.3. Csoportos döntési feladat megoldása	102
I.7.4. Döntési modellek szempontfával	104
I.7.4.1. Egyéni döntési modellek szempontfával	105
I.7.4.2. Csoportos döntési modellek szempontfával	106
Irodalomjegyzék	108
Összesített irodalomjegyzék	109

I. TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI MÓDSZEREK

I.1. Többszemponú döntési problémák modellezése

Az egyéni, csoportos és társadalmi döntések már az ókorban is nagymértékben befolyásolták a társadalom fejlődését, napjainkban azonban meghatározó jelentőségűvé váltak. A „döntés” szót most a leghétköznapibb értelemben használjuk, azaz egyéni döntés alatt pl. munkahely-változtatást vagy vendéglő-választást; csoportos döntés alatt pl. vállalati stratégia kialakítását, kutatási tervek értékelését vagy nukleáris hulladék lerakására alkalmas helyszín kiválasztását; társadalmi döntés alatt pl. parlamenti választásokat értünk.

Jóllehet, a döntési problémák a történelem folyamán mindig is fontosnak bizonyultak, hiszen a döntések komoly következményekkel jártak, és ezért már az ókorban valódi igény mutatkozott a megoldásukra (pl. Delphoi jóslatok)¹, de csak az információtechnológiában az utóbbi években végbement óriási fejlődés tette lehetővé ennek a területnek az intenzív kutatását és a felhasználói igényeket kielégítő szoftverrendszerek fejlesztését. Mindössze néhány éve lehetséges nagy komplexitású rendszerek megvalósítása számítógépeken, amiket esetenként több száz évnyi fejlesztői munkát tartalmazó szoftverrendszerek támogatnak.

Manapság a társadalom és a gazdaság magasabb hierarchikus szintjein jelentkező döntési feladatok felületes vizsgálata komoly károkat okozhat (pl. a felsőoktatási és a társadalombiztosítási rendszer nem kellően átgondolt megváltoztatása). Ugyanakkor az utóbbi időben kialakult

$$\text{adat-szoftver-hardver} \approx 70 - 20 - 10$$

viszony kiemelt jelentőséget biztosít a meglévő adatok minél jobb hasznosításának. A mai alkalmazói igény olyan intelligens szoftverrendszer, amely lehetővé teszi könnyen kezelhető, felhasználóbarát adatbázisok építését, lekérdezését, módosítását; az adatok és az eredmények szemléletes megjelenítését; a meglévő információkból a felhasználó által választott, meghatározott eljárások segítségével új adatok, információk generálását. Az ilyen típusú információ feldolgozás körébe tartoznak a döntési folyamatokat támogató rendszerek is.

A döntési problémák nagyon különbözőek lehetnek és a megoldásuk általában nehéz feladat. A továbbiakban a többszemponú döntési problémákkal foglalkozunk, ezen feladatosztály legfontosabb strukturális tulajdonságaival, megoldhatóságával, megoldó algoritmusaival és néhány döntéstámogató szoftverrel. Ezeket a problémákat nem könnyű kezelni, mivel nincs egységesen elfogadott megoldó algoritmus a különböző objektív és szubjektív szempontok szerinti értékelésre és az értékelések összesítésére (aggregálására).

¹A döntési problémák már az ókorban foglalkoztatták az embereket. Történelmi tanulmányainkból ismerjük, hogy az i.e. VIII. – i.e. IV. század között Delphoi-ban, Apollón papnőjétől uralkodók és hadvezérek kértek tanácsot egy-egy fontos döntésük előtt. Az egyik híres eset kb. 2500 évvel ezelőtt történt, mikor Krözus lüd király Kürosz perzsa uralkodó elleni hadjárata előtt a következő választ kapta: „Ha birodalma határfolyóját, a Haliszt átlépi, nagy birodalom dől meg.” Tudjuk, hogy a jóslat bevált és a virágzó lüd birodalom i.e. 546-ban összeomlott.

A döntési feladatok egyik jellegzetessége, hogy az értékelési szempontok általában lényegesen különböző karakterűek és gyakran megtörténik, hogy a szempontok között egymásnak ellentmondók, vagy részben ellentmondók is vannak, pl. a legjobb helyen levő, leghangulatósabb vendéglő a legdrágább. Újabb nehézséget jelent a szubjektív szempontok kezelése és az, hogy a döntési problémák megoldásakor az egész döntési folyamatot kell támogatni.

Fontos kérdés az alkalmazott szoftvertechnológia, illetve a döntési feladat megoldása során az eredmények bemutatása és értelmezése az alkalmazói körben. Ez utóbbival kapcsolatban megállapítható, hogy lényegesen nagyobb feladatokat lehet megoldani, mint megérteni. Optimalizáláselméletben, ami a döntési rendszerek egyik ágának is tekinthető, pl. 800 000 változós és 200 000 feltételes vegyes egészértékű feladatokat oldottak meg egy alkalmazási munka során (Bell et al., Interfaces 13 (1983) 4-23). E feladat megoldásának az áttekintése és megértése sem könnyű, ami alátámasztja azt, hogy nagyobb hangsúlyt kell fektetni az alkalmazások során az eredmények szemléletes megjelenítésére. (Az ORSA Journal on Computing az 1994. évi 9. számát teljes egészében a „Visualization and optimization” témakörnek szentelte, Jones pedig monográfiát jelentetett meg ugyanilyen cím alatt 1996-ban.)

Tekintsük a következő döntési problémát!

Fagylaltbolt helyének meghatározása

Egy fagylaltüzletlánc új üzletének a helyét kell meghatározni egy közepes méretű városban. A vállalatvezetés az üzleti szempontból legjobb helyet akarja kiválasztani; ez lesz a **cél** a döntési modellben. A vezetőket az üzlet láthatósága, a környéken lévő konkurens fagylaltboltok száma, az arra járók (mint lehetséges vásárlók) számában kifejezett forgalom mértéke és a helybérleti díj nagysága érdekli. Ezek lesznek a **szempontok**. Megjegyezzük, hogy a döntési modell építésekor figyelni kell arra, hogy a döntéshozó(ka)t nem szabad túlságosan sok szempont egyidejű figyelembevételével terhelni.

Példánkban az előzetes vizsgálat alapján 3 hely jön számításba: egy sétálóutca sok tizenévesrel és nyugdíjassal, akik közismerten fagylaltkedvelők, de a bérleti díj itt nagyon magas; egy belvárosi főút, ami sokkal kevésbé drága, de a járókelők zömét a hivatalnokok teszik ki, akik a hétvégeken és esténként nincsenek ott; egy forgalmasabb külvárosi központ, ahol a konkurencia kemény. Ezek lesznek az **alternatívák**. A döntési feladatokra jellemző, hogy mindegyik alternatívának lehet jó és rossz oldala, valamint a szempontok között lehet mennyiségi (bérleti díj) és nem számszerűsíthető (láthatóság) egyaránt.

Az általunk vizsgált döntési szituációban egy vagy több döntéshozó értékkel véges sok szempont alapján, ugyancsak véges számú alternatívát. Jelölje a továbbiakban az alternatívákat $A_1, \dots, A_n$, a szempontokat pedig $C_1, \dots, C_m$. Nézzük meg, hogyan lehet a döntési problémákat strukturálni!

Az új fagylaltüzlet helyének kiválasztásakor a **3 alternatíva** a következő:

- A1:** egy sétálóutca sok tizenévesrel és nyugdíjassal, akik közismerten fagylaltkedvelők, de a bérleti díj itt nagyon magas;

A2: egy belvárosi főút, ami sokkal kevésbé drága, de a járókelők zömét a hivatalnokok teszik ki, akik a hétvégeken és esténként nincsenek ott;

A3: egy forgalmasabb külvárosi központ, ahol a konkurencia kemény.

A **döntési szempontok** a következők:

C_1 : a környéken lévő konkurens fagyaltboltok száma;

C_2 : az arra járók (mint lehetséges vásárlók) számában kifejezett forgalom mértéke;

C_3 : a helybérleti díj nagysága;

C_4 : az üzlet láthatósága.

Ebben a döntési feladatban a cél a legjobb alternatíva meghatározása. Tegyük fel, hogy csak egy döntéshozó értékkel. A C_1 , C_2 és C_3 szempontok objektívek, mivel a C_1 és C_3 szempontokhoz tartozó értékek megadhatók, a C_2 értéke pedig a járókelők számlálásával megbecsülhető. A C_4 szempont szubjektív, mivel az értéke a döntéshozó szubjektív értékelésétől függ, és minőséget mér.

Ehhez a döntési feladathoz hozzárendelhetjük az alábbi döntési táblázatot:

Fagyaltbolt helyének meghatározása

	A_1	A_2	A_3
C_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
C_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
C_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
C_4			

I.1.1. Táblázat

A döntési táblázat első három sorában az a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, elemek az i -edik alternatívához és a j -edik objektív szemponthoz rendelhető számértékeket jelentik. A döntési táblázat negyedik sorának kitöltésekor viszont a döntéshozó pl. a következő szubjektív értékelések közül választhat:

nagyon jól látható;
közepesen jól látható;
rosszul látható.

Megjegyezzük, hogy a döntési problémából nem következik, hogy a döntéshozó csak három szubjektív ítélet közül választhat. Továbbra is kérdés viszont, hogyan lehet összegezni az objektív és szubjektív értékeléseket, figyelembe véve, hogy a szubjektív ítéletek nehezen számszerűsíthetők.

A döntési táblázat értékei gyakran különböző skálákhoz tartoznak (pl. az objektív és a szubjektív értékelések). A leggyakoribb értékskálák a következők:

névleges;
rangsor;
intervallum;
arányossági (hányados).

Névleges érték pl. az autó súlya, a ház ára stb.; rangsorbeli érték pl. a legjobb futó, a legolcsóbb ház stb.; intervallum értékek pl. az iskolai osztályzatok: 1, 2, 3, 4, 5; hányadosskálán megadott értékek pl. egy szerelőláncnál autóbusz/nap. Itt jegyezzük meg, hogy az intervallumskála és az arányossági skála között a legnagyobb különbség az, hogy az intervallumskálának nincs nulla pontja, míg az arányossági skálának van. Az I.1.1., I.1.2. és I.1.3. ábrák mutatják, hogy mit jelent ez gyakorlati példák esetén. Újabb nehézséget jelent a döntési feladat megoldása során, ha különböző dimenziójú fizikai mennyiségek szerepelnek a szempontok között.

Megjegyezzük, hogy a többszemponútú döntési feladatok a célokban is különbözhetnek. A megoldandó probléma lehet:

- a legjobb alternatíva kiválasztása;
- a néhány legjobb alternatíva kiválasztása;
- az alternatívák rangsorának meghatározása;
- az alternatívákhoz rendelhető névleges értékek meghatározása;
- olyan alternatívahalmaz kiválasztása, amely optimális a cél szempontjából.

Ez utóbbi kettőre példa az erőforrások szétosztása, illetve pályázatok kiválasztása korlátozott támogatási összeg mellett.

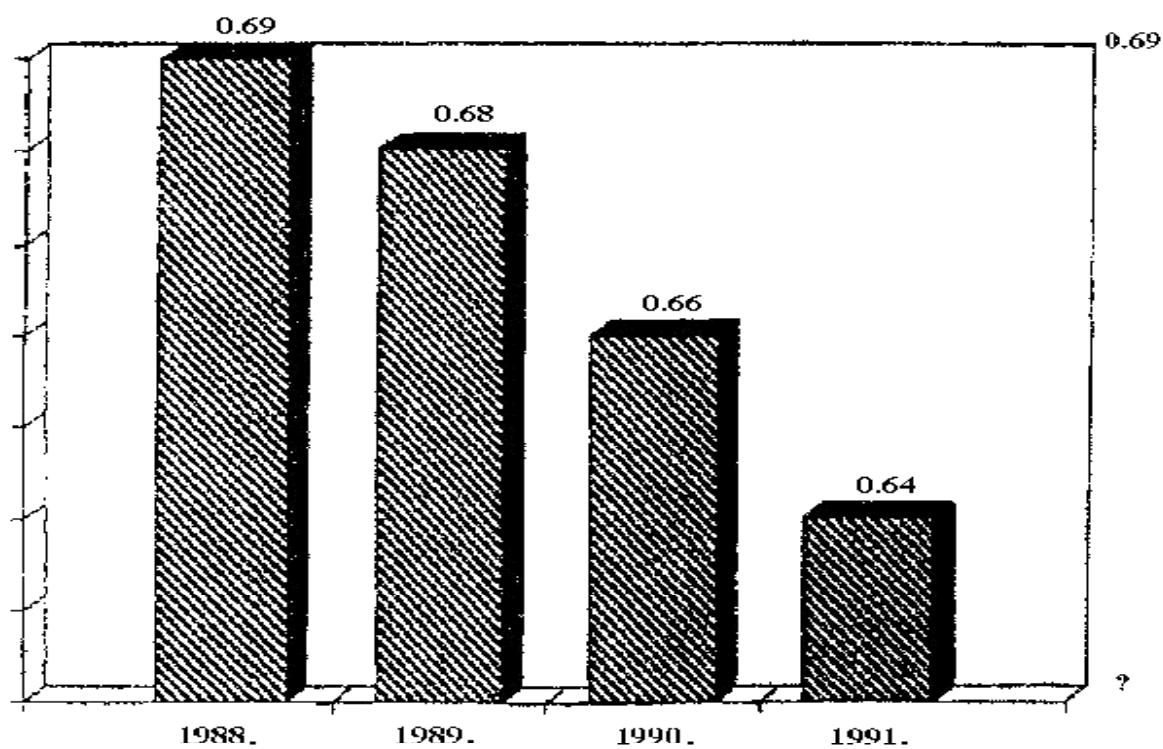
Nézzünk meg most egy újabb problémát!

A döntési feladat színes televízió választása, ahol a szóba jövő, előzetes szűrés után maradt típusok, azaz az alternatívák $A_1, A_2, \dots, A_5$. Az értékelési szempontok a következők:

- C1: színhűség;
- C2: teletext vételi lehetőség;
- C3: ár;
- C4: megbízhatósági mutatók;
- C5: alkatrészpótlási lehetőség;
- C6: esztétikai szempontok.

INTERVALLUM SKÁLA

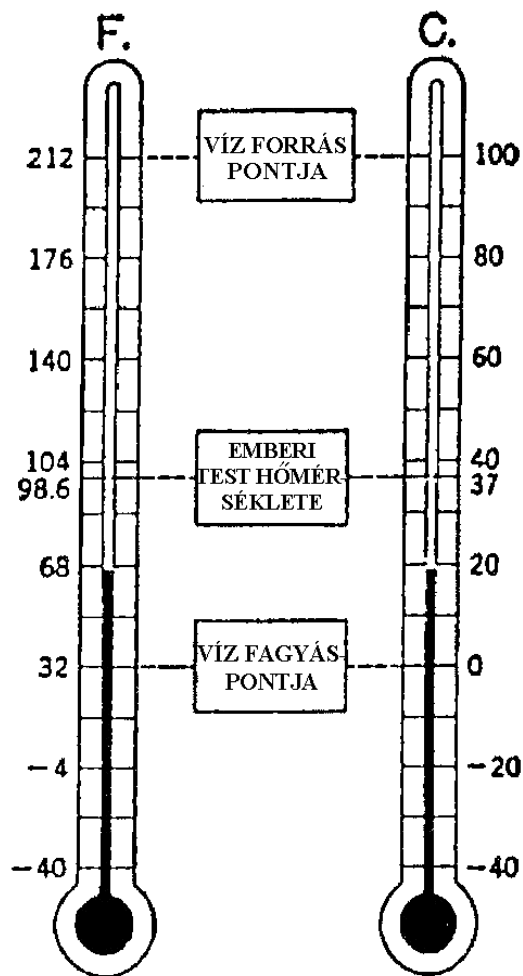
AZ USA-BAN ELADOTT USA GYÁRTMÁNYÚ AUTÓK,
SZÁZALÉKOS ARÁNYBAN



I.1.1. ábra

INTERVALLUM SKÁLA

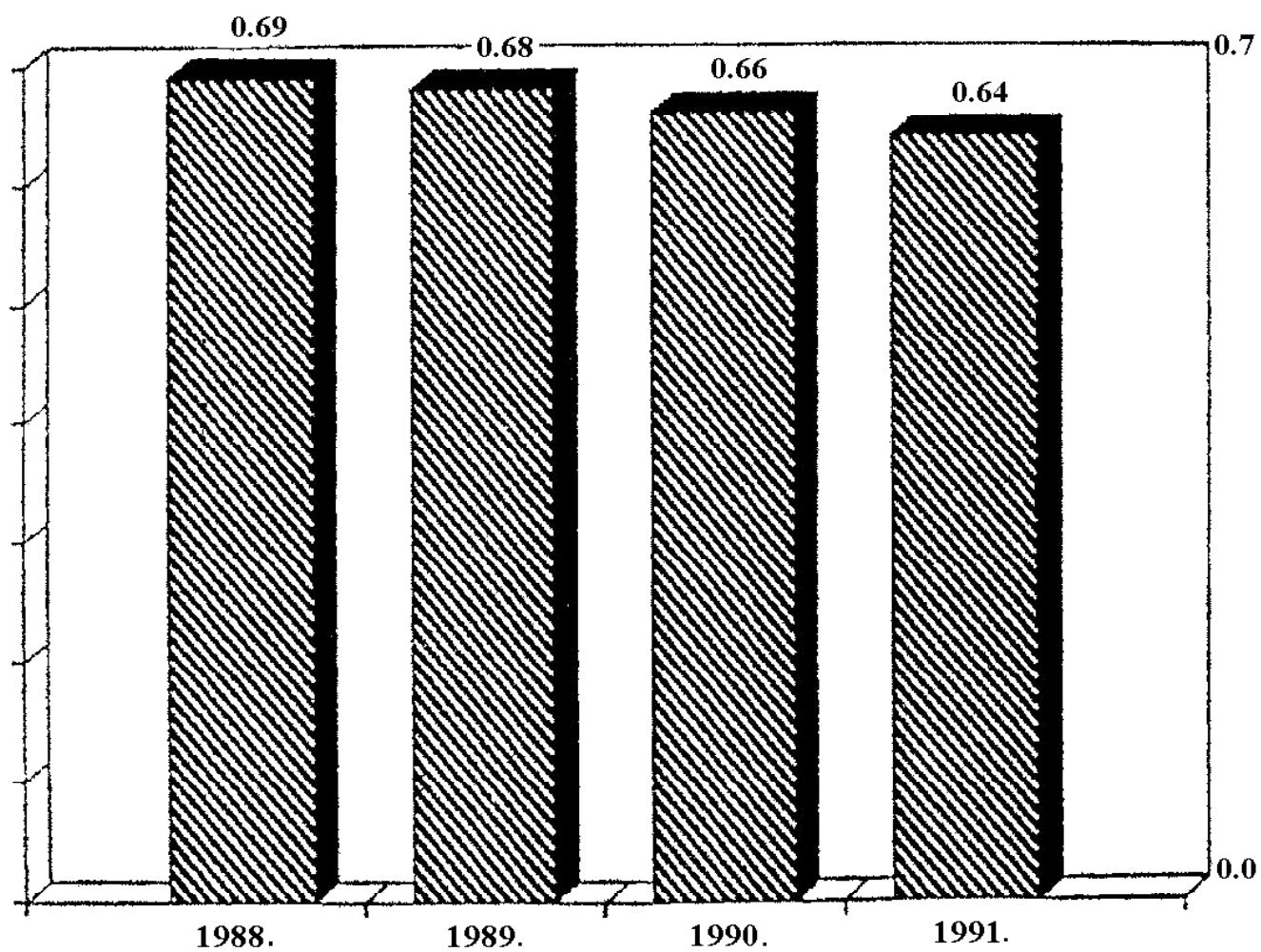
HŐMÉRSÉKLET FAHRENHEIT ÉS CELSIUS FOKBAN MEGADVA



I.1.2. ábra

ARÁNYOSSÁGI SKÁLA

AZ USA-BAN ELADOTT USA GYÁRTMÁNYÚ AUTÓK,
SZÁZALÉKOS ARÁNYBAN



I.1.3. ábra

A döntési feladat megoldása során fel kell használni a rendelkezésre álló adatokat, információkat és meg kell ismerni a döntéshozó preferenciáit, azaz ki kell tölteni a döntési táblázatot. Legyen a feladat kitöltött döntési táblázata a következő:

Színes televízió választása

	A₁	A₂	A₃	A₄	A₅
Színhűség	gyenge	jó	közepes	közepes	kiváló
Teletext	nem építhető be	nem építhető be	beépített	beépített	beépíthető
Ár	32.000 Ft	38.000 Ft	42.000 Ft	46.000 Ft	52.000 Ft
Megbízhatóság	közepes	közepes	gyenge	megbízható	megbízható
Alkatrészpótlás	biztosított	biztosított	biztosított	biztosított	nem biztosított
Esztétika	jó	közepes	közepes	jó	jó

I.1.2. Táblázat

Próbáljuk meg kiolvasni a megoldást a döntési táblázatból egyszerű döntési elvek alkalmazásával!

I.1.1. Polano módszer

A döntési táblázatban szereplő minden szempontnál határozzuk meg, hogy mely értékeléseket tartjuk jónak, közepesnek, illetve rossznak. Készítsünk egy újabb döntési táblázatot, amelynek a címsora és a címszlopa a I.1.2. Táblázathoz hasonlóan az alternatívákat és a szempontokat tartalmazza; azonban az értékelések helyén berácsozott négyzet áll, ha jónak minősítettük az alternatívát az adott szempont szerint; függőlegesen vonalkázott négyzet, ha közepesnek; és üres négyzet, ha rossznak. Az így kiértékelt táblázat a következő:

Segéd táblázat a színes televízió választáshoz

	A₁	A₂	A₃	A₄	A₅
Színhűség					
Teletext					
Ár					
Megbízhatóság					
Alkatrészpótlás					
Esztétika					

I.1.3. Táblázat

A segéd táblázat alapján az A_4 alternatíva tűnik optimálisnak.

A módszer előnyei:

1. az eljárás egyszerű, áttekinthető, könnyen kezelhető, ezért nem szükséges számítástechnikai háttér;
2. akármilyen skálázású adatok mellett könnyen alkalmazható;
3. a szempontok egymás közötti kapcsolatait nem kell figyelembe venni;
4. egyszerűsége és közérthetősége miatt a döntések indokolásánál jól hasznosítható;
5. a döntéselőkészítés torzító hatását csökkenti;
6. megtartja a többszempontúságot.

A módszer hátrányai:

1. nem mutatja meg a szempontonkénti értékelések összevetésének a módját, ezért a végső döntéshez nem ad túl nagy segítséget;
2. az eljárás közvetlenül nem alkalmas a legjobb alternatíva kiválasztására;
3. nem alkalmas az alternatívák sorrendjének a felállítására;
4. nem alkalmas az erőforrások szétosztására;
5. nem alkalmas annak feltárására, hogy a döntés mennyire érzékeny az egyes szempontok vagy értékelések megváltozására;
6. nem képes az egyes szempontok fontosságának (súlyának) figyelembevételére.

I.1.2. Szubjektív értékelések számszerűsítése

Láttuk a fagyaltbolt helyének meghatározásánál és a színes televízió választásakor is, hogy a döntési táblázatok tartalmazznak szubjektív értékeléseket, és ha a döntési feladatokat meg akarjuk oldani, akkor ezeket az értékeléseket számszerűsíteni kell.

Vezessük be a következő skálát:

- 1: nagyon gyenge; nem építhető be; nem biztosított;
- 3: gyenge;
- 5: közepes; átlagos; beépíthető;
- 7: jó;
- 9: kiváló; beépített; megbízható; biztosított.

Ezeket az értékeket a színes televízió választásakor felhasználva az alábbi döntési táblázatot kapjuk:

Színes televízió választása

	A₁	A₂	A₃	A₄	A₅
Színhűség	3	7	5	5	9
Teletext	1	1	9	9	5
Ár	32.000 Ft	38.000 Ft	42.000 Ft	46.000 Ft	52.000 Ft
Megbízhatóság	5	5	3	9	9
Alkatrészpótlás	9	9	9	9	1
Esztétika	7	5	5	7	7

I.1.4. Táblázat

A kapott döntési táblázatban már minden értékelést számokkal fejezünk ki, amik azonban nem tekinthetők homogénnek, ezért a döntési táblázatban szereplő értékeket transzformáljuk 0 és 1 közé. Az egyik lehetséges transzformáció a táblázat soraiban szereplő értékek felhasználásával történő normálás, ami azt jelenti, hogy áttérünk egy arányossági skálára, ahol a maximum érték 1, és ezt az értéket az adott szempont szerinti legjobb alternatíva kapja (esetleg alternatívák kapják), a többi pedig arányosan kisebb lesz, de 0-nál nem kisebb.

Képlettel megadva:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{\max_j a_{ij}}, & \text{ha az } i - \text{edik szempont szerint a nagyobb érték a jobb;} \\ \frac{\min_j a_{ij}}{a_{ij}}, & \text{ha az } i - \text{edik szempont szerint a kisebb érték a jobb, és } \min_j a_{ij} \neq 0; \\ \frac{1}{a_{ij} + 1}, & \text{ha az } i - \text{edik szempont szerint a kisebb érték a jobb, és } \min_j a_{ij} = 0; \end{cases}$$

bármely $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, indexpár esetén. Így az alábbi táblázatot kapjuk (ahol a $\rightarrow$ jel mutatja, hogy az adott szempont szerint a nagyobb érték a jobb; és a $\leftarrow$ jel, hogy az adott szempont szerint a kisebb érték a jobb).

Színes televízió választása

	A₁	A₂	A₃	A₄	A₅	
Színhűség	3/9	7/9	5/9	5/9	1	$\rightarrow$
Teletext	1/9	1/9	1	1	5/9	$\rightarrow$
Ár	1	16/19	16/21	16/23	16/26	$\leftarrow$
Megbízhatóság	5/9	5/9	3/9	1	1	$\rightarrow$
Alkatrészpótlás	1	1	1	1	1/9	$\rightarrow$
Esztétika	1	5/7	5/7	1	1	$\rightarrow$

I.1.5. Táblázat

I.1.3. Dominancia

Ha az alternatívák számszerű értékelése után van olyan alternatíva, aminek az értékelése minden szempont szerint alatta marad egy másiknak, esetleg egyes szempontok szerint az értékelések megegyeznek, akkor azt mondjuk, hogy a gyengébb értékelést kapott alternatíva dominált.

Amennyiben a szempontok függetlennek tekinthetők, akkor a döntéshozó nem ítéltető racionálisnak, ha egy dominált alternatívát választana legjobbnak, ezért ezeket az alternatívákat figyelmen kívül lehet hagyni a további vizsgálatok során. A nem dominált alternatívákat nevezzük efficiens vagy Pareto-optimális megoldásoknak. Mivel a Pareto-optimalitás vizsgálata nem vezet teljes rendezéshez az alternatívák között, ezért van szükség többszempontú döntési módszerek kidolgozására.

Legyen A_1 és A_2 két alternatíva, amiket a C_1 és C_2 szempontok szerint kell kiértékelni, és tegyük fel, hogy az értékeléseknél mind a két esetben a nagyobb értékek a jobbak. Tekintsünk öt különböző értékelést, amiket az alábbi táblázat tartalmaz.

	1. Példa		2. Példa		3. Példa		4. Példa		5. Példa	
	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
A_1	100	100	100	20	100	99	100	99	100	100
A_2	30	20	30	100	20	100	99	100	99	99

I.1.6. Táblázat

Az 1. Példában az A_1 alternatíva az egyedüli efficiens megoldás, ami egyben a javasolt döntést is jelenti. A 2. Példában az A_1 és az A_2 alternatíva is efficiens, egyik sem jobb mind a két szempont szerint a másikkal. További információk nélkül, csupán matematikai eszközök felhasználásával nem lehet a két alternatíva közül a jobbat kiválasztani. A 3. Példában az A_1 alternatíva jobbnak tűnik mint a második. A 4. és 5. Példa két egymáshoz közeli értékelést mutat.

I.1.4. MaxMin és MaxMax szabály

Ha a döntéshozó pesszimista, akkor mindegyik alternatíva esetén a legrosszabb értéket tekintheti a „gyenge láncszemnek”, és mivel a legjobb döntést szeretné meghozni, ezért az alternatívák leggyengébb értékei közül a legnagyobb értékkel rendelkező alternatívát részesíti előnyben.

Válasszuk ki ezért az I.1.5. Táblázat minden oszlopából a minimális értéket, majd ezek közül a maximálisakat! (Az oszlopokban levő minimális értékek vastagon vannak szedve). E szabály szerint azt kapjuk, hogy az A_4 alternatíva a legjobb.

Míg a pesszimista döntéshozó csak a legrosszabb értékekre figyel és azok alapján hozza meg döntését, addig az optimista döntéshozó csak a legjobb értékeket veszi figyelembe. Úgy tekinti, hogy az alternatívákat a legjobb értékek képviselik megfelelően, tehát azok közül kell a legjobbat választania.

Ha az I.1.5. Táblázat minden oszlopából kiválasztjuk a maximális elemet, majd ezek közül ismét a maximálisat, akkor nem szűrünk ki egyetlen alternatívát sem, azaz minden alternatívát kiválasztunk.

I.1.5. Szűrési módszerek

A most következő részben egy újabb, egyszerű és természetes módszert próbálunk ki a televízióválasztás-probléma megoldására. Itt úgy válogatunk az alternatívák között, hogy a kiválasztottaknak valamilyen minimumkövetelményeknek, illetve valamilyen feltételeknek kell eleget tenniük, vagy valamilyen szempontból kiváló tulajdonságokkal kell rendelkezniük. Ez a módszer - egyszerűsége miatt - akármilyen skálán értelmezett adatokat tud kezelni. Három különböző változatot mutatunk be, amelyekben az a közös, hogy az első lépés a döntési táblázat összeállítása. Nézzük meg, hogyan működnek ezek az eljárások a televízió választása esetében!

I. változat:

Ezt a szűrési eljárást lehet alkalmazni például egy fontos pozíció betöltésére kiírt pályázatonál, amikor nem engedhető meg, hogy bármely szempont szerint „megbukjon” a jelölt.

Ezért minden értékelési szemponthoz megadunk **szükséges feltételeket**, majd azokat az alternatívákat fogadjuk el, amelyek minden szempont esetén teljesítik ezeket. Így az alternatívákat két csoportra osztjuk, a „jó” és a „rossz” alternatívákra.

A szükséges feltételek:

C_1 :	színhűség:	legalább közepes legyen;
C_2 :	teletext:	beépíthető vagy beépített legyen;
C_3 :	ár:	legfeljebb 50.000 Ft legyen;
C_4 :	megbízhatóság:	legalább közepesen megbízható legyen;
C_5 :	alkatrészpótlás:	biztosított legyen;
C_6 :	esztétika:	legalább közepes legyen.

Ha végignézzük az alternatívákat, akkor az

A_1 alternatíva	a C_1 és C_2 szükséges feltételeket nem teljesíti;
A_2 alternatíva	a C_2 szükséges feltételt nem teljesíti;
A_3 alternatíva	a C_4 szükséges feltételt nem teljesíti;
A_4 alternatíva	minden feltételt teljesít;
A_5 alternatíva	a C_3 és C_5 szükséges feltételeket nem teljesíti.

Így a „jó” alternatívák csoportjába csak az A_4 tartozik, a másikba pedig az A_1 , A_2 , A_3 és az A_5 .

II. változat:

Vannak olyan döntési problémák, amelyek megoldása során nem azokat az alternatívákat tekintjük jónak, amik „megbízhatóak” minden szempont szerint, azaz minden szempont szerint jobb értékelést kapnak, mint egy adott küszöbérték, hanem meghatározóan fontos szempontok szerint az egyedi kiválóságot keressük. A valamilyen szempont szerint kiemelkedőket jutalmazó szűrés az alábbi módon végezhető el.

Kiválasztott értékelési szempontokhoz vagy minden értékelési szemponthoz megadunk **elegendő feltételeket**, majd azokat az alternatívákat fogadjuk el jónak, amelyek legalább egy szempont esetén teljesítik az elégséges feltételt. Így az alternatívákat két csoportba osztjuk, a „jó” és a „rossz” alternatívákra.

Az elégséges feltételek:

- | | | |
|---------|------------------|---|
| C_1 : | színhűség: | kiváló legyen; |
| C_2 : | teletext: | beépített legyen; |
| C_3 : | ár: | 30.000 Ft alatt legyen; |
| C_4 : | megbízhatóság: | megbízható legyen; |
| C_5 : | alkatrészpótlás: | - (ezt most nem tekintjük szűrési szempontnak); |
| C_6 : | esztétika: | kiváló legyen. |

Végignézve az alternatívákat azt kapjuk, hogy az

- | | |
|-------------------|---|
| A_1 alternatíva | egyetlen elégséges feltételt sem teljesít; |
| A_2 alternatíva | egyetlen elégséges feltételt sem teljesít; |
| A_3 alternatíva | a C_2 elégséges feltételt teljesíti; |
| A_4 alternatíva | a C_2 és C_4 elégséges feltételeket teljesíti; |
| A_5 alternatíva | a C_1, C_2 és C_4 elégséges feltételeket teljesíti. |

Így a „jó” alternatívák csoportjába A_3, A_4 és A_5 tartozik, a másikba pedig A_1 és A_2 .

III. változat:

Minden értékelési szemponthoz megadunk egy feltételt, majd összeszámoljuk, hogy az egyes alternatívák hány szempont esetén felelnek meg a feltételeknek. Így az alternatívákat legfeljebb $(m + 1)$ osztályba soroljuk, ahol m az értékelési szempontok száma.

A feltételek a következők:

- | | | |
|---------|------------------|---------------------------------------|
| C_1 : | színhűség: | legalább jó legyen; |
| C_2 : | teletext: | beépíthető vagy beépített legyen; |
| C_3 : | ár: | legfeljebb 40.000 Ft legyen; |
| C_4 : | megbízhatóság: | legalább közepesen megbízható legyen; |
| C_5 : | alkatrészpótlás: | biztosított legyen; |
| C_6 : | esztétika: | legalább jó legyen. |

Ezeknek a feltételeknek a teljesülését, illetve nem teljesülését mutatja a I.1.6. Táblázat. A $C_i, i = 1, \dots, m$, sorok és az $A_j, j = 1, \dots, n$, oszlopok metszéspontjában 1 áll, ha az A_j alternatíva teljesíti a C_i értékelési szempontnál adott feltételt, egyébként 0. Például az A_3 alternatíva értékelése a C_2 szempontnál beépített, tehát teljesíti a feltételt, ezért

a 2. sor 3. eleme 1. Az utolsó sorban az oszlopelemek összege áll, azaz az alternatíva U_j , $j = 1, \dots, n$, „jósági” mutatója. Az A_3 bizonyult a legkevésbé jónak, mert $U_3 = 2$, a többi esetben pedig $U_j = 4$, $j = 1, 2, 4, 5$.

Érdekesség, hogy az A_3 a II. változat szerint megelőzi A_1 -et és A_2 -t, a III. változat szerint pedig nem.

A szűrés III. változat táblázata

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
C_1	0	1	0	0	1
C_2	0	0	1	1	1
C_3	1	1	0	0	0
C_4	1	1	0	1	1
C_5	1	1	1	1	0
C_6	1	0	0	1	1
U	4	4	2	4	4

I.1.7. Táblázat

A módszer előnyei:

1. mindhárom változat egyszerű, gyorsan áttekinthető, könnyen kezelhető és számítógépes háttér nem szükséges;
2. tetszőleges skálán értelmezett adatokra alkalmazható;
3. az eljárásokkal nagyszámú alternatíva is kiértékelhető, ezért felhasználhatók olyan döntési módszerekben, amelyek csak kevés alternatíva esetén hatékonyak;
4. az eljárások gyorsak, és az I. és a II. változat esetén még tovább egyszerűsíthetők, mert nem kell minden alternatívát az összes szempont szerint értékelni. (Az I. változatban pl., ha találunk olyan értékelési szempontot, amelyet a vizsgált alternatíva nem teljesít, akkor azt az alternatívát a továbbiakban nem kell vizsgálni.)

A módszer hátrányai:

1. a szempontokat nem kezeli együtt, ezért nem veszi figyelembe, hogy az egyes szempontok szerinti hátrányokat más szempontok szerinti előnyök kiegyenlíthetik;
2. nem adja meg az alternatívák sorrendjét;
3. a rendelkezésre álló információk nagyobb részét nem használja fel, mert minden értékelési szempontnál csak az adott feltétel teljesülését vizsgálja, a teljesítés minőségét és mértékét nem;
4. a szubjektív feltételeknek túlságosan nagy jelentősége lehet.

I.1.6. A szempontok súlyozása

Mind a fagyaltbolt helyének a meghatározásakor, mind pedig a színes televízió kiválasztásakor látható, hogy a szempontok fontossága között nagy különbség lehet, pl. a helybérlési díj nagysága lényegesen fontosabbnak tűnik, mint az üzlet láthatósága, vagy a televíziós példában az ár sokkal fontosabb szempont, mint a teletext. Ezért a többszempontú döntési feladatok megoldásakor az egyik lényeges elem az **értékelési szempontok fontosság szerinti sorbarendezeése vagy fontosság szerinti súlyozása**. A szempontok súlyainak konzisztens meghatározása az egyik legnehezebb feladat. A súlyozás egyik előnye, hogy használata esetén nem csak a legjobb alternatíva határozható meg, hanem az alternatívák rangsora is. Kevésbé hatékony módszerek nyerhetők akkor, ha csak a szempontok fontossági sorrendjét adjuk meg.

I.1.7. Lexikografikus rendezés

A most következő részben egyszerű módszert mutatunk be, amiben szerepel a szempontok fontosság szerinti sorrendje is, és az alternatívákat sorba rendezi. Az itt tárgyaltak közül ez az egyetlen eljárás, aminél nem szükséges a döntési táblázat teljes kitöltése. A módszer bármilyen skálán értelmezett adatokat képes kezelni.

A lexikografikus rendezés során először meghatározzuk az összes értékelési szempontot, majd fontosság szerint sorba rendezzük őket, és a legfontosabbnak tartott szempont szerint sorba rendezzük az alternatívákat is. Ha a legfontosabbnak tartott szempont szerint két vagy több alternatíva ugyanazt az értékelést kapta, akkor a fontossági sorrendben következő értékelési szempont szerinti értékelést kell figyelembe venni. Ha ez sem dönt, akkor annak a szempontnak a figyelembevételéig kell folytatni az eljárást, ahol már a „holtverseny” eldőlt.

Színes televízió választása

A módszert ismét a színes televízió kiválasztásának példáján mutatjuk be. A legfontosabb szempont a színhűség, ezért ennek alapján kell sorba rendezni az alternatívákat. Azt kapjuk, hogy A_5 a legjobb, A_2 a második, A_3 és A_4 minősítése egyenlő, és A_1 az ötödik. Most a második legfontosabb értékelési szempont alapján kell dönteni az A_3 és A_4 sorrendjéről. Mivel a C_5 , C_4 , C_3 fontossági sorrendet fogadjuk el, és a C_5 szempont nem dönt, mert mindkét típus alkatrészpótlása biztosított, A_4 viszont C_4 szempontjából jobb A_3 -nál, ez megadja az alternatívák teljes sorrendjét:

$$A_5, A_2, A_4, A_3, A_1.$$

A módszerek különbözőségét mutatja, hogy ebben a sorrendben A_4 csak a harmadik helyet foglalja el.

A módszer előnyei:

1. az eljárás egyszerű, áttekinthető, könnyen kezelhető és számítógépes háttérrel nem igényel;

2. tetszőleges skálán értelmezett adatok esetén is alkalmazható;
3. az eljárás alkalmas nagyszámú alternatíva kiértékelésére;
4. nem kell a teljes döntési táblázatot meghatározni és a szempontokat súlyozni, csak a fontosságuk szerint sorba rendezni;
5. egyszerűsége ellenére is sorba rendezi az alternatívákat.

A módszer hátrányai:

1. a szempontokat külön kezeli és ezért nem veszi figyelembe, hogy a hátrányok más szempontoknál jelentkező előnyökkel kiegyenlíthetők;
2. az információk nagy részét nem használja fel;
3. a módszer nem alkalmas annak feltárására, hogy a döntés mennyire érzékeny az egyes szempontok vagy értékelések megváltoztatására.

I.1.8. A döntési modellezés lépései

Az eddigiek alapján megállapítható, hogy a többszemponútú döntési feladatok megoldásához az alábbi lépések szükségesek.

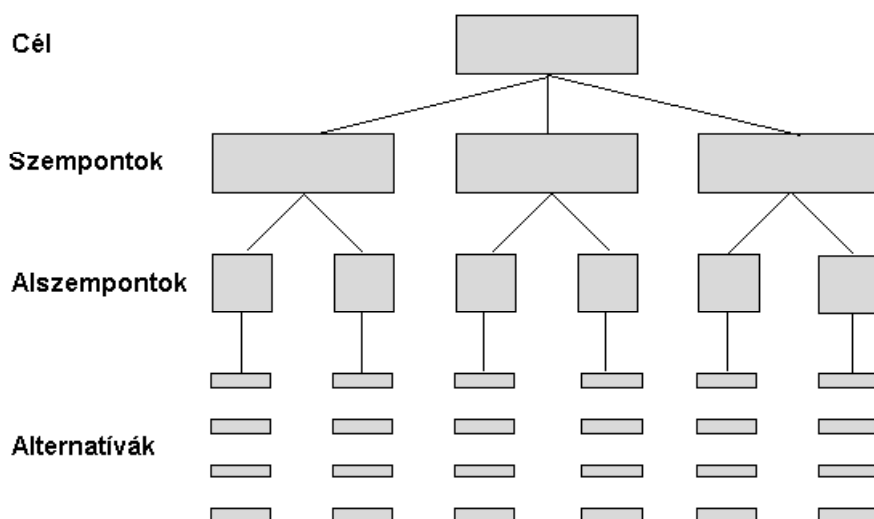
1. A döntési feladat felépítése:
 - a.) a cél megfogalmazása;
 - b.) az alternatívák kiválasztása;
 - c.) a szempontok meghatározása.
2. A döntési feladat megoldása:
 - a.) minden alternatíva kiértékelése minden szempont szerint;
 - b.) a szempontok súlyainak meghatározása;
 - c.) az értékelések és a súlyozás összegzése.

A többszemponútú döntési eljárások kiválasztására egyértelmű szabály nem adható meg (ez is egy többszemponútú döntési probléma), csak a konkrét döntési probléma ismeretében lehet a legmegfelelőbb eljárást meghatározni.

I.2. Analytic Hierarchy Process (AHP)

Az AHP többszemponútú döntési problémák megoldására alkalmas eljárás, ami lehetővé teszi a döntési feladatok logikus rendszerbe foglalását. Az előző részben láttuk, hogy a döntési feladatok megoldásának első lépése a döntési feladat felépítése, ami a cél megfogalmazásából, az alternatívák kiválasztásából és a szempontok meghatározásából áll.

Az AHP-ben a döntési probléma az áttekinthetőség érdekében egy többszintű fastruktúráként van ábrázolva, amelynek legfelső szintjén a cél, az alatta levő szinteken a szempontok, az alszempontok stb., a legalsó szinten pedig az alternatívák helyezkednek el. A legalacsonyabb szinten levő szempontokat levélszempontoknak nevezzük. Az AHP döntési modellek szerkezetét mutatja az I.2.1. ábra.



I.2.1. ábra

A legelterjedtebb, AHP módszertanra épülő döntéstámogató szoftver az Expert Choice (a továbbiakban EC). Az I.2.1. ábrából látható, hogy az EC modellekben a grafikus ábrázolásban az alternatívák nincsenek megkülönböztetve a szempontoktól. Az egyedüli különbség az, hogy az alternatívák helyezkednek el a szempontfa legalsó szintjén.

Az EC által kezelt fák legfeljebb 5 szint mélységűek, és egy szempontnak legfeljebb 9 alszempontja lehet, így - mivel az utolsó szinten az alternatívák vannak - elvileg $7380 = (9 + 9^2 + 9^3 + 9^4)$ szempont kezelhető; ezekből 6561 levélszempont.

Az AHP döntési modellekben a cél mindig az adott alternatívák rangsorának a meghatározása. Mivel az értékelési szempontok fastruktúrába vannak rendezve, ezért a szempontok közötti összefüggéseket is figyelembe lehet venni. Az alternatívák szempontok szerinti értékelése alapulhat

névleges,
rangsor,
intervallum
és arányossági (hányados)

skálán megadott értékeken.

A döntési feladat megoldása a különböző AHP modellekben a következő lépésekből áll:

1. a szempontok súlyainak a meghatározása;
2. az alternatívák kiértékelése a megadott szempontok szerint;
3. a súlyozás és az értékelések összegzése.

I.2.1. Páros összehasonlítás

Az AHP döntési problémák megoldásának az egyik alapeszköze a páros (páronkénti) összehasonlítás, amit a szempontok súlyozására és az alternatívák egyes szempontok szerinti értékelésére egyaránt alkalmaznak.

I.2.1.1. Páros összehasonlítás mátrixok

A páros összehasonlítás mátrix általános esetben a következő, ahol w_i , $i = 1, \dots, n$, tetszőleges, pozitív valós számok.

Páros összehasonlítás mátrix

	A_1	A_2	.	.	.	A_n
A_1	w_1/w_1	w_1/w_2	.	.	.	w_1/w_n
A_2	w_2/w_1	w_2/w_2	.	.	.	w_2/w_n
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
A_n	w_n/w_1	w_n/w_2	.	.	.	w_n/w_n

I.2.1. Táblázat

A páros összehasonlítás mátrixok jellemzője tehát, hogy a mátrixok elemei n darab pozitív valós szám közül választott két szám hányadosaként adódnak. Be lehet látni, hogy a páros összehasonlítás mátrixokra teljesül a következő összefüggés:

$$A\mathbf{w} = n\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in R^n, \quad (\text{I.2.1.1})$$

ahol A jelenti a páros összehasonlítás mátrixot, R^n az n -dimenziós Euklideszi tér, a $\mathbf{w}$ vektor elemeiből képezzük az A mátrix elemeit, és n az A sorainak a száma. Mivel minden páros összehasonlítás mátrix rangja 1, ezért az A mátrixnak csak egy nem nulla sajátértéke van, ami a fenti egyenlet miatt n .

A pozitív elemű mátrixok két érdekes új mátrixosztálya a

$$\text{reciprok mátrixok:} \quad (a_{ij}) = (1/a_{ji}), \quad a_{ij} > 0, \quad i, j = 1, \dots, n;$$

és a

$$\text{konzisztens mátrixok:} \quad (a_{ik}) = (a_{ij} \cdot a_{jk}), \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

A konzisztencia azt jelenti, hogy a páros összehasonlítások eredményei összhangban vannak minden indexpár esetén. A konzisztenciából következik, hogy bármely, az alábbi formában adott, 3 elemből álló ciklusra teljesül, hogy

$$a_{ij} a_{jk} a_{ki} = 1, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

I.2.1.1. Tétel. *Egy pozitív reciprok mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha $\lambda_{\max} = n$.*

I.2.1.2. Tétel. *Ha egy pozitív mátrix konzisztens, akkor bármely sora egy tetszőleges másik sorának pozitív konstansszorososa.*

Ennek a tételnek a fordítottja nem igaz. Tetszőleges 1 rangú mátrix nem feltétlenül konzisztens. Tekintsük például az alábbi mátrixot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

ahol $a_{12} \cdot a_{22} = 8 \neq 2 = a_{12}$.

Belátható, hogy ha az A mátrix pozitív és konzisztens, akkor

$$a_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{és} \quad a_{ij} = 1/a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

azaz A páros összehasonlítás mátrix.

I.2.1.3. Tétel. *Egy pozitív mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha a rangja 1 és a főátlóban álló elemek mindegyike 1.*

A páros összehasonlítás mátrixból az egyes alternatívák „fontosságát” úgy kapjuk, hogy meghatározzuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort.

Ha mért értékek vannak, akkor a páros összehasonlítás mátrix és a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor természetesen adódik. Ennek illusztrálására tegyük fel, hogy 5 ezüst tömbünk van, amiből

az első, $\mathbf{A}_1$ súlya $w_1 = 5$ kg,
 a második, $\mathbf{A}_2$ súlya $w_2 = 1$ kg,
 a harmadik, $\mathbf{A}_3$ súlya $w_3 = 10$ kg,
 a negyedik, $\mathbf{A}_4$ súlya $w_4 = 2$ kg és
 az ötödik, $\mathbf{A}_5$ súlya $w_5 = 15$ kg.

Az összsúly 33 kg, ami az egyes darabok között a következőképpen oszlik el:

$\mathbf{A}_1$: $5/33 = 0.15$;
 $\mathbf{A}_2$: $1/33 = 0.03$;
 $\mathbf{A}_3$: $10/33 = 0.30$;
 $\mathbf{A}_4$: $2/33 = 0.06$;
 $\mathbf{A}_5$: $15/33 = 0.46$.

A vizsgált példában a páros összehasonlítás mátrix a következő:

Ezüst tömbök páros összehasonlítás mátrixa

	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$
$\mathbf{A}_1$	1	5	$1/2$	$5/2$	$1/3$
$\mathbf{A}_2$	$1/5$	1	$1/10$	$1/2$	$1/15$
$\mathbf{A}_3$	2	10	1	5	$2/3$
$\mathbf{A}_4$	$2/5$	2	$1/5$	1	$2/15$
$\mathbf{A}_5$	3	15	$3/2$	$15/2$	1

I.2.2. Táblázat

Esetünkben a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor komponensei

$$(0.15, 0.03, 0.30, 0.06, 0.46),$$

amik pontosan a súlyarányokat adják. A konkrét súlyok esete (I.2.2. Táblázat) egy példa konzisztens mátrixra.

I.2.1.2. Sajátvektor módszer (EM)

Ebben a részben Saaty (1980) sajátvektor módszerét ismertetjük.

A döntéshozatal során a döntéshozó a döntési feladat szempont súlyainak meghatározására és az alternatívák minden egyes levélszempont szerinti kiértékelésére megadja a páros összehasonlítás mátrixokat. A páros összehasonlítás intervallum-skálája az AHP módszertanban a következő:

1. egyformán fontos / előnyös;
3. mérsékelten fontosabb / előnyösebb;
5. sokkal fontosabb / előnyösebb;
7. nagyon sokkal fontosabb / előnyösebb;
9. rendkívüli mértékben fontosabb / előnyösebb.

A páros összehasonlításnál felhasználhatjuk a 2, 4, 6, 8 közbenső értékeket is.

A döntési feladatok megoldása során keletkező tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok sok esetben nem konzisztensek, ezért erre a mátrix osztályra is ki kell terjeszteni a páros összehasonlítás módszert. A páros összehasonlítás mátrixok elemei pozitívak, így ez a mátrixosztály részosztálya a pozitív elemű mátrixoknak. Perron 1907-ben az alábbi alapvető állítást bizonyította.

Perron tétel. *Minden pozitív elemű mátrixnak van olyan egyszeres pozitív sajátértéke, amely nagyobb bármely másik sajátérték abszolút értékénél, a hozzátartozó sajátvektor elemei pozitív számok és egy konstanssal való szorzás erejéig egyértelműen meg vannak határozva.*

A páros összehasonlítás mátrixokból a szempontok fontosságát, illetve az alternatívák egyes levélszempontokra vonatkoztatott pontértékét úgy kapjuk, hogy meghatározzuk a páros összehasonlítás mátrixok legnagyobb sajátértékeihez tartozó sajátvektorokat, azokat 1-re normáljuk, és az így kapott sajátvektorok komponensei adják a prioritásokat (a w_i értékeket). Ez azt jelenti, hogy az

$$A\mathbf{w} = \lambda_{\max}\mathbf{w},$$
$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n,$$

feltételek mellett meghatározhatjuk a $\mathbf{w}$ vektort, ahol $\lambda_{\max}$ a tapasztalati páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértéke.

A módszer hasznossága azon alapul, hogy a gyakorlatban éppen a w_i értékek ismeretlenek, és a w_i/w_j hányadosokról rendelkezünk információval a páros összehasonlítások elvégzése után. A döntéshozó ugyanis azt mérlegeli, hogy bármely két szempont vagy alternatíva esetén az egyik hányszor fontosabb vagy kevésbé fontos, mint a másik, pl. A_i sokkal előnyösebb A_j -nél, tehát a skála szerint $w_i/w_j = 5$.

A döntési feladatok megoldásakor keletkező tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok sok esetben nem konzisztensek, ezért az inkonzisztenciájuk mérésére bevezetjük a következetlenségi hányadost, valamint a CI következetlenségi indexet, ami az AHP módszertanban az alábbi formula alapján számítható:

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

ahol $\lambda_{\max}$ a tapasztalati páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértéke és n a páros összehasonlítás mátrix sorainak a száma. A következetlenségi indexek átlagos értékeit véletlenszerűen generált páros összehasonlítás mátrixok segítségével határozzuk meg minden n esetre, és ezeket RI -vel jelöljük. A következetlenségi hányadost, amit CR jelöl, a két index hányadosaként kapjuk meg, azaz

$$CR = \frac{CI}{RI}.$$

Bizonyítható, hogy pozitív reciproknak mátrixokra $\lambda_{\max} \geq n$, ezért a következetlenségi hányados értéke nemnegatív szám. A következetlenségi hányados értékeit az EC szoftver készítői akkor tartják jónak, ha az értéke kisebb, mint 0.1.

Az $a_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$, feltételeket teljesítő páros összehasonlítás mátrixok esetén ismert az az állítás, hogy

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n,$$

ahol a λ_i , $i = 1, \dots, n$, értékek jelentik az A mátrix sajátértékeit ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$). Ez alapján a következetlenségi index az alábbi formába írható:

$$\frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i - n}{n - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i}{n - 1}.$$

A bal oldali számláló a páros összehasonlítás mátrix legnagyobb sajátértékének és a hozzá legközelebb álló konzisztens mátrix legnagyobb sajátértékének a különbsége, a jobboldali formula pedig mutatja a nevezőben levő $n - 1$ érték átlagoló szerepét.

A páronkénti összehasonlításra alapuló módszerekben hátrányt jelent, hogy csak bizonyos, az összehasonlítandó objektumok számára vonatkozó méretkorlát alatt alkalmazhatók, és az alternatívákra csak rangsort (relatív értékeket) adnak; előny viszont, hogy szubjektív szempontok értékelésénél jól használhatóak.

Néhány hasznos állítás Saaty (1990) könyvéből:

I.2.1.4. Tétel. *Pozitív mátrixok esetében*

a.) a maximális sajátérték $\lambda_{\max}$ felső korlátja a maximum sor összeg;

b.) a maximális sajátérték $\lambda_{\max}$ alsó korlátja a minimum sor összeg.

I.2.1.5. Tétel. *(Wielandt) Pozitív mátrixok esetében a $\lambda_{\max}$ értéke nő, ha a mátrix bármely komponensének az értéke nő.*

I.2.2. Távolságminimalizáló módszerek

A sajátvektor módszer mellett más módszercsaládok is kialakultak a páros összehasonlítás mátrixok által meghatározott prioritási értékek meghatározására. A determinisztikus módszereknél az a hallgatólágos feltételezés, hogy a páros összehasonlítás mátrixokból meghatározhatók a döntéshozók prioritási értékei, csak az inkonzisztencia szintje kérdéses. A sajátvektor módszer is determinisztikus.

A távolságminimalizáló módszerek közé tartoznak a legkisebb négyzetek módszere (LSM) és a súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLSM), amiket Chu és szerzőtársai vezettek be 1979-ben, a logaritmusos legkisebb négyzetek módszere, amit De Jong (1984), valamint Crawford és Williams (1985) javasoltak és Jensen χ -négyzetek módszere (1984). A módszerek legfontosabb jellemzői a I.2.3. Táblázatban találhatók. A páros összehasonlítás mátrixokban kifejezett döntéshozói prioritások meghatározására a numerikusan stabil, úgynevezett szinguláris érték dekompozíciót és egy új következtelési hányados bevezetését javasolta Gass és Rapcsák (1996, 2004), ahol tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok konzisztens mátrixoktól vett távolsága is definiált.

Konzisztens mátrixok esetén minden módszer ugyanazt a megoldást szolgáltatja. Elméleti szempontból a legkisebb négyzetek módszere által szolgáltatott megoldás tűnik a legjobbnak, azonban a megoldandó nemlineáris optimalizálási probléma nehezen kezelhető, több megoldása is lehetséges, ezért a numerikus megoldása nehéz feladat. A 3×3 -as mátrixok esetében Bozóki (2003) adott algoritmust az összes minimumhely meghatározására. A legkisebb négyzetek módszere hátrányainak kiküszöbölésére születettek a további módszerek. Összehasonlító vizsgálatok eredményei találhatók a szakirodalomban, azonban az eredmények több esetben ellentmondóak (lásd pl. Gass és Rapcsák, 2004).

Módszer	Minimalizálandó függvény	Feltételek
LSM	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n.$
WLSM	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} w_j - w_i)^2$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n.$
LLSM	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\log a_{ij} - \log w_i + \log w_j)^2$	$\prod_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n.$
CSM	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \left(\frac{w_j}{w_i} \right)$	$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n.$
SVD	$A_{[1]} = \alpha_1 \mathbf{u} \mathbf{v}^T$ a legjobb 1-rangú közelítése az A mátrixnak Frobenius normában; $w_i^{SVD} = \frac{u_i + 1/v_i}{\sum_{j=1}^n (u_j + 1/v_j)},$ $i = 1, 2, \dots, n$	$\sum_{j=1}^n w_i = 1, \quad \mathbf{w} \in R_+^n.$

I.2.3. Táblázat

I.2.3. Disztributív AHP modell

Szemponatok súlyainak meghatározása

A döntési feladatok megoldásának első lépése a szempontok súlyainak meghatározása. Az AHP modellekben a szempontok súlyait vagy közvetlenül adjuk meg, vagy a sajátvektor módszerrel határozzuk meg. Ez utóbbi esetben felépítjük az azonos szinteken lévő szempontok egymáshoz viszonyított fontosságát tartalmazó páros összehasonlítás mátrixokat, és ezek legnagyobb sajátértékeihez tartozó sajátvektorai szolgáltatják az azonos szinteken levő szempontok súlyait, amelyek összege minden szinten 1.

Az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint

Az alternatívákat csak a levélszemponatok szerint kell értékelni, a többi szempontnál a levélszemponatokra adott pontszámokból és a súlyokból számítható ki a pontérték.

Az alternatívákat minden levélszemponton a sajátvektor módszerrel értékeljük (az adott szempont szerint az egyik alternatíva „hányszor olyan jó”, mint a másik). Az alternatívák pontszámainak összege ebben az esetben is egyenlő 1-gyel a levélszempontokon, így a pontszámok csak azt jelzik, hogy az adott szempont szerint melyik alternatívát mennyire tartjuk fontosnak.

Az értékelések és a súlyozás összegzése döntési tábla esetén

Nézzük meg, hogy a disztributív modellben az egyes szinteken hogyan történik az alternatívák értékelése döntési tábla esetén! Tekintsünk n alternatívát és m szempontot. Jelölje $A_1, A_2, \dots, A_n$, az alternatívákat és $C_1, C_2, \dots, C_m$, a szempontokat. Tételezzük fel, hogy az alternatívák értékelése az egyes szempontok szerint ismert, és a szempontok fontosságuk szerint súlyozva vannak. Jelölje $a_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, a j -edik alternatíva i -edik szempont szerinti értékét, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, az i -edik szempont súlyát, x_j , $j = 1, \dots, n$, pedig a keresett végső rangsort adó értékeket. Ezeket az adatokat táblázatos formában a következőképpen írhatjuk fel:

		x_1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	x_n
		$\mathbf{A}_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\mathbf{A}_n$
w_1	$\mathbf{C}_1$	a_{11}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	a_{1n}
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
w_m	$\mathbf{C}_m$	a_{m1}	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	a_{mn}

I.2.4. Táblázat

A döntési probléma az alternatívák sorbarendezeése, azaz olyan $\mathbf{x} \in R^n$ vektor meghatározása a szempontok szerinti értékelések és a hozzájuk tartozó súlyok figyelembevételével, ami „jól illeszkedik” a I.2.4. Táblázat soraihoz.

Disztributív módban végezve a kiértékelést azt kapjuk, hogy

$$x_j^D = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{ik}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{w_i}{w} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_{ik}} \right) a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.2.3.1})$$

ahol $w = \sum_{i=1}^m w_i$. A képletből látható, hogy ez additív modell, amelyben a

(szempont súlya $\times$ alternatíva pontszáma) /
(az adott szempont szerinti értékelések összege)

alakú kifejezéseket összegezzük. Ennek a modelltípusnak az elnevezése is ebből a tulajdonságból származtatható, hiszen lényegében az 1 értéket osztottuk szét a levélszempontok és az alternatívák között a fontosságuknak megfelelően. Megjegyezzük, hogy a disztributív AHP modell az alternatívák rangsorának a megállapítására, erőforrás szétosztásra és a legtöbb szempont szerint névleges értékkel bíró alternatívák közül való választáskor javasolt. Az új fagylaltbolt optimális helyének kiválasztása példa megoldása látható disztributív módban az I.2.2. ábrán.

I.2.4. Ideális AHP modell

Az ideális kiértékelési módot alkalmazva, döntési táblák esetén hasonlóan járunk el, mint a disztributív AHP modell esetén, csak

$$\frac{\text{a (szempont súly} \times \text{alternatíva pontszáma)}}{\text{(az adott szempont szerinti maximális pontszámú alternatíva pontszáma)}}$$

alakú kifejezéseket összegezzük, amiből következik, hogy minden szempont esetén az ott maximális értéket kapott alternatíva vagy alternatívák megkapják a szempont teljes súlyát.

Ennek képlete:

$$x_j^I = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} \frac{a_{ij}}{\max_k a_{ik}} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{w_i}{w} \frac{1}{\max_k a_{ik}} \right) a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.2.4.1})$$

Ez a módszer leginkább akkor hasznos, ha a cél a legjobb alternatíva kiválasztása, és a sejtetően legjobb alternatívák pontszáma több szempont szerint közel azonos. A tapasztalatok szerint a disztributív és az ideális AHP modellek az esetek nagy százalékában ugyanazt a rangsort adják az alternatívákra.

Az EC programban a disztributív és az ideális modell esetén legfeljebb 9 alternatíva kezelhető. Az új fagyaltbolt optimális helyének kiválasztása példa megoldása látható ideális módban a I.2.3. ábrán.

I.2.5. Minősítő AHP modell

A minősítő AHP modellek esetében a szempontok súlyozása ugyanúgy történik, mint a disztributív és az ideális AHP modelleknél. A lényeges különbség az alternatívák egyes szempontok szerinti értékelésében van, ugyanis a minősítő modell esetében minden alternatívát külön-külön minősítünk a szempontokhoz megadott minősítéslisták alapján. Ennek a modellnek hátránya, hogy az egyes szempontok szerinti értékeléskor nem adhatunk meg tetszőleges értéket, hanem egy, legfeljebb 9 elemű, listáról kell választani.

A minősítő AHP modellben az aggregálásra használt képlet a következő:

$$x_j^R = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} \frac{1}{a_i^*} a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.2.5.1})$$

ahol a_i^* az i -edik szempont szerint adható pontszámok közül a maximális. A képlet hasonló az ideális modellben alkalmazotthoz, de az a_i^* , $i = 1, \dots, m$, értékek a feladattól (a konkrét alternatíváktól) függetlenek, és az értékeléskor előre megadott skálához tartoznak.

Az EC szoftverben a minősítő AHP modell esetén a levélszempontok alá egy-egy minősítéslista elemeit (pl. jó, közepes, rossz) kell beszúrunk, majd az egyes listaelemek értékeit kell meghatároznunk a közvetlen pontozáshoz hasonló módon, konkrét számok megadásával vagy páronkénti összehasonlítással. Ezután a program automatikusan 1-re normál, és a táblázatban értékelhetjük az egyes alternatívákat a levélszempontok alapján, a megfelelő listáról kiválasztva a jónak gondolt minősítést.

Új fagyaltbolt optimális helyének kiválasztása

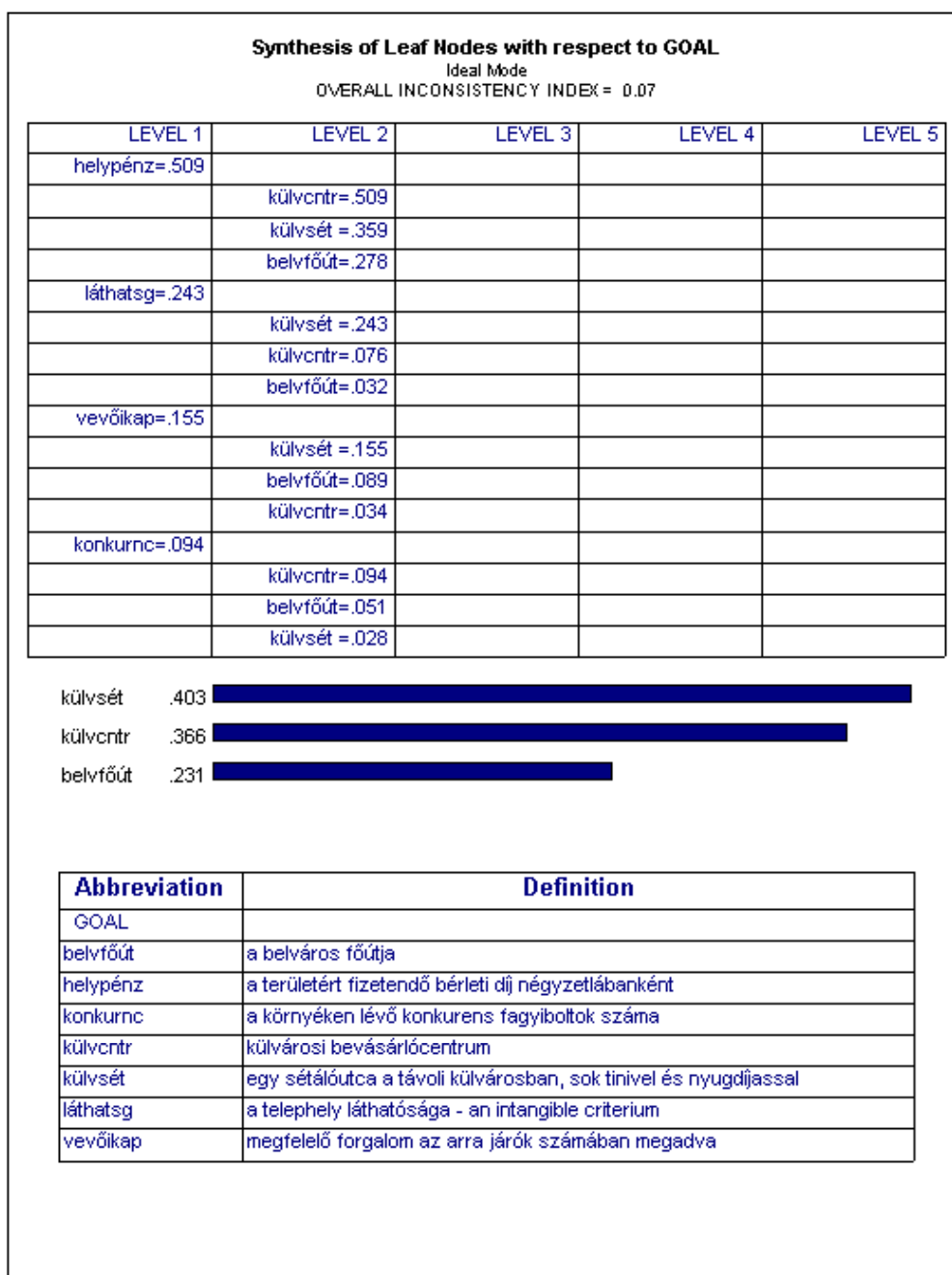
Synthesis of Leaf Nodes with respect to GOAL Distributive Mode OVERALL INCONSISTENCY INDEX = 0.07				
LEVEL 1	LEVEL 2	LEVEL 3	LEVEL 4	LEVEL 5
helypénz=.509				
	külvcntr=.226			
	külvsét=.160			
	belvfőút=.123			
láthatsg=.243				
	külvsét=.168			
	külvcntr=.053			
	belvfőút=.022			
vevőikap=.155				
	külvsét=.087			
	belvfőút=.050			
	külvcntr=.019			
konkurnc=.094				
	külvcntr=.051			
	belvfőút=.028			
	külvsét=.015			

külvsét	.429	
külvcntr	.348	
belvfőút	.223	

Abbreviation	Definition
GOAL	
belvfőút	a belváros főútja
helypénz	a területért fizetendő bérleti díj négyzetlábanként
konkurnc	a környéken lévő konkurens fagyiboltok száma
külvcntr	külvárosi bevásárlócentrum
külvsét	egy sétálóutca a távoli külvárosban, sok tinivel és nyugdíjassal
láthatsg	a telephely láthatósága - an intangible criterium
vevőikap	megfelelő forgalom az arra járók számában megadva

I.2.2. ábra Az EC eredmény „Distributive” módban

Új fagyaltbolt optimális helyének kiválasztása



I.2.3. ábra Az EC eredmény „Ideal” módban

I.2.6. Rangsorfordulás

A disztributív és az ideális AHP modellekben megváltozhat a korábban bevitt alternatívák rangsora, ha egy vagy több új alternatívával bővül a döntési feladat, vagy ha egy vagy több alternatívát hagyunk el a döntési feladatból. Ez az összegző képletekből azonnal leolvasható. Az ideális modellben ez nem fordul elő, ha az újonnan figyelembe vett alternatíva egyik szempont szerint sem jobb a többinél.

A minősítő modellben a rangsorfordulás jelensége nem lép fel, ha az a_i^* , $i = 1, \dots, m$, értékek nem változnak, mivel ezek az értékek függetlenek az alternatíváktól.

Példa a rangsorfordulásra

Értékeljük ki a

		A₁	A₂
$\frac{1}{2}$	C₁	1	2
$\frac{1}{2}$	C₂	3	2

döntési táblát az ideális modell alapján! Eredményként azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{10}{12},$$

tehát A_2 jobb választás, mint A_1 .

Tekintsünk egy újabb alternatívát és az alábbi döntési táblázatot!

		A₁	A₂	A₃
$\frac{1}{2}$	C₁	1	2	4
$\frac{1}{2}$	C₂	3	2	1

Ebben az esetben a döntési táblázatot az ideális modell alapján kiértékelve azt kapjuk, hogy

$$x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8} = \frac{15}{24},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{14}{24},$$

tehát A_1 jobb választás, mint A_2 . Látható, hogy egy újabb alternatíva hozzávételével a döntési feladatban a rangsorfordulás jelensége lépett fel.

Ekárt és Németh (2001) disztributív és ideális AHP modellek alternatíva sorrendjének stabilitását vizsgálták új alternatíva hozzáadása esetén és kidolgoztak egy új módszert annak a maximális téglatestnek a meghatározására, melyben az új alternatíva értékelési vektora mozoghat anélkül, hogy az eredeti alternatívák sorrendje megváltozna.

I.2.7. Példa hibás összegzésre

A példa szerint, ami „Fleming, P. J. and Wallace, I.I., How not to lie with statistics: the correct way to summarize benchmark results” című cikkéből való, ha számtani közepet használunk normalizált számok összegzésére, akkor rangsor képzésnél értelmetlen eredményre juthatunk.

Tekintsünk három gépet, X, Y, Z és két futási eredményt, amik az alábbi táblázatban vannak megadva.

Futási eredmények	Számítógépek		
	X	Y	Z
1	20 (1.0)	10 (0.5)	40 (2.0)
2	40 (1.0)	80 (2.0)	20 (0.5)
Számtani közép	1	1.25	1.25

I.2.5. Táblázat

Ebben a példában a futási eredményeket az X gép teljesítményéhez viszonyítottuk. Nézzük meg, mit történik, ha az eredményeket az Y gép teljesítményéhez viszonyítjuk.

Futási eredmények	X	Y	Z
1	20 (2.0)	10 (1.0)	40 (4.0)
2	40 (0.5)	80 (1.0)	20 (0.25)
Számtani közép	1.25	1.0	2.13

I.2.6. Táblázat

A két táblázatban az eredmények egymásnak ellentmondóak, így valóban megállapítható, hogy normalizált számok összegéből képzett rangsor értelmetlen lehet.

Nézzük meg, milyen eredményt kapunk, ha a geometriai közepet használjuk.

Futási eredmények	X	Y	Z
1	20 (1.0)	10 (0.5)	40 (2.0)
2	40 (1.0)	80 (2.0)	20 (0.5)
Mértani közép	1.0	1.0	1.0

I.2.7. Táblázat

Futási eredmények	X	Y	Z
1	20 (2.0)	10 (1.0)	40 (4.0)
2	40 (0.5)	80 (1.0)	20 (0.25)
Mértani közép	1.0	1.0	1.0

I.2.8. Táblázat

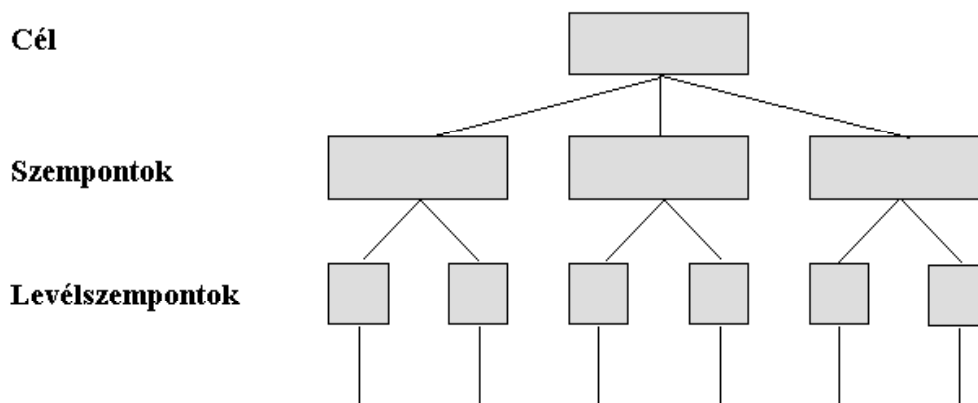
A I.2.7. és I.2.8. Táblázatok mutatják, hogy geometriai közepet használva, normalizált számok összegzésére helyes eredményt kapunk.

Ez a példa mutatja, hogy additív döntési modell választásakor mindig ellenőrizni kell a számtani közép használhatóságát.

I.2.8. A súlyozás és az értékelések összegzése fa struktúra esetén

Az AHP modellekben a szempontok fa struktúrába rendezettek. A szempontok súlyozása úgy történik, hogy a döntéshozó először a cél alatti első szinten levő szempontokat súlyozza a páros összehasonlítás módszerével, majd felülről lefelé haladva minden szinten az ott található szempontok alatti alszempontokat addig, amíg a tovább már nem osztott szempontok, a levélszempontok is súlyozásra kerülnek. Elképzelhető, hogy a levélszempontok nincsenek azonos szinten, sőt bármely szinten lehetnek levélszempontok. Az AHP modellekben a döntéshozó csak a levélszempontok szerint értékeli az alternatívákat.

A súlyozás és az értékelés összegzése úgy történik, hogy először a levélszempontok feletti szintről induló, minden egyszerű részfa esetén megalkotjuk a döntési táblát és kiértékeljük az alternatívákat a választott modell típus szerint. Ezt az eljárást folytatjuk addig, amíg a cél szintig elérünk és megkapjuk az alternatívák végső rangsorát.



I.2.9. Érzékenységvizsgálat

A döntéselőkészítés és döntéstámogatás egyik fontos feladata a döntésért felelős személy(ek) meggyőzése arról, hogy a döntési probléma megoldása jó alapot szolgáltat a döntéshozatalhoz. Ennek fontos eszközei az érzékenységvizsgálat és az eredmények vizualizálása.

Az EC háromféle érzékenységvizsgálatra ad lehetőséget, amikkel vizsgálhatók egy adott alternatíva sorrendnek a szempont súlyoktól való függése. Mindíg csak egy szempont súlya változtatható, ami maga után vonja a többi szempont súly értékének a változását is úgy, hogy az egymás közötti súlyarányok ne változzanak és a súlyok összege 1 legyen. Ezek az érzékenységvizsgálati modulok egyben a szempontok és az alternatívák egy-egy újabb megjelenítési módját is szolgáltatják. Megjegyezzük, hogy az érzékenységvizsgálati képernyőket nem lehet elmenteni, csak kinyomtatni. További új információkat

szolgáltatnak a döntési feladatról a „**2D Plot**” módban és a „**Difference**” módban végzett vizsgálatok.

A „**Performance**” módban végzett érzékenységvizsgálatok során a szempont súlyok a baloldali függőleges tengely segítségével, az egyes szempontok szerint az alternatívákra adott pontszámok és az összegzett alternatíva pontszámok pedig a jobboldali függőleges tengely segítségével olvashatók le. A képernyő jobb szélén látható az aktuális alternatíva sorrend.

A „**Dynamic**” módban a szempontokat képviselő sordiagramok megváltoztatásával válik lehetővé a szempont súlyok megváltoztatása, s ezen keresztül az alternatíva sorrend egyes szempont súlyoktól való érzékenységének bemutatása. A „**Dynamic Components**” módban látható az egyes szempontoknak az alternatívák pontszámainak kialakításában betöltött szerepe is.

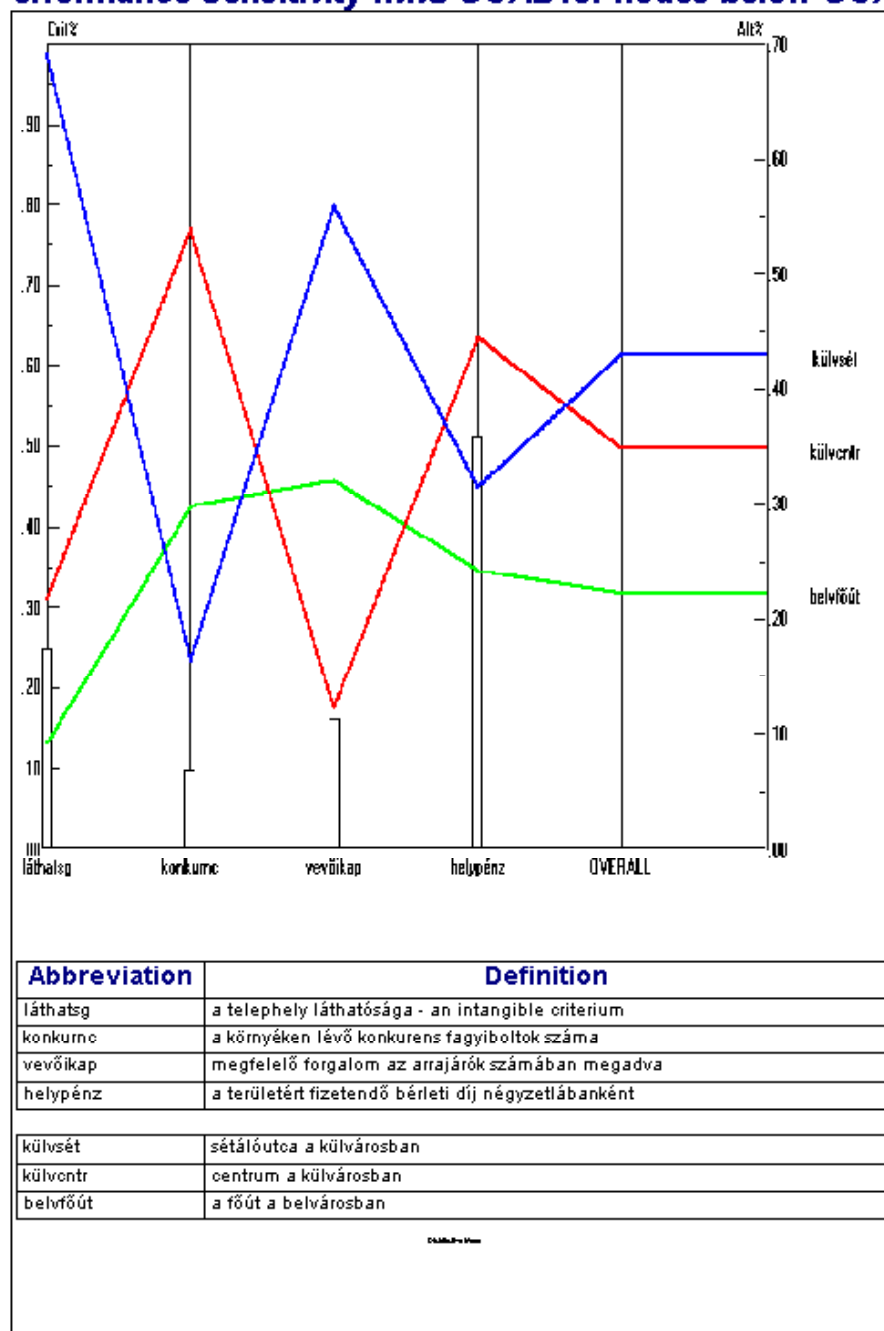
A „**Gradient**” módban minden szemponthoz tartozik önálló képernyőkép. A szempont súlya a vízszintes koordináta tengely és a függőleges tengely metszéspontjaként adódik, az alternatívák pontértékei pedig a függőleges tengely és az egyes alternatívákhoz tartozó egyenesek metszéspontjaként. A szempont súlyt megadó függőleges tengely változtatásával nyomon követhető az alternatíva pontszámok változása, valamint az egyes alternatíva párok metszéspontjai, melyeknél az alternatívák sorrendje megváltozik.

A „**2D Plot**” mód bemutatja, hogy az alternatívák mennyire felelnek meg két, tetszőlegesen kiválasztott szempontnak. E módban az alternatívák súlyozott pontértékei az adott, két szempontra vonatkozóan az őket képviselő pontok koordinátáiként jelennek meg, és a megfelelő tengelyeken olvashatók le. Értelemszerűen, a jobb felső negyedbe eső pontok a „jobb”, a bal alsó negyedbe eső pontok a „rosszabb” alternatívákat jelentik a két szempontot illetően, a másik két negyedbe eső pontok pedig azt jelzik, hogy a szempontok ellentmondóak. Az alternatíva pontok vetületei az adott egyenesen mutatják, hogy mi lenne az alternatívák sorrendje, ha a szempontok súlya egyenlő lenne.

A „**Difference**” mód egy kitüntetett alternatívának a többi alternatívával, az összes szempont szerinti összehasonlítását szolgálja. Súlyozatlan esetben a képernyőn az alternatíva pontszámok különbségei jelennek meg szempontonként, míg súlyozott esetben ugyanezen különbségek a szempontok súlyai által arányosítva.

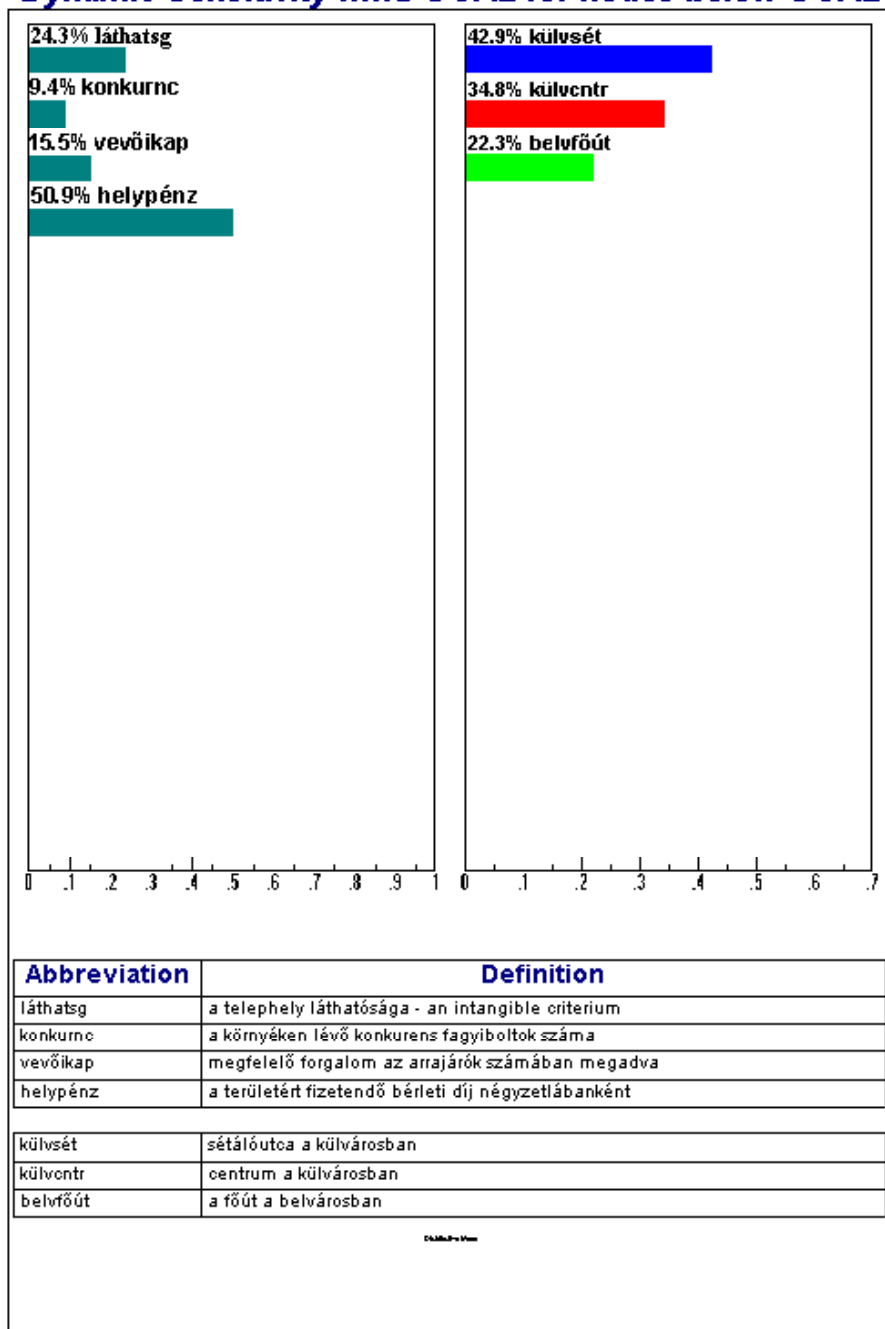
Összefoglalásként megállapítható, hogy az érzékenységvizsgálati eljárások segítségével az alternatívák adott szempontok alszempontjaira vonatkozó érzékenységet elemezhetjük. Bármely módban, egy szempont súly megváltoztatása a többi szempont súly egymás közötti arányának változatlanul hagyásával történik úgy, hogy a súlyok összege ismét 1 legyen. A „**Performance**” és „**Dynamic**” módban végzett érzékenységvizsgálatok azt mutatják, hogy egy szempontsúly megváltoztatása hogyan hat az alternatívák végső rangsorára. A „**Dynamic**” módban, ezen kívül, az egyes szempontoknak az egyes alternatívák végső pontszámainak kialakulásában betöltött szerepét is vizsgálhatjuk. A „**Gradient**” módban egy - egy szempontnak az összes alternatíva pontszámra gyakorolt hatása látható. A „**2D Plot**” mód pedig azt mutatja, hogy az alternatívák mennyire felelnek meg két, tetszőlegesen kiválasztott szempontnak, de az alternatíva pontszámok helyének a változását nem tudjuk vizsgálni. A „**Difference**” mód két alternatíva pontszámainak összevetését teszi lehetővé. Az eljárások jellemző képernyő képei az I.2.4., I.2.5., I.2.6., I.2.7., I.2.8. és I.2.9. ábrán láthatók.

Performance Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



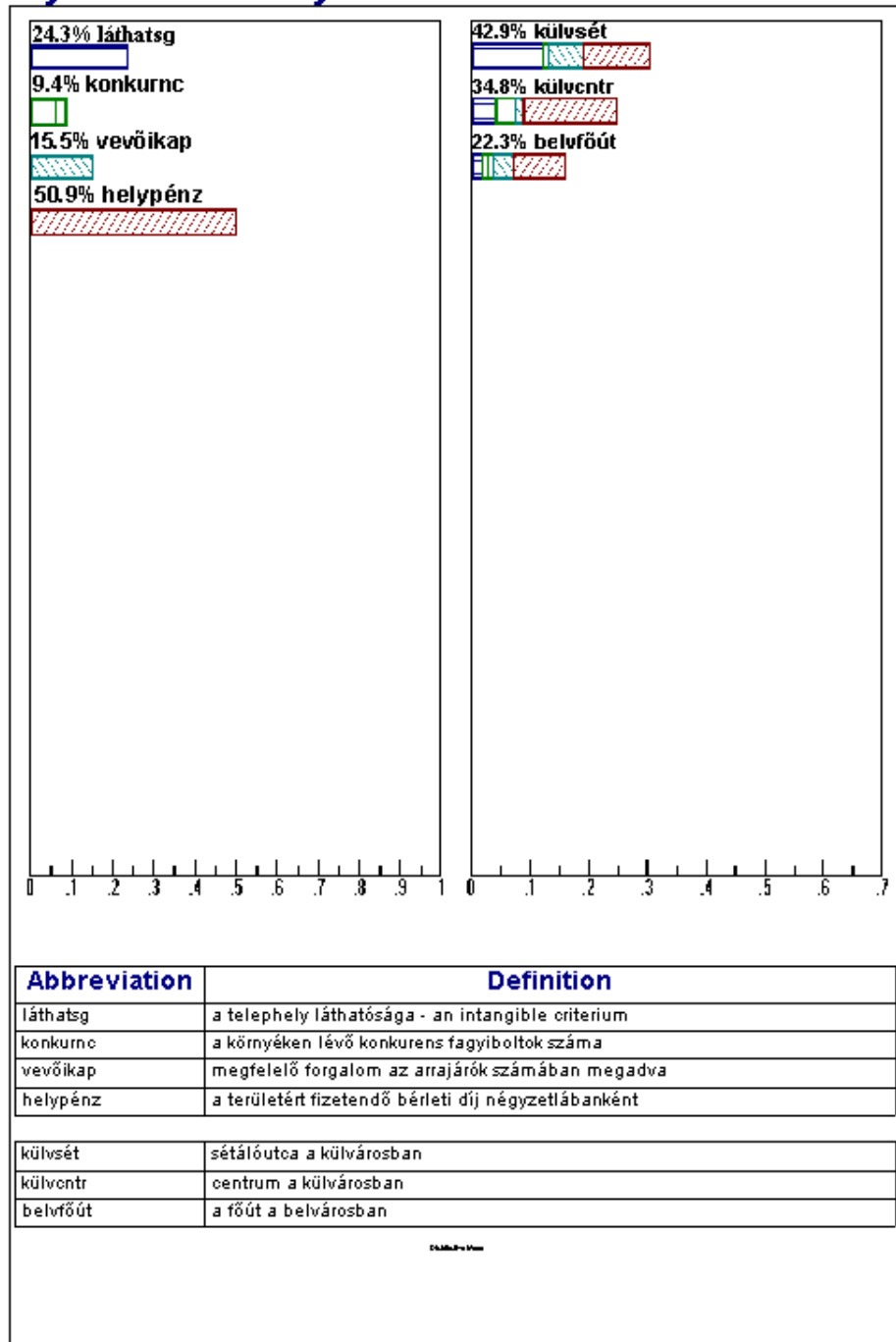
I.2.4. ábra Az érzékenységvizsgálati képernyő „Performance” módban

Dynamic Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



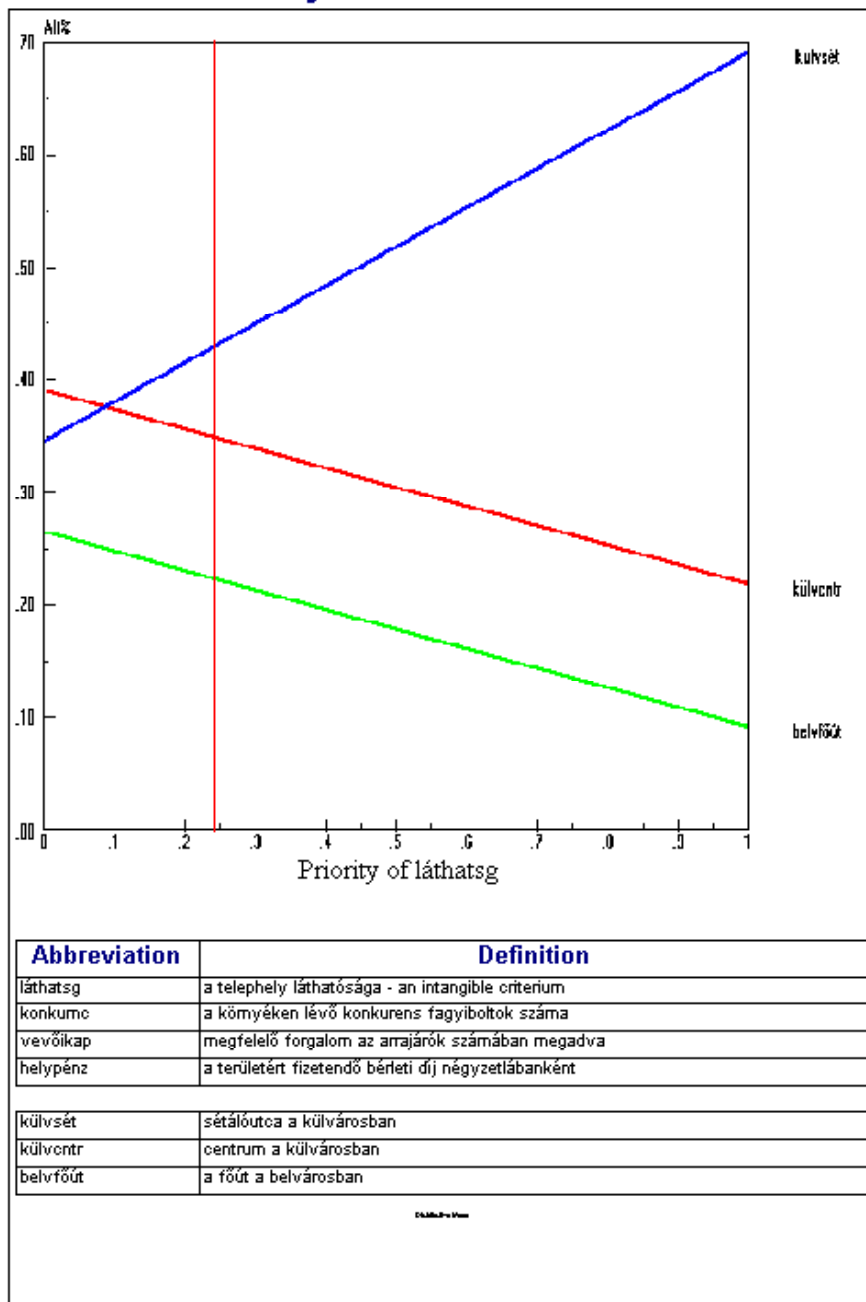
I.2.5. ábra Az érzékenységvizsgálati képernyő „Dynamic” módban

Dynamic Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



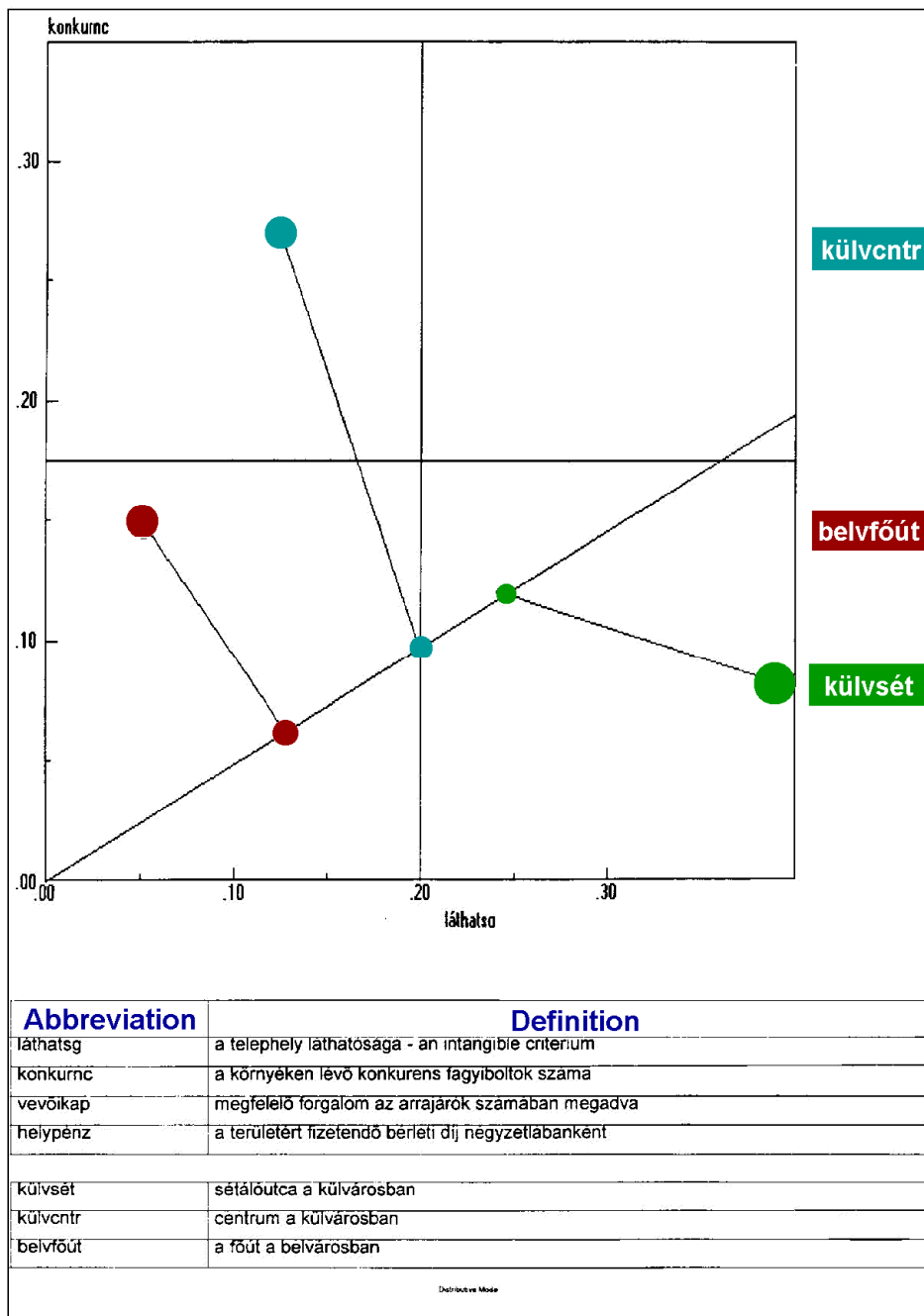
I.2.6. ábra Az érzékenységvizsgálati képernyő „Dynamic Components” módban

Gradient Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



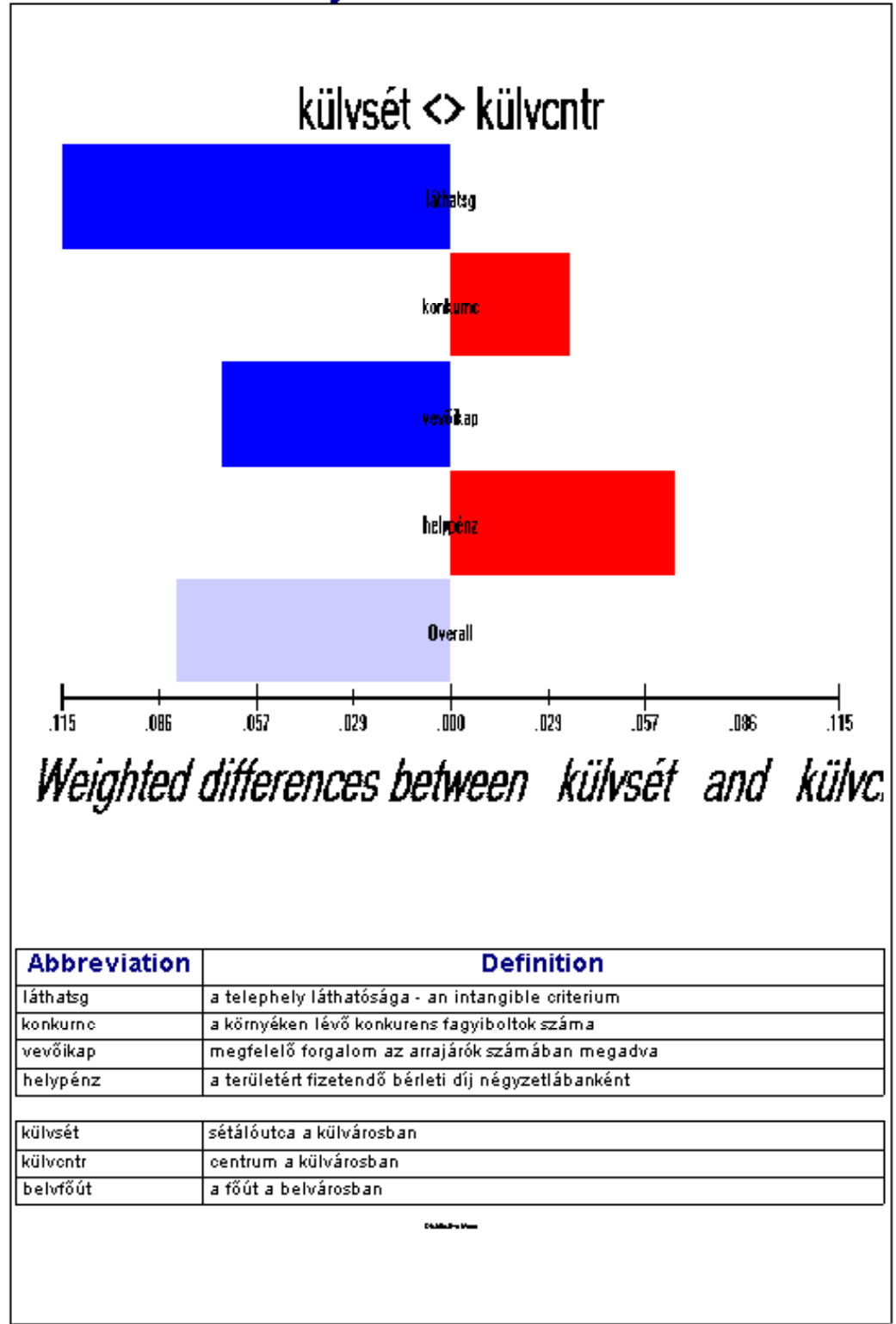
I.2.7. ábra Az érzékenységvizsgálati képernyő „Gradient” módban

Two-D Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



I.2.8. ábra A képernyő „2D Plot” módban

Differences Sensitivity w.r.t. GOAL for nodes below GOAL



I.2.9. ábra A képernyő „Difference” módban

I.2.10. Csoportos döntések

Ha az AHP modelleket csoportos döntési feladatok megoldására szeretnénk alkalmazni, akkor szükség van az egyéni döntéshozók páros összehasonlítás mátrixainak az aggregálására. Aczél és Saaty (1983) megmutatta, hogy ha az egyéni döntéshozók tapasztalati páros összehasonlítás mátrixainak ugyanolyan indexű elemeit aggregáljuk az

$$f(y_1, \dots, y_l) = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^l \Phi(y_k) \right), \quad (y_1, \dots, y_l) \in I^l \subseteq R_+^l, \quad (\text{I.2.10.1})$$

kváziaritmetikai közép segítségével (l döntéshozó van), ahol I pozitív számokból álló nyílt intervallum, $I^l = I \times I \times \dots \times I$ direkt szorzat, R_+^l az l - dimenziós Euklideszi tér pozitív ortánsa, $\Phi : I \rightarrow R$ tetszőleges folytonos és szigorúan monoton függvény, és feltételezzük, hogy a reciprocitási tulajdonság teljesül, azaz

$$f\left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_l}\right) = \frac{1}{f(y_1, \dots, y_l)}, \quad (y_1, \dots, y_l), \left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_l}\right) \in I^l, \quad (\text{I.2.10.2})$$

valamint a pozitív homogenitás teljesül, azaz

$$f(sy_1, \dots, sy_l) = sf(y_1, \dots, y_l), \quad (y_1, \dots, y_l), (sy_1, \dots, sy_l) \in I^l, \quad s > 0, \quad (\text{I.2.10.3})$$

akkor az f összegzőfüggvényre az egyedüli megoldás a geometriai közép, azaz

$$f(y_1, \dots, y_l) = \prod_{k=1}^l y_k^{\frac{1}{l}}, \quad l \geq 2, \quad (y_1, \dots, y_l) \in I^l. \quad (\text{I.2.10.4})$$

Megjegyezzük, hogy a reciprocitási tulajdonságból következik, hogy az aggregált mátrix is reciprok mátrix lesz. Ha a változók valamilyen mértéket jelentenek (pl. súly, hosszúság), akkor a pozitív homogenitás azt jelenti, hogy az aggregálás eredménye változatlan, ha a mértékegység megváltozik. Ha az összegezendő értékek hányados skálához tartoznak (pl. páros összehasonlítás mátrixok esetén), akkor a homogenitás jelentése az, hogy ha mindegyik értékelés s -szeresére növekedik, akkor a végeredmény is s -szeres lesz.

Basak és Saaty (1993) a döntéshozók közötti különbséget a (I.2.10.1) kváziaritmetikai közép képzésénél vették figyelembe azt feltételezve, hogy nem minden változóra ugyanazt a Φ függvényt alkalmazzuk. Gass és Rapcsák (1996) új elven alapuló csoportos döntési technikát javasolt az AHP modellek esetére, amelyben a döntéshozókhoz szavazóerők vannak rendelve, és az aggregálás után nyert döntési mátrix nem páros összehasonlítás mátrix.

I.2.11. Döntési problémák reprezentációi

A döntési problémák megoldásakor látható, hogy nagyon fontosak a különböző reprezentációk, úgy mint:

- a döntési problémák verbális megfogalmazása;
- a döntési modell matematikai megfogalmazása;

- a döntési modell grafikus megjelenítése;
- a megoldó módszer matematikai leírása;
- a megoldó módszer szoftveres megvalósítása;
- a döntési probléma megoldásának vizualizálása;
- a döntéstámogatás folyamatáról dokumentum szerkesztése.

Az EC esetén is látható, mennyire fontosak a különböző reprezentációk, hiszen nagyon nagy eltérés van a döntési modell matematikai megfogalmazása és a megoldó módszer matematikai leírása, valamint a döntési modell grafikus megjelenítése és a megoldó módszer szoftveres megvalósítása között. Ez utóbbinál megfigyelhető, hogy a különböző kulturális hagyományokkal rendelkező országokban más és más technikák kerülnek megvalósításra (pl. jellemzően amerikai technika az összehasonlítás, míg Európában inkább az osztályozás az elfogadott - ennek pszichológiai háttere is van).

I.2.12. Expert Choice szoftvertechnológia

Az EC a világ sok országában ismert döntéstámogató szoftver, amely többszemponútú döntési problémák megoldására szolgál. A szoftvernek egyéni (egy döntéshozó) és csoportos (több döntéshozó) változata is van. Az EC újabb változatai Windows alatt futó, könnyen kezelhető, felhasználó-barát interaktív rendszerek.

A jelenlegi EC rendszerek eléggé zártak, így a kapcsolattartás külső adatbázisokkal nehézkes, külső programok beépítését nem teszik lehetővé, ezért pl. a szempontok pontozásakor az adatok csak közvetlenül, billentyűzetről vihetők be. A rendszer által létesített adatbázisok nem kompatibilisek az elterjedt adatbáziskezelőkkel (pl. dBase, Oracle, Excel). Az EC 2000-ben már van EXCEL kapcsolat.

I.2.13. Erőforrás szétosztása

Döntési problémák esetén gyakran van szükség többszemponútú döntési feladatok és optimalizálási feladatok kombinálására. Az egyik ilyen problémakör az erőforrás-szétosztás.

Tegyük fel, hogy a döntési probléma a legjobb kutatásfejlesztési pályázatok kiválasztása adott pénzügyi korlát esetén. A feladatot két részre bontjuk. Először megoldjuk a többszemponútú feladatot, azaz a pályázatok rangsorolását, amiből (pl. az AHP disztributív modell segítségével) megkapjuk az egyes pályázatok súly- vagy prioritásértékeit.

Ezután a következő egészértékű optimalizálási feladatot oldjuk meg:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ & \sum_{i=1}^n c_i z_i \leq K, \\ \mathbf{c}, \mathbf{z}, \mathbf{x} \in R^n, \quad & z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{I.2.13.1}$$

ahol az $x_i, i = 1, \dots, n$, prioritásértékeket a döntési feladat megoldásából kaptuk az $A_1, \dots, A_n$, alternatívákra vonatkozóan, $c_i, i = 1, \dots, n$, az egyes kutatásfejlesztési munkák tervezett költsége, K a rendelkezésre álló pénzösszeg, és ha $z_i = 1$, akkor az i -edik

projekt kiválasztásra került, ha pedig $z_i = 0$, akkor nem. Látható, hogy így a rendelkezésre álló K összeget próbáljuk a leghatékonyabban felhasználni a kutatásfejlesztési projektek között.

I.2.14. Példa optimalizálási problémából származó döntési feladatra

A következő példa olyan esetet mutat be, amikor lineáris optimalizálási feladatból származtatható többszemponútú döntési feladat.

Egy televízió készülékeket gyártó vállalat kétfajta terméket gyárt (A_1, A_2). A két fajtát különböző gyártószalagon állítják össze. Az A_1 készüléket gyártó szalag kapacitása 70 készülék/nap, az A_2 készüléket gyártó szalag kapacitása pedig 50 készülék/nap. Mind a két készülék képcsőveit ugyanabban az üzemrészben állítják elő, az A_1 képcső előállítása 1 órát, míg az A_2 képcső előállítása 2 órát igényel, és ebben az üzemrészben naponta 120 órát foglalkoznak képcső gyártással. Egy másik üzemrészben a televízió készülékek dobozait gyártják, és mindkét fajta készülék dobozának a gyártásához 1-1 óra szükséges. Ebben az üzemrészben naponta 90 órát tudnak televízió készülékek dobozainak gyártására fordítani. Az A_1 típusú készülékeken a tiszta nyereség 2000 Ft, míg az A_2 típusú készülékeken 1000 Ft. Mi az optimális gyártási terv?

A kérdés megválaszolása a következő lineáris programozási feladatra vezet:

$$\begin{array}{llll}
 \max & 2000x + & 1000y & \text{(nyereség)} \\
 & x + & 2y \leq 120, & \text{(technológiai felt. az 1. üzemrészben)} \\
 & x + & y \leq 90, & \text{(technológiai felt. a 2. üzemrészben)} \\
 & x & \leq 70, & \text{(A_1 gyártószalag kapacitása)} \\
 & & y \leq 50, & \text{(A_2 gyártószalag kapacitása)} \\
 & x \geq 0, & y \geq 0, & \\
 & & & \text{(I.2.14.1)}
 \end{array}$$

ahol x az A_1 készülékekből gyártott darabok száma és y az A_2 készülékekből gyártott darabok száma.

A lineáris optimalizálási feladat optimális megoldása $x = 70$, $y = 20$, az optimális célfüggvény érték pedig 160000. A példa grafikus megoldása a mellékelt ábrán látható.

Tegyük fel, hogy az üzemnek vesztesége származik abból, ha nem használja ki a képcsővek előállításához szükséges teljes kapacitását. Ezért az előbbi feladat helyett a következőt tekinthetjük:

$$\begin{array}{llll}
 \max & 2000x + & 1000y & \\
 \max & x + & 2y & \\
 & x + & 2y \leq 120, & \\
 & x + & y \leq 90, & \text{(I.2.14.2)} \\
 & x & \leq 70, & \\
 & & y \leq 50, & \\
 & x, & \geq 0 & y \geq 0.
 \end{array}$$

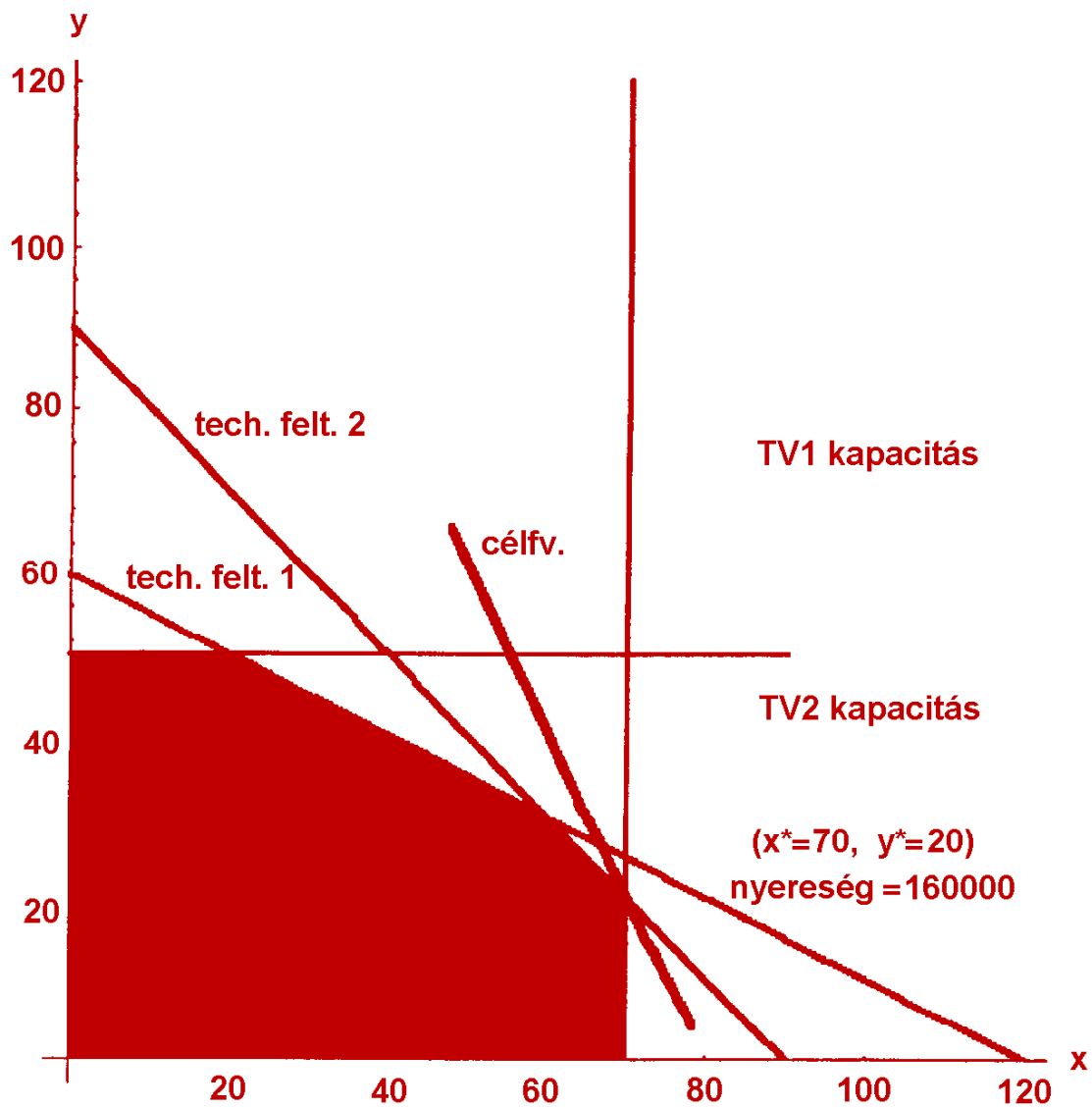
Ennek a feladatnak a megoldásait csak a poliéder csúcspontjain kell keresni, amelyek a következők:

$$(0, 0), (0, 50), (20, 50), (60, 30), (70, 20), (70, 0).$$

A második célfüggvény a $(20, 50)$, és a $(60, 30)$ csúcspontokon veszi fel a maximumát, ahol a második célfüggvény optimális értéke 120. A második célfüggvény értéke a $(70, 20)$ pontban 110.

Látható tehát, hogy nincs olyan csúcspont, amelyben mind a két célfüggvény szerint optimális értéket kapunk. Természetesen, egy újabb cél lehet a rezsiköltségek minimalizálása, vagy a vásárlók igényeinek kielégítése magas szinten, stb., ami mutatja, hogy nagyon sok gyakorlati feladatban egyszerre több szempont szerint kell értékelni a döntési alternatívákat.

TV PÉLDA GRAFIKUS MEGOLDÁSA



I.2.10. ábra

Irodalomjegyzék

- [1] Aczél, J. and Saaty, T.L., Procedures for synthesizing ratio judgments, *Journal of Mathematical Psychology* 27 (1983) 93-102.
- [2] Aczél, J., Determining merged relative score, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 150 (1990) 20-40.
- [3] Basak, I. and Saaty, T.L., Group decision making using the analytic hierarchy process, *Mathematical Computer Modelling* 17 (1993) 101-109.
- [4] Bell, W.J., Dalberto, L.M., Fischer, M.L., Greenfield, A.J., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R.G. and Prutzman, P.J., Improving the distribution of industrial gases with an online computerized routing and scheduling optimizer, *Interfaces* 13 (1983) 4-23.
- [5] Bozóki, S., A method for solving LSM problems of small size in the AHP, *Central European Journal of Operations Research* 11 (2003) 17-33.
- [6] Eckart, C. and Young, G., The approximation of one matrix by another of lower rank, *Psychometrika* 1 (1986) 211-218.
- [7] Ekárt, A. and Németh, S.Z., Stability of distributive and ideal AHP models with respect to the addition of a new alternative, *Proceedings of the ISAHP2001*, Switzerland, Inst. Accounting and Controlling, University of Bern (2001) 87-92.
- [8] Fleming, P.J. and Wallace, J.J., How not to lie with statistics: the correct way to summarize benchmark results, *Communications of the ACM* 29 (1986) 218-221.
- [9] Gass, S.I. and Rapcsák, T., A note on synthesizing group decisions, *Decision Support Systems* 22 (1998) 59-63.
- [10] Gass, S.I. and Rapcsák, T., Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research* 154 (2004) 573-584.
- [11] Greenacre, M.J., Theory and applications of correspondence analysis, *Academic Press*, London, Orlando, 1984.
- [12] Jones, C.V., Visualization and optimization, *ORSA Journal of Computing* 6 (1994) 221-257.
- [13] Jones, C.V., Visualization and optimization, *Kluwer Academic Publishers*, 1996.
- [14] Kennedy, W.J. and Gentle, J.E., Statistical computing, *Marcel Dekker*, New York, Basel, 1980.
- [15] Mirkin, B.G., Group choice, V.H. *Winston & Sons*, Washington, 1979.
- [16] Perron, O., Zur Theorie der Matrizen, *Mathematische Annalen* 64 (1907) 248-263.

- [17] Saaty, T.L., The analytic hierarchy process, *McGraw-Hill*, New York, 1980.
- [18] Saaty, T.L., Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process, *Management Science* 32 (1986) 841-855.
- [19] Saaty, T.L., The analytic hierarchy process, *University of Pittsburgh*, Pittsburgh, 1990.
- [20] Saaty, T.L., How to make a decision: the analytic hierarchy process, *Interfaces* 24 (1994) 19-43.
- [21] Temesi, J., A döntéselmélet alapjai, *AULA*, Budapest, 2002.

I.3. A PROMETHEE módszerek

Az AHP modellek megoldásakor láttuk, hogy az alaptechnika a pszichológiai háttérrel is rendelkező páros összehasonlítás, ami bizonyos esetekben, pl. nem túl nagy számú szubjektív szempont esetén, nagyon jó eszköznek tűnik. A páros összehasonlítás a döntéshozó egyéni preferenciáira épül. A preferencia modellekben a preferencia mértékének a meghatározása az egyik legnehezebb feladat, ezért a különböző módszerekben különböző technikákat dolgoztak ki. A preferencia mértékének a mérésére hasznossági függvényeket lehet bevezetni, amely technika a mikroökonómia megalapozásában is nagy szerepet játszik. Többszempontú döntési problémák megoldásakor gondot jelenthet a különböző alternatívák különböző szempontok szerinti összehasonlíthatósága is. Ezekre a kérdésekre a PROMETHEE (Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations) módszerek eltérő válaszokat adnak, mint amiket az AHP modellekben megismertünk. A PROMETHEE módszereket Brans vezette be 1982-ben.

I.3.1. A PROMETHEE döntési modell

Az előző részben láttuk, hogy a többszempontú döntési problémákban az alaplépések a következők:

1. A döntési feladat felépítése
 - a.) a cél megfogalmazása;
 - b.) az alternatívák kiválasztása;
 - c.) a szempontok meghatározása.
2. A döntési feladat megoldása
 - a.) a szempontok súlyainak a meghatározása;
 - b.) minden alternatíva kiértékelése minden szempont szerint;
 - c.) az értékelések és a súlyozás összegzése.

Ebben a részben - a fenti felépítést követve - a PROMETHEE módszerekkel ismerkedünk meg, a Roy és Brans által alapított, több mint 30 éve sikeresen működő európai iskola egyik széles körben elterjedt eredményével.

A PROMETHEE módszerek első változatait többszempontú döntési feladatok, egy döntéshozó közreműködésével történő, megoldására dolgozták ki. A PROMETHEE módszertan egy döntéshozó közreműködésére épülő döntéstámogató szoftverrendszere a PROMCALC & GAIA. A PROMETHEE módszerek használatát mintapéldán keresztül mutatjuk be.

Tekintsük azt a beruházási problémát, ahol a különböző országokban található vízi-erőművek közül kell kiválasztanunk a legmegfelelőbbet hatékonysági és biztonsági szempontok figyelembevételével. Az országok legyenek Olaszország, Belgium, Németország, Svédország, Ausztria és Franciaország, a szempontok pedig az alkalmazottak száma, az erőmű kapacitása, az építési költség, a karbantartási költség, a baleset esetén kiürítendő falvak száma és a biztonság.

A döntési feladat verbális megfogalmazása nem különbözik a korábban megismertektől. Rendezzük a döntési probléma adatait döntési táblázatba, így az I.3.1. Táblázatot kapjuk, amiből látható, hogy

- a PROMETHEE módszerek itt ismertetett változata, illetve
- a módszereket megvalósító PROMCALC & GAIA szoftver, egy döntéshozó közreműködését feltételezik;
- a döntési táblázat elemeit konkrét értékek esetén nem skálázzuk (nem homogenizáljuk),
pl. építési költség: 1000 vagy 600;
karbantartási költség: 7.5 vagy 2;
- a döntési probléma adatai között intervallum értékek nem szerepelhetnek;
- a szempontokat két csoportba osztjuk:
 - a.) a kisebb érték a jobb, pl. építési költség;
 - b.) a nagyobb érték a jobb, pl. erőmű kapacitása.

Megállapítható tehát, hogy a döntési feladat felépítése úgy történik, mint az AHP módszertan alkalmazásakor.

Alternatívák Szempontok	Olaszország	Belgium	Németország	Svédország	Ausztria	Franciaország
Alkalmazottak száma	80.00	65.00	83.00	40.00	52.00	94.00
Erőmű kapacitása (MW)	90.00	58.00	60.00	80.00	72.00	96.00
Építési költség (millió \$)	600.00	200.00	400.00	1000.00	600.00	700.00
Karbantartási költség (millió \$)	5.40	9.70	7.20	7.50	2.00	3.60
Kiűrtendő falvak száma	8.00	1.00	4.00	7.00	3.00	5.00
Biztonság	5.00	1.00	7.00	10.00	8.00	6.00

I.3.1. Táblázat

I.3.2. A szempontok súlyozása

A szempontok fontossága között eltérés van. A szempontok fontosságát tükröző értékeket, a súlyokat a döntéshozó adja meg a szubjektív véleménye alapján, amikben a döntéshozó szakértelme tükröződik. A súlyok közvetlen megadása tetszőleges értékekkel történhet, amiket a program 1-re normál, azaz feltételezhetjük, hogy a súlyok a következő formában adóttak:

$$w_i = \frac{w_i^*}{\sum_{k=1}^m w_k^*}, \quad i = 1, \dots, m.$$

A PROMETHEE módszertanban a döntéshozó a szubjektív ítéleteit a súlyozáson keresztül viszi be a döntési folyamatba. A PROMETHEE & GAIA módszertanban a döntéshozó interaktívan részt vehet a döntéshozatalban. A súlyokat oszlopdiagram formában is módjában áll megtekinteni, és azokat interaktívan változtatni tudja. A súlyok vizuális megjelenítéséről, vizsgálatáról és a súlystabilitást vizsgáló szoftvermodulokról a későbbiekben lesz szó.

I.3.3. Preferencia relációk

A közgazdaságtanban a keresletelméletnek eléggé természetes kiindulása az, hogy az egyén piaci vásárlásait a szubjektív ítélete szabja meg. Emiatt a tárgyalás az egyén ízlésének, preferenciájának a tanulmányozásával kezdődik. A többszempontú döntési feladatoknál a döntéshozó szubjektív ítéleteit kell beilleszteni a döntési folyamatba, ezért a preferenciák tanulmányozása itt is természetes. A preferencia modelleknél azt feltételezzük, hogy a döntéshozó bármely két alternatívát össze tud hasonlítani az adott szempontok szerint, és minden szempont esetén ki tudja választani a jobbat, azaz, a döntéseit rendezett alternatíva párokkal adja meg.

Kiindulásként vegyünk egy értékelésre vagy összehasonlításra váró elemekből álló $\mathcal{A}$ halmazt. Ez a halmaz lehet véges (tartalmazhat személyeket, álláshelyeket, autókat) vagy végtelen számosságú (tartalmazhat fogyasztási szinteket, vagy tökéletesen osztható javakat). Az $\mathcal{A}$ halmaz esetünkben az alternatívák halmaza. Tekintsük ezen halmaz tetszőleges (A_1, A_2) rendezett elempárját, és vezessük be azt a fogalmat, hogy

„az A_1 elem legalább olyan jó, mint A_2 ”,

amit az $A_1 \succeq A_2$ szimbólummal jelölünk. Ha minden lehetséges $(A_k, A_l) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, $(k, l) \in I \times I$, elempárt tekintünk, ahol I tetszőleges indexhalmaz, akkor az $\mathcal{A}$ halmazon bináris relációt értelmezünk. Egy tetszőleges $\succeq$ relációból két újabb bináris relációt származtathatunk az alábbi definíció szerint.

Definíció I.3.3.1. Jelöljön a $\succeq$ szimbólum egy bináris relációt az $\mathcal{A}$ halmazon. Az

$$A_1 \succ A_2 \iff A_1 \succeq A_2 \text{ és } A_2 \not\succeq A_1$$

módon definiált $\succ$ relációt a $\succeq$ reláció aszimmetrikus magjának, az

$$A_1 \approx A_2 \iff A_1 \succeq A_2 \text{ és } A_2 \succeq A_1$$

módon definiált $\approx$ relációt pedig a $\succeq$ reláció szimmetrikus magjának nevezzük.

Az A halmazon értelmezett bináris reláció

reflexív, ha

$$A \succeq A, \quad \forall A \in \mathcal{A};$$

tranzitív, ha

$$A_1 \succeq A_2, \quad A_2 \succeq A_3, \quad \text{következmenye} \quad A_1 \succeq A_3, \quad \forall A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A};$$

és teljes, ha

$$A_1 \succeq A_2 \quad \text{vagy} \quad A_2 \succeq A_1, \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}.$$

Ha a bináris reláció reflexív, tranzitív és teljes, akkor gyenge preferenciáról beszélünk. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ halmazon értelmezett gyenge preferenciát akkor reprezentálja az $u: \mathcal{A} \rightarrow R$ függvény, ha

$$\begin{aligned} A_1 \succ A_2 &\iff u(A_1) > u(A_2), \\ A_1 \approx A_2 &\iff u(A_1) = u(A_2), \\ &\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

A következő állítások pl. Dancs (1996) kéziratában megtalálhatók a bizonyításokkal együtt. Az első állítás az, hogy folytonos függvény folytonos preferenciát reprezentál.

Lemma I.3.3.1. *Legyen A topologikus tér. Ha $u: A \rightarrow R$ folytonos függvény és a $\succeq$ reláció definíciója*

$$A_1 \succeq A_2 \iff u(A_1) \geq u(A_2),$$

akkor a $\succeq$ reláció reflexív, tranzitív, teljes és folytonos.

Debreu tétel. *Legyen A megszámlálható bázisú topologikus tér. Ekkor az A téren vett tetszőleges folytonos preferenciáknak van folytonos reprezentációja.*

Eilenberg-Debreu tétel. *Legyen A szeparábilis és összefüggő topologikus tér. Ekkor az A téren vett tetszőleges folytonos preferenciáknak van folytonos reprezentációja.*

Az u függvény elnevezése hasznossági függvény, vagy a döntéelméletben értékelő függvény (lásd Temesi, 2002). Megjegyezzük, hogy ha $\Phi: R \rightarrow R$ egy szigorúan monoton növekedő függvény, akkor a $\Phi \circ u$ közvetett függvény is hasznossági függvény.

A közgazdaságtanban azt a döntéshozót tekintik racionálisnak, akinek a preferencia struktúrája egy értékelő (hasznossági) függvénnyel leírható. A racionális döntéshozóra vonatkozóan tehát megállapíthatjuk, hogy preferencia struktúrája teljes és tranzitív, valamint rendelkezik a helyettesítési tulajdonsággal:

$$\text{ha } A_1 \succ A_2 \text{ és } A_1 \approx A_3, \text{ akkor } A_3 \succ A_2.$$

Ezeknek a feltételeknek egyenes következménye az, hogy az indifferencia görbék nem metszik egymást, az egymást metsző görbék ugyanis a racionalitás megsértését jelentik.

I.3.4. Általánosított szempontok

Jelölje $\mathcal{A}$ az alternatívák halmazát, P és I a döntéshozó „jobb” és „ekvivalens” preferencia relációit, $u : \mathcal{A} \rightarrow R$ egy hasznossági függvényt, ami minden alternatívához egy valós számot rendel és c legyen tetszőleges nem negatív szám. Azt mondjuk, hogy az A alternatíva halmazon a (P, I) párral megadott preferencia modellt az u hasznossági függvény reprezentálja, ha bármely $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ alternatíva pár esetén

$$\begin{aligned} A_1 P A_2 &\iff u(A_1) > u(A_2) + c, \\ A_1 I A_2 &\iff u(A_1) = u(A_2) \quad \text{vagy} \quad |u(A_1) - u(A_2)| \leq c, \\ \forall (A_i, A_j) &\in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Debreu híres tétele szerint, folytonos preferencia reláció esetén, általános feltételek mellett létezik azt reprezentáló folytonos hasznossági függvény. A probléma abból adódik, hogy a preferencia modelleket reprezentáló hasznossági függvényt, vagy függvényeket nem ismerjük, azonban ha egyet ismerünk, akkor ebből végtelen sok hasznossági függvényt lehet származtatni.

A PROMETHEE módszerek lényege, hogy ún. általánosított szempontok (generalized criteria) bevezetésével lehetőséget biztosítanak arra, hogy az alternatíva párok különböző szempontok szerinti értékelése abszolút skálán történjen, és így preferencia mértékeket határozzunk meg.

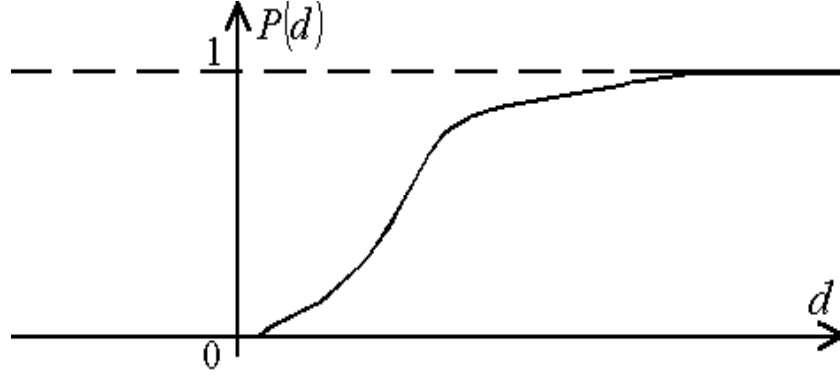
Mivel a páros összehasonlítás módszeréhez hasonlóan itt is az alternatíva párokat értékeljük, ezért bevezetünk egy $P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ általánosított szempont függvényt, aminek az értelmezési tartománya az alternatívák halmazának direkt szorzata, értékkészlete pedig a valós számok 0 és 1 közötti tartománya. Legyen A_j és A_k két tetszőleges alternatíva, $u : \mathcal{A} \rightarrow R$ egy hasznossági vagy értékelő függvény, és tegyük fel, hogy a nagyobb érték a jobb, valamint az általánosított szempont függvény csak a két tetszőleges alternatíva értékelésének a különbségétől függ. Bevezetve a

$$d(A_j, A_k) = u(A_j) - u(A_k), \quad \forall (A_j, A_k) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},$$

jelölést, az általános szempont függvény a következőképpen jellemezhető:

$$\begin{aligned} P(A_j, A_k) &= P(d(A_j, A_k)) = 0, \quad \text{ha} \quad d(A_j, A_k) \leq q, && \text{vagyis } A_j \text{ nem jobb} \\ & && A_k\text{-nál,} \\ P(A_j, A_k) &= P(d(A_j, A_k)) \approx 0, \quad \text{ha} \quad d(A_j, A_k) > q, && \text{vagyis } A_j \text{ csak kevés-} \\ & && \text{sel jobb } A_k\text{-nál,} \\ P(A_j, A_k) &= P(d(A_j, A_k)) \approx 1, \quad \text{ha} \quad d(A_j, A_k) \gg q, && \text{vagyis } A_j \text{ előnye} \\ & && \text{jelentős mértékű,} \\ P(A_j, A_k) &= P(d(A_j, A_k)) = 1, \quad \text{ha} \quad d(A_j, A_k) \gg \gg q, && \text{vagyis } A_j \text{ egyértelműen} \\ & && \text{jobb választás } A_k\text{-nál,} \end{aligned}$$

ahol q pozitív konstans. A jellemzésből következik, hogy az ismeretlen P függvény monoton nem csökkenő és általános alakja hasonló az alábbi ábrához:



Preferencia függvény a páros összehasonlításhoz

Ezt a függvényt a továbbiakban $P(d)$, $d \in R$, jelöli.

A PROMETHEE módszer szerint, minden egyes szemponthoz konkrétan megadunk egy általános szempont-függvényt, majd minden (A_j, A_k) alternatíva párhoz kiszámítunk egy, az előbb definiált $P_i(d(A_j, A_k))$, $i = 1, \dots, m$, általános szempont értéket. Hat, tipikusnak nevezhető, általános szempont-függvény közül lehet választani a PROMETHEE módszerekben, az alternatívák szempontok szerinti értékelésekor. Ezek a következők:

1. egyszerű szempont függvény, amiben nincs paraméter:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0; \\ 1, & d > 0, \end{cases}$$

2. U-alakú szempont függvény, ami a q közömbösségi küszöbtől függ:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q; \\ 1, & d > q, \end{cases}$$

3. V-alakú szempont függvény, ami a p preferencia meredekségtől függ:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0; \\ d/p, & 0 \leq d \leq p; \\ 1, & d > p, \end{cases}$$

4. lépcsős szempont függvény, ami két közömbösségi küszöbtől függ:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q_1; \\ 1/2, & q_1 < d \leq q_2; \\ 1, & d > q_2, \end{cases}$$

5. trapéz alakú szempont függvény, ami a q közömbösségi küszöbötől és a p preferencia meredekségtől függ:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q; \\ \frac{d-q}{p-q}, & q < d \leq p; \\ 1, & d > p, \end{cases}$$

6. Gauss szempont függvény, ami a σ paramétertől függ:

$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0; \\ 1 - e^{-d^2/2\sigma^2}, & d \geq 0. \end{cases}$$

Mivel figyelembe akarjuk venni azt is, ha a kisebb érték a jobb, ezért vezessük be a $H : R \longrightarrow R$ függvényt a következőképpen:

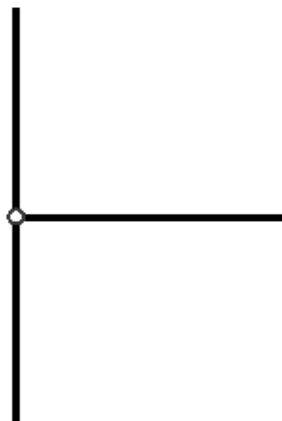
$$H(d) = \begin{cases} P(d(A_j, A_k)), & d(A_j, A_k) \geq 0; \\ P(d(A_k, A_j)), & d(A_k, A_j) \leq 0. \end{cases}$$

A preferencia mértékének meghatározására szolgáló függvényekből képzett, szimmetrikus, H típusú általánosított szempont függvények láthatók az I.3.1. ábrán. Gyakorlati problémák megoldásakor külön hangsúlyt kell fektetni a megfelelő görbék kiválasztására és a legfeljebb két paraméter megadására. Az előbbieken tekintett beruházási problémánál az I.3.1. Táblázat a következőképpen módosul (lásd I.3.2. Táblázat):

- az I.3.2. Táblázat első kiegészítő oszlopába a szempont súlyok kerülnek;
- a második kiegészítő oszlopba azt írjuk, hogy „min” vagy „max” attól függően, hogy az adott szempont szerint a kisebb vagy nagyobb érték a jobb;
- a harmadik kiegészítő oszlopba az adott szempont szerinti értékeléshez választott preferenciamérték függvény száma kerül;
- a negyedik kiegészítő oszlopba pedig a hozzá tartozó paraméter érték(ek).

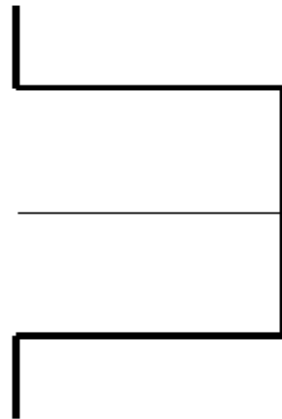
ÁLTALÁNOSÍTOTT SZEMPONT FÜGGVÉNYEK

1. Egyszerű szempont függvény



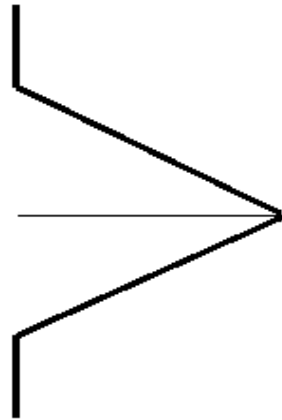
nincs küszöb

2. U-alakú szempont függvény



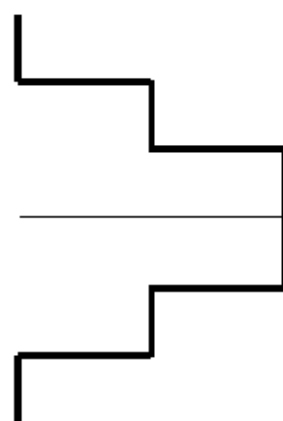
q-küszöb

3. V-alakú szempont függvény



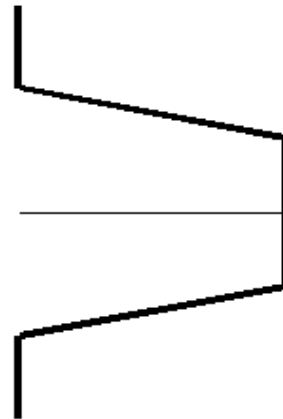
p-küszöb

4. Lépcsős szempont függvény



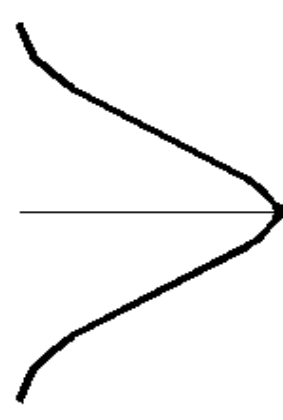
q_1 - és q_2 - küszöb

5. Trapéz alakú szempont függvény



q - és p - küszöb

6. Gauss szempont függvény



σ - küszöb

I.3.1. ábra

Alternatívák	Olasz-ország	Belgium	Német-ország	Svéd-ország	Ausztria	Francia-ország	Súly	Min/Max	Függvény típus	Paraméter
Szem-pontok										
Alkal-mazottak száma	80.00	65.00	83.00	40.00	52.00	94.00	1	min	2	$q = 10$
Erőmű napi kapacitása (MW)	90.00	58.00	60.00	80.00	72.00	96.00	1	max	3	$p = 30$
Építési költség (millió \$)	600.00	200.00	400.00	1000.00	600.00	700.00	1	min	5	$q = 50$ $p = 500$
Karban-tartási költség (millió \$)	5.40	9.70	7.20	7.50	2.00	3.60	1	min	4	$q_1 = 10$ $q_2 = 60$
Kiűntendő falvak száma	8.00	1.00	4.00	7.00	3.00	5.00	1	min	1	-
Biztonság	5.00	1.00	7.00	10.00	8.00	6.00	1	max	6	$\sigma = 5$

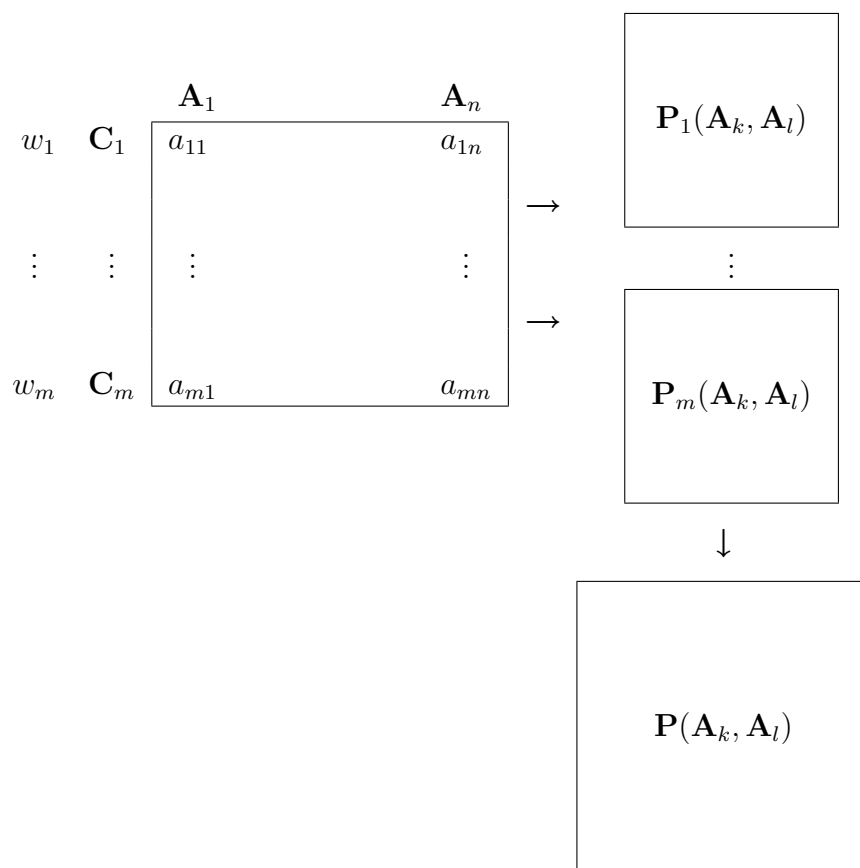
I.3.2. Táblázat

I.3.5. Döntési folyamatok

A PROMETHEE módszerekben minden szemponthoz hozzárendelünk egy általánosított szempont függvényt, majd kiszámítjuk az értékeket az összes alternatíva párra, kivéve az (A_j, A_j) , $j = 1, \dots, n$, párokat, amikre az értékek nyilvánvalóan 0-nak adódnak. Definiáljuk az alternatíva párok összes szempont szerint vett preferenciáit a súlyozás figyelembevételével a következőképpen:

$$P(A_k, A_l) = \sum_{i=1}^m w_i P_i(A_k, A_l), \quad \forall (A_k, A_l) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1.$$

Így megkapjuk az alternatívák aggregált páros összehasonlítás mátrixának az elemeit. Ezt a döntési eljárást az alábbi ábra szemlélteti:



I.3.2. ábra

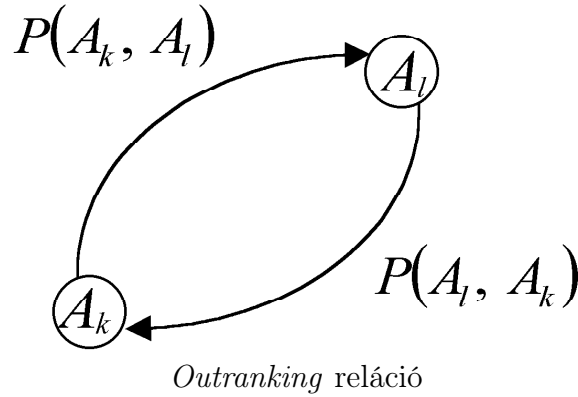
Ha az összes szempont azonos súlyú, akkor

$$P(A_k, A_l) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_i(A_k, A_l), \quad \forall (A_k, A_l) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A},$$

továbbá igaz, hogy

$$P(A_l, A_l) = 0 \text{ és } 0 \leq P(A_k, A_l) \leq 1, \quad \forall (A_k, A_l) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}.$$

Mivel $P(A_k, A_l)$ csak az A_k alternatíva A_l alternatívával szembeni preferenciájáról szolgáltat információt és az A_k alternatíva A_l alternatívával szembeni hátrányáról nem ad tájékoztatást, azaz a $P(A_k, A_l)$ mátrix nem szimmetrikus, ezért szükséges minden alternatíva pár esetén $P(A_l, A_k)$ kiszámítása is. Nyilván e két adat különbsége ad információt az A_k és A_l alternatíva párok egymáshoz viszonyított preferenciáiról és a különbség mértékéről. Ez az ún. *outranking* reláció, amit a következő ábra szemléltet:

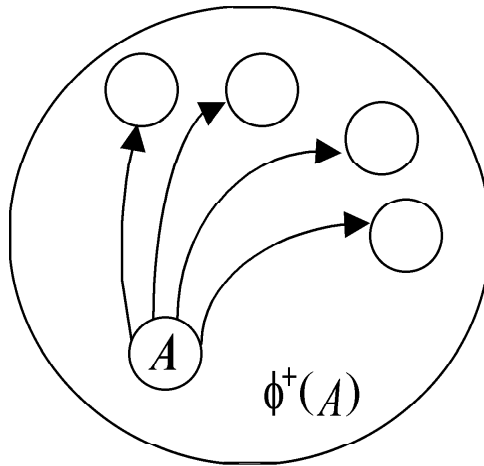


Így páronként össze tudjuk hasonlítani az alternatívákat az összes szempont és azok súlyainak a figyelembevételével. A páronkénti összehasonlítás azonban már három alternatíva esetén is zsákutcába vezethet mind a teljes rangsor, mind az első helyezett megállapításakor.

A PROMETHEE módszerekben azért, hogy teljes rangsort lehessen felállítani - ami a gyakorlati esetekben nagymértékben függ a súlyozás megváltoztatásától - bevezetik a döntési (*outranking*) folyam fogalmát. Definíció szerint, n számú alternatíva esetén a pozitív döntési folyam

$$\Phi^+(A) = \frac{1}{n-1} \sum_{X \in \mathcal{A}} P(A, X).$$

A pozitív döntési folyam értéke azt mutatja meg, hogy egy adott, A alternatíva mennyivel jobb az összes többinél, vagy mennyire erős a többihez képest. Ezt szemlélteti a következő ábra:

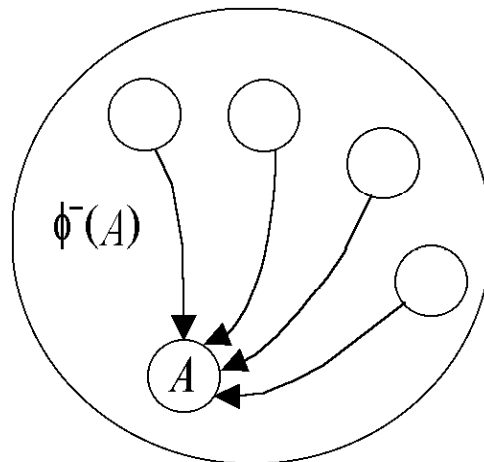


Pozitív döntési folyam

Definíció szerint, n számú alternatíva esetén a negatív döntési folyam

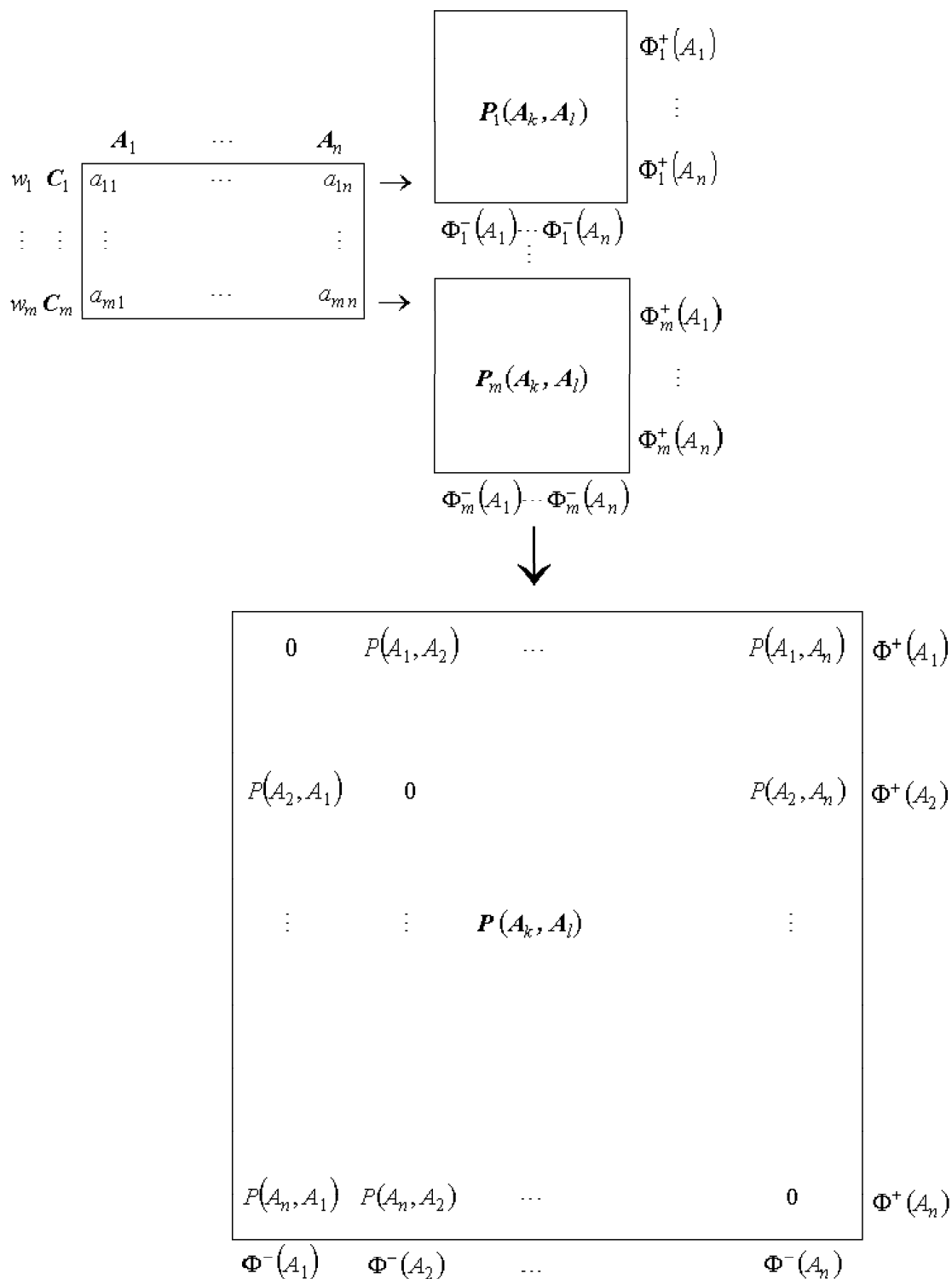
$$\Phi^-(A) = \frac{1}{n-1} \sum_{X \in \mathcal{A}} P(X, A).$$

A negatív döntési folyam értéke azt mutatja meg, hogy egy adott, A alternatívánál mennyivel jobb a többi alternatíva, vagy mennyire gyenge A a többihez képest.



Negatív döntési folyam

A pozitív és negatív döntési folyamatok származtatását az I.3.3. ábrán szemléltetjük.



I.3.3. ábra

A mintapéldában a $P(\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_l)$ páros összehasonlítás mátrix a következő:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Φ^+	Φ^-	Φ
A_1	0	0.296	0.250	0.268	0.100	0.185	0.219	0.365	- 0.146
A_2	0.462	0	0.389	0.333	0.296	0.500	0.396	0.379	0.017
A_3	0.236	0.180	0	0.333	0.056	0.429	0.247	0.336	- 0.089
A_4	0.399	0.505	0.305	0	0.223	0.212	0.329	0.349	- 0.02
A_5	0.444	0.515	0.487	0.380	0	0.448	0.455	0.162	0.29
A_6	0.286	0.399	0.250	0.432	0.133	0	0.300	0.355	- 0.055
Φ^-	0.365	0.379	0.336	0.349	0.162	0.355			

I.3.6. PROMETHEE I részleges rangsor

A pozitív és negatív döntési folyamból adódnak a következő preferencia relációk:

$$A_1 S^+ A_2 \iff \Phi^+(A_1) > \Phi^+(A_2),$$

$$A_1 I^+ A_2 \iff \Phi^+(A_1) = \Phi^+(A_2),$$

$$A_1 S^- A_2 \iff \Phi^-(A_1) < \Phi^-(A_2),$$

$$A_1 I^- A_2 \iff \Phi^-(A_1) = \Phi^-(A_2),$$

bármely $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ alternatíva pár esetén.

A PROMETHEE I részleges rangsor a következőképpen származtatható:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 P^I A_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} A_1 S^+ A_2 \text{ és } A_1 S^- A_2 \\ A_1 S^+ A_2 \text{ és } A_1 I^- A_2 \\ A_1 I^+ A_2 \text{ és } A_1 S^- A_2 \end{array} \right\} \\ A_1 I^I A_2 \iff A_1 I^+ A_2 \text{ és } A_1 I^- A_2 \\ A_1 R^I A_2 \qquad \qquad \text{egyébként} \end{array} \right\},$$

ahol P^I a preferenciát, I^I az indifferenciát (ekvivalenciát) és R^I a nem összehasonlíthatóságot jelenti a PROMETHEE I részleges rangsorban. Tehát, ez a preferencia reláció nem teljes. Az $A_1 R^I A_2$ esetben az tűnik a leghelyesebbnek, ha nem állapítunk meg rangsort. További lehetőség a GAIA analízis segítségével a vizualizálás.

I.3.7. PROMETHEE II teljes rangsor

A teljes rangsor felállításához szükség van egy új fogalom, a nettó döntési folyamat bevezetésére:

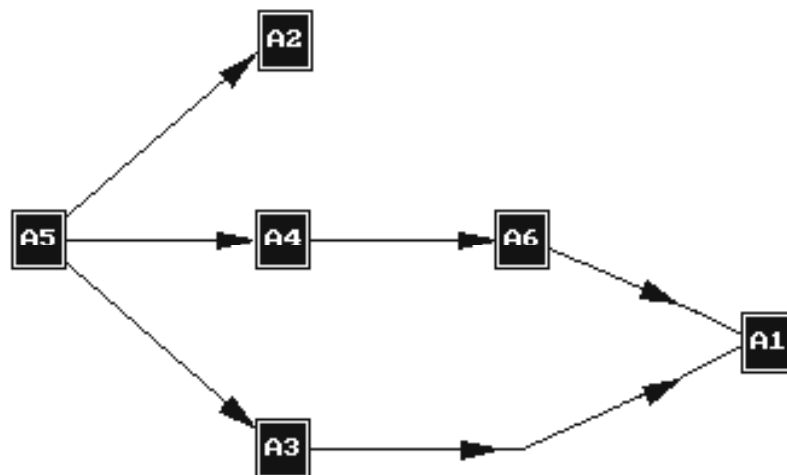
$$\Phi(A) = \Phi^+(A) - \Phi^-(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Ennek segítségével a PROMETHEE II teljes rangsor definíciója:

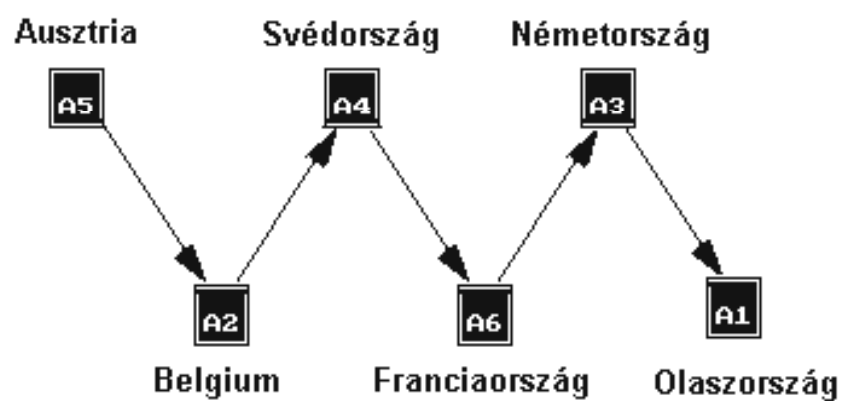
$$\begin{aligned} A_1 P^{II} A_2 &\iff \Phi(A_1) > \Phi(A_2), \\ A_1 I^{II} A_2 &\iff \Phi(A_1) = \Phi(A_2), \\ \forall (A_1, A_2) &\in \mathcal{A} \times \mathcal{A}. \end{aligned}$$

A PROMETHEE módszerek esetén az alternatívák rangsora függ az összes többitől, ezért a rangsorfordulás esete felléphet. Erre példát láthatunk Salminen et al. (1998) cikkében, ahol pont a két leggyengébb alternatíva elhagyása után következik be ez a jelenség.

PROMETHEE I részleges rangsor



PROMETHEE II teljes rangsor



I.3.8. PROMETHEE V: döntés kényszerfeltételek mellett

A PROMETHEE V program modul olyan segédeszköz, amivel megadhatunk kényszerfeltételeket, majd az így kapott döntési feladatokat megoldhatjuk. Ehhez először a kényszerfeltételek típusát kell megadni. A PROMCALC szoftverben ez olyan relációk megadásával lehetséges, amelyek alakja a következő:

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + \dots + c_n z_n \sim K$$

ahol a z_j , $j = 1, \dots, n$, változók értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy a j -edik alternatívát kiválasztjuk-e vagy nem, c_j , $j = 1, \dots, n$, a korlátozó feltételt leíró együtthatók és K egy adott konstans. Természetesen, a $\sim$ szimbólum helyén $=$, $\geq$ vagy $\leq$ is állhat.

A döntési feladat lényegében nem más, mint egy, az alternatívákhoz rendelt hasznossági függvény segítségével minden egyes lehetséges „csomaghoz” (alternatívák egy csoportja) a rá jellemző „jóságot” megadó modell megadása, aminek az optimális megoldása szolgáltatja a legjobb alternatíva csomagot.

A PROMETHEE V programban a fenti döntési feladat felépítése és megoldása a következő két lépésben történik:

1. a megkötések figyelembevétele nélkül kiszámítja a nettó döntési folyamat az alternatívákra és meghatározza a PROMETHEE II rangsort;
2. ezután a következő $0 - 1$ lineáris optimalizálási feladatot oldja meg:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \Phi(A_j) z_j \\ \sum_{j=1}^n c_{rj} z_j & \sim \beta_r, \quad r = 1, \dots, m, \\ z_j & \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

ahol m tetszőleges pozitív egész szám és a cél az alternatíva csomag „jósági” értékének maximalizálása az adott kényszerfeltételek mellett.

I.4. A GAIA vizualizálási módszer

A PROMETHEE módszertanon belül a GAIA (Geometrical Analysis for Interactive Assistance) vizualizálási módszer (Mareschal és Brans, 1988), vagy más szóval a GAIA analízis használatával az elsődleges cél az, hogy a már rendelkezésre álló adatokból újabb információkat nyerjünk matematikai és informatikai eszközök felhasználásával. A GAIA módszertan a statisztikában korábban megjelent mint vizualizálási eszköz, aminek matematikai háttéréről részletesebben lehet olvasni pl. Rapcsák (2004) cikkében.

I.4.1. A nettó döntési folyamat dekompozíciója

Először az alternatívákat és a szempontokat szeretnénk szemléletesebbé tenni a súlyozás figyelembevétele nélkül. Ez hasznos lehet, mivel a szempontok súlyai a döntéshozó szubjektív értékítéletét tükrözik.

Helyettesítsük be a nettó döntési folyamat képletébe a pozitív és a negatív döntési folyamatok képletét, így a következő kifejezéshez jutunk:

$$\begin{aligned}\Phi(A_j) &= \Phi^+(A_j) - \Phi^-(A_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n \left(P(A_j, A_l) - P(A_l, A_j) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=1}^m w_i \left(P_i(A_j, A_l) - P_i(A_l, A_j) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m w_i \sum_{l=1}^n \left(P_i(A_j, A_l) - P_i(A_l, A_j) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \left(\Phi_i^+(A_j) - \Phi_i^-(A_j) \right) = \sum_{i=1}^m w_i \Phi_i(A_j), \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a nettó döntési folyamatok felbonthatók szempontonkénti, súlyozott nettó döntési folyamatok összegére. Vezessük be az $a_{ij} = \Phi_i(A_j)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, jelöléseket. Így a következő döntési táblázathoz jutunk:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n & \\ \mathbf{C}_1 & \boxed{a_{11}} & \cdots & \boxed{a_{1n}} & \mathbf{c}_1^T \\ & \vdots & & \vdots & \\ \mathbf{C}_m & \boxed{a_{m1}} & \cdots & \boxed{a_{mn}} & \mathbf{c}_m^T \\ & \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n & \end{array}$$

ahol az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, m -dimenziós vektorok jelentik az alternatívák reprezentációit, a $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ pedig a szempontokhoz tartozó értékelő vektorokat. A cél a döntési táblázat információinak grafikus megjelenítése, ezért bevezetjük az

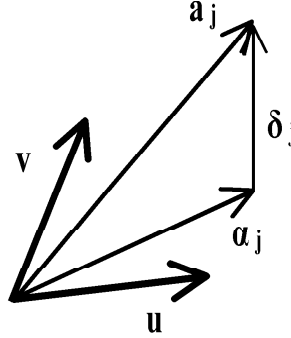
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{a}_j \in R^m, \quad j = 1, \dots, n.$$

döntési mátrixot.

I.4.2. Az alternatívák ábrázolása

Az alternatívák grafikus megjelenítése 2 vagy 3 dimenzióban lehetséges, ezért az alternatívákat reprezentáló m -dimenziós $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, n$, vektorokat az m -dimenziós térben egy 2-dimenziós altérre, azaz síkra kell vetíteni úgy, hogy minél kevesebb információt veszítsünk.

Legyen a keresett két vektor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, a döntési mátrixban szereplő tetszőleges $\mathbf{a}_j$ vektor vetülete $\boldsymbol{\alpha}_j$, és legyen az $\mathbf{a}_j$ és $\boldsymbol{\alpha}_j$ vektorok különbségvektora $\boldsymbol{\delta}_j$, amint az a mellékelt ábrán is látható.



A cél tehát olyan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^m$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = 0$, vektorok meghatározása, hogy az A döntési mátrix $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, n$, vektorai segítségével képzett

$$\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\delta}_j^2$$

függvény értéke minimális legyen, azaz az $\boldsymbol{\alpha}_j$, $j = 1, \dots, n$, vetületek a lehető legkisebb mértékben térjenek el az eredeti $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, n$, vektoroktól.

Bevezetve a $B = AA^T$ jelölést, ahol A az $m \times n$ -es döntési mátrix, és felhasználva az

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \mu_j \mathbf{u} + \eta_j \mathbf{v}, \quad j = 1, \dots, n,$$

vektorok $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok segítségével történő előállítását, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\delta}_j^2 &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_j - \boldsymbol{\alpha}_j)^2 = \sum_{j=1}^n (\mathbf{a}_j^T \mathbf{a}_j - 2\mathbf{a}_j^T \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\alpha}_j^T \boldsymbol{\alpha}_j) = \\ &= \text{tr}(A^T A) - \sum_{j=1}^n \left(2\mu_j (\mathbf{a}_j^T \mathbf{u}) + 2\eta_j (\mathbf{a}_j^T \mathbf{v}) - \mu_j^2 - \eta_j^2 \right) = \\ &= \text{tr}(A^T A) - \sum_{j=1}^n (\mu_j^2 + \eta_j^2), \end{aligned}$$

ahol a tr szimbólum a mögötte álló mátrix diagonális elemeinek az összegét jelenti. Mivel $\mu_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{u}$, $\eta_j = \mathbf{a}_j^T \mathbf{v}$, $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^n (\mu_j^2 + \eta_j^2) = \mathbf{u}^T A A^T \mathbf{u} + \mathbf{v}^T A A^T \mathbf{v},$$

ezzel beláttuk, hogy

$$\min \sum_{j=1}^n \delta_j^2 = \text{tr } B^T - \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^m} (\mathbf{u}^T B \mathbf{u} + \mathbf{v}^T B \mathbf{v}) = \text{tr } B^T - (\lambda_1 + \lambda_2),$$

ahol λ_1 és λ_2 az $(m \times m)$ -es B mátrix két legnagyobb sajátértéke, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az ezekhez tartozó, egységnyi hosszúságú sajátvektorok. Az utolsó egyenlőséget alátámasztják a következő sajátérték egyenletek:

$$B\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}, \quad B\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}.$$

Az eredményből következik, hogy az alternatívákat reprezentáló kétdimenziós vektorok koordinátái a következők:

$$\boldsymbol{\alpha}_j = (\mathbf{a}_j^T \mathbf{u}, \mathbf{a}_j^T \mathbf{v}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Az így kapott 2-dimenziós reprezentációkról elmondható, hogy amikor kicsi a távolság két alternatíva vetülete között, akkor az esetek nagy százalékában az A mátrix megfelelő oszlopai, az alternatívák m -dimenziós reprezentációi is közel vannak egymáshoz, tehát a döntéshozó szempontjából a két alternatíva hasonló.

I.4.3. A szempontok ábrázolása

Az m -dimenziós Euklideszi tér, az R^m egységvektorainak a GAIA síkra való vetítésével kapjuk meg a GAIA síkon a szempont tengelyeket, amiknek a koordinátái:

$$\boldsymbol{\gamma}_i = (u_i, v_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

A szempontok GAIA síkon történő ábrázolásának értelmezéséhez, az alternatívák ábrázolásakor alapvető fontosságúnak bizonyult, optimálisan kiválasztott $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokra vonatkozó alábbi összefüggést használjuk fel:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} \{ \mathbf{u}^T B \mathbf{u} + \mathbf{v}^T B \mathbf{v} \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^m \} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j) u_i u_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j) v_i v_j = \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i \|\boldsymbol{\gamma}_i\|^2 + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^m \sum_{l=1}^m \mathbf{c}_k^T \mathbf{c}_l (\boldsymbol{\gamma}_k^T \boldsymbol{\gamma}_l). \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg a 2-dimenziós $\boldsymbol{\gamma}_i$, $i = 1, \dots, m$, vektorokat, amiknek az iránya és a hossza különböző. A fenti összefüggésből kiindulva világosan látszik a kapcsolat a szempontok jellemzői, illetve az őket reprezentáló tengelyek geometriai sajátosságai között, és így a döntési feladatra vonatkozó lényeges információkat szűrhetünk le.

A döntési feladatban a meghatározó szempontok azokhoz az i indexekhez tartoznak, amelyeknél a $\mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_i$ és a $\|\boldsymbol{\gamma}_i\|^2$ skalár szorzatok értékei nagyok.

Hasonló szempontokról beszélünk akkor, ha a szempont-tengelyek iránya nem tér el jelentősen, azaz ha a $\boldsymbol{\gamma}_k^T \boldsymbol{\gamma}_l$ skalár szorzat értéke pozitív valamilyen (k, l) indexpár esetén.

Független szempontokról beszélünk akkor, ha a $\mathbf{c}_k^T \mathbf{c}_l$ és $\gamma_k^T \gamma_l$ skalár szorzatok értéke közel van a nullához valamilyen (k, l) indexpár esetén. Ez azt jelenti, hogy a GAIA síkon a k és az l szempont-tengelyek közel merőlegesek.

Ellentmondó szempontokról beszélünk akkor, ha a $\mathbf{c}_k^T \mathbf{c}_l$ és $\gamma_k^T \gamma_l$ skalár szorzatok nagy negatív értékeket vesznek fel. Ebben az esetben a k és az l szempont-tengelyek közel ellentétes irányúak a GAIA síkon.

Az előbbiekből látszik, hogy a vizualizálás a GAIA síkon hatékony eszköz a döntési probléma elemzésében. Azonban hangsúlyozni kell, hogy az elemzések elsősorban valós adatokon elvégzett kísérletek eredményein alapulnak, nem pedig elméletileg igazolható állításokon.

A GAIA sík része az alternatívák leírására szolgáló m -dimenziós Euklideszi térnek, ezért az alternatíva vektorok GAIA síkra való vetítésével információt veszítünk. A GAIA síkon rendelkezésre álló és az összes információ aránya

$$\delta = (\lambda_1 + \lambda_2) / \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

ahol λ_1 és λ_2 a B mátrix két legnagyobb sajátértéke, λ_i , $i = 1, \dots, m$, pedig a B mátrix sajátértékei. Érdeemes megjegyezni, hogy a gyakorlati alkalmazásokban a δ értéke mindig meghaladta a 60%-t, és a legtöbb esetben a 80%-t (Brans és Mareschal, 1994).

I.4.4. A súlyrendszer ábrázolása

A PROMETHEE módszerekben a szempontok súlyozásának, ami a döntéshozó szubjektív ítéletétől függ, központi szerepe van. Mivel minden szemponthoz tartozik egy súlyérték, ezért a súlyvektor is eleme az m -dimenziós Euklideszi térnek, amiből következik, hogy hasonlóan az alternatívákhoz, a súlyvektor is levetíthető a GAIA síkra.

Ha a $\mathbf{w}$ súlyvektor vetülete a GAIA síkon rövid, azaz $\mathbf{w}$ közel merőleges a GAIA síkra, akkor a döntéshozónak nincs erős befolyása a döntési feladat megoldására és jó kompromisszumként a megoldást az origó közelében kell keresni. Ha a $\mathbf{w}$ súlyvektor vetülete hosszú a GAIA síkon, akkor a legjobb alternatívát a súlyvektor vetületének az irányában kell keresni.

A döntéshozói súlyrendszer megváltoztatásával vizsgálható a GAIA síkon, hogyan változik a súlyrendszer függvényében a döntési feladat megoldása.

I.4.5. Az alternatívák és szempontok reprezentációinak kapcsolata

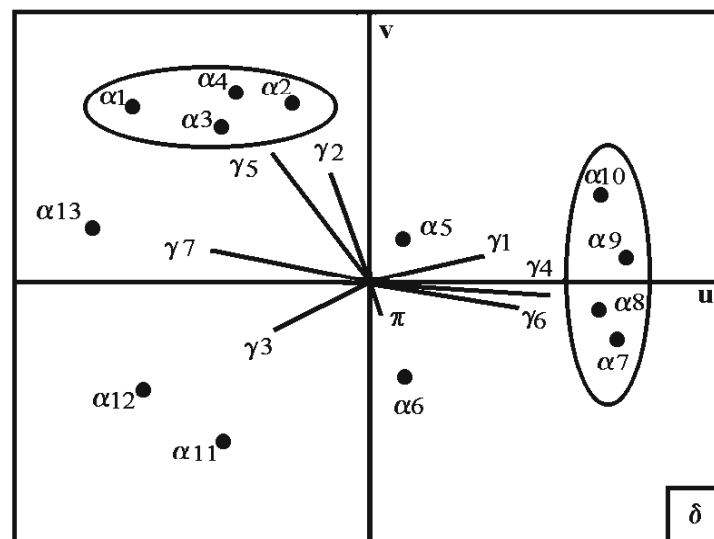
Azzal kezdtük a 2-dimenziós ábrázolás ismertetését, hogy mindegyik m -dimenziós $\mathbf{a}_j$ vektornak tekintettük az α_j vetületét a GAIA síkon, aminek GAIA síkbeli koordinátái $(\mathbf{a}_j^T \mathbf{u}, \mathbf{a}_j^T \mathbf{v})$. Lássuk be, hogy egy alternatíva α_j vetülete, annak a szempont-tengelynek vagy azoknak a szempont-tengelyeknek az irányába esik, amelyekben vagy amelyekben az alternatíva értéke nagy! Ehhez az alábbi összefüggést használjuk fel.

$$\begin{aligned} (\alpha_j^T \gamma_i) &= \mathbf{a}_j^T \mathbf{u} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_i^T \mathbf{u}}_{u_i} + \mathbf{a}_j^T \mathbf{v} \cdot \underbrace{\mathbf{e}_i^T \mathbf{v}}_{v_i} = \left(\sum_{l=1}^m a_{jl} u_l \right) u_i + \left(\sum_{l=1}^m a_{jl} v_l \right) v_i = \\ &= \sum_{l=1}^m a_{jl} u_l u_i + \sum_{l=1}^m a_{jl} v_l v_i = \sum_{l=1}^m a_{jl} (u_l u_i + v_l v_i) = \sum_{l=1}^m a_{jl} (\gamma_l^T \gamma_i). \end{aligned}$$

A levezetés végén álló összeget növelik azok a tagok, amelyekben a γ_i -vel nagyjából párhuzamos γ_l -ben mutat jó értéket az A_j alternatíva, vagyis mind a skalárszorzat, mind pedig a_{lj} nagy pozitív értékű, vagy amelyekben γ_i -vel ellenkező irányú γ_l -ben mutat rossz értéket az A_j alternatívára, vagyis mind a skalárszorzat, mind pedig a_{lj} nagy negatív értékű.

Az összeget csökkentik azok a tagok, amelyekben γ_i -vel nagyjából párhuzamos γ_l -ben mutat rossz értéket A_j , vagy amelyekben a γ_i -vel ellenkező irányú γ_l -ben mutat jó értéket A_j , azaz a skalárszorzat és a_{lj} ellenkező előjelű. Látszik, hogy a független szempontokat reprezentáló tengelyek vizsgálata nem nagyon befolyásolja az eredményt, mivel ilyenkor a skalárszorzat 0 körüli értéket vesz fel.

Ezek után nézzünk meg egy példát!



Példa a GAIA síkban való ábrázolásra

A hasonló értékeléssel rendelkező alternatívák két csoportja be van karikázva. Jól látszik, hogy az 1-4 alternatívák csoportja inkább a 2,5 és a 7 szempontok szerint, míg a 7-10 alternatívák az 1,4 és a 6 szempontok szerint jók. Jól látható az is, hogy például az első szempont kizárólagos figyelembevételével a 9. vagy a 10. alternatíva lenne a legjobb, és a 12. a legrosszabb választás.

Az ábrából az is kiderül, hogy több ellentmondó szempont van, valamint a PROMETHEE súlytengely rövid, így a megoldást az origó körül kell keresni. A fenti ábrán a 6. alternatíva tűnik a legjobb választásnak. A PROMETHEE II szerinti megoldást a súlytengely irányában a legmesszebb eső alternatíva adja. Az eredményt a súlyozás megváltozása nagymértékben befolyásolhatja, ami a döntéshozó szerepét is megvilágítja.

Röviden összefoglalva:

A GAIA sík elemei:

pontok, amik az alternatívákat jelölik;

tengelyek, amik a szempontok ábrázolását jelentik;

súlytengely, ami a döntéshozó szubjektív ítéletét fejezi ki.

A GAIA síkról és elemeiről a következő információkat olvashatjuk le:

azon szempontokat, amik együttesen kielégíthetők az adott alternatívákban, megközelítőleg azonos irányú tengelyek reprezentálják;

azon szempontokat, amik függetlennek bizonyultak az adott alternatívákban, hozzávetőleg egymásra merőleges tengelyek reprezentálják;

azon szempontokat, amik az adott lehetőségek között együttesen kielégíthetetlennek bizonyultak, egymással ellentétes irányú tengelyek ábrázolják;

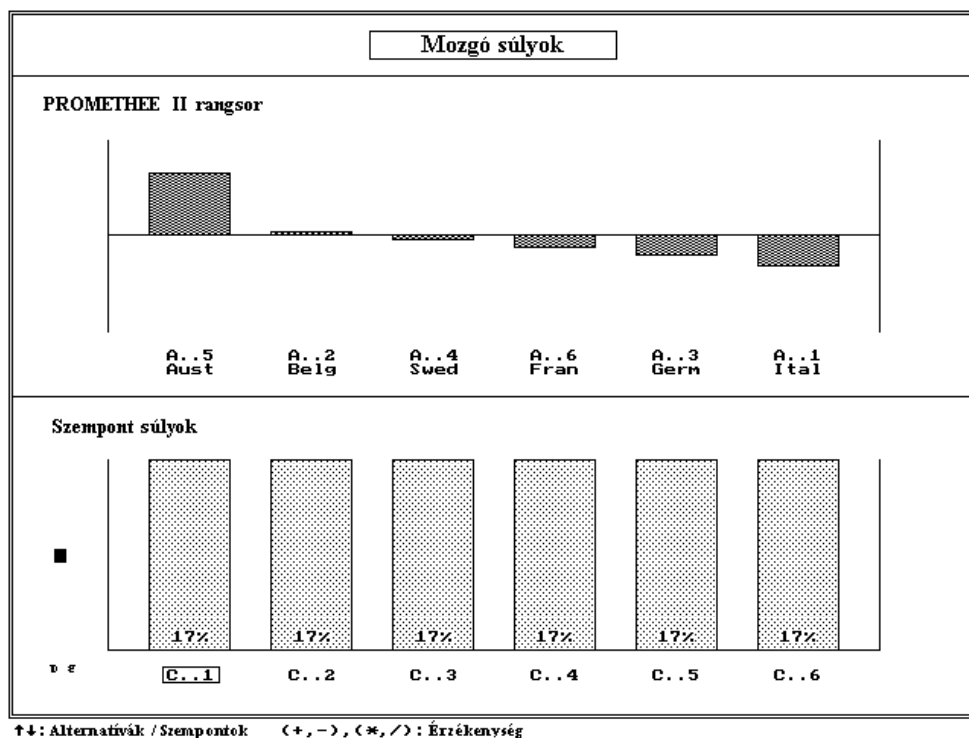
minél hosszabb egy szempont-tengely, annál nagyobb a szempont alternatívákat megkülönböztető ereje;

adott szempont-tengellyel nagyjából egy irányba eső alternatíva-pontok az adott szempontból bizonyulnak a legjobb választásnak, míg az ellenkező irányba eső pontok az adott szempont szerint legrosszabb döntést mutatják.

I.4.6. GAIA érzékenységvizsgálat

A GAIA érzékenységvizsgálat a döntéshozói súlyozás elemzését jelenti, ugyanis a döntéshozónak lehetősége van megtekinteni és módosítani a százalékos alakban megadott és oszlopdiagrammal ábrázolt súlyokat a „Mozgó súlyok” (The walking weights) menüpontban.

Az I.4.1. ábrán látható, hogy két oszlopdiagramon vizsgálható a súlyozás, illetve annak a feladat megoldására gyakorolt hatása. A felső ablakban az alternatívákhoz rendelt PROMETHEE II. rangsort megadó értékeket láthatjuk diagram formájában, csökkenő sorrendben. Az alsó ablakban találhatók az egyes szempontok súlyai százalékos alakban, természetesen úgy, hogy az összes szempont súlyok összege 100% legyen. Megjegyezzük, hogy a mozgó súlyok menüpontban csak egy szempont súlyát változtathatjuk meg.



I.4.1. ábra

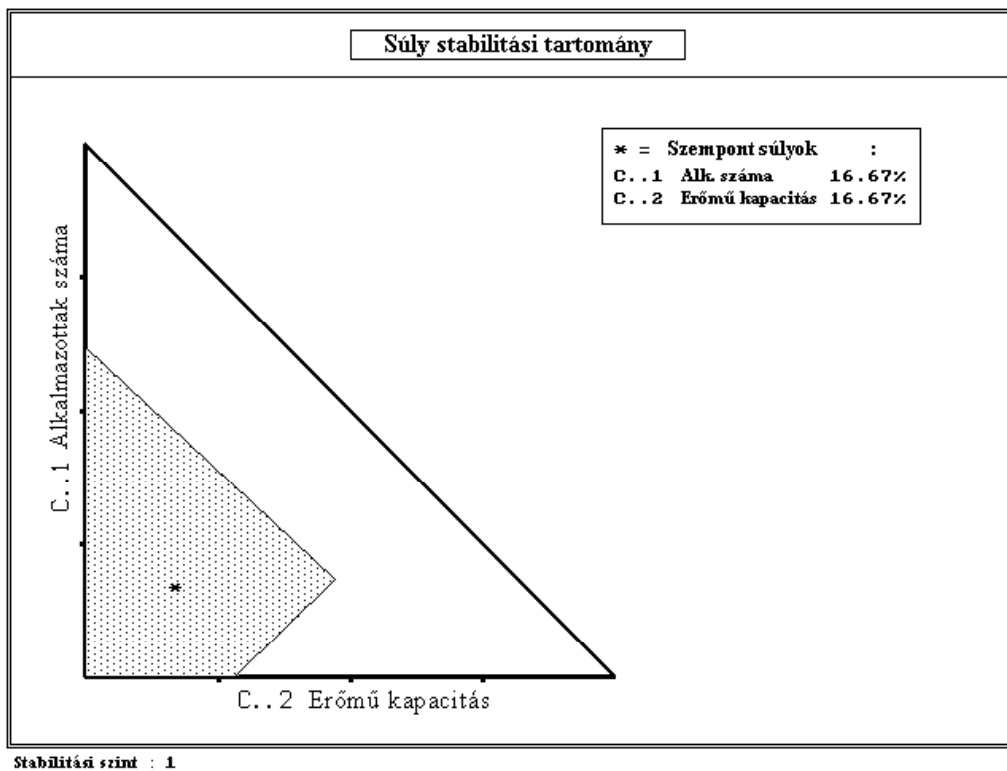
A föl-le kurzorgombokkal változtathatjuk, hogy az alternatívák vagy a szempontok ablaka legyen aktív. A jobbra-balra kurzorgombokkal lépkedhetünk a szempontok között, vagy görgethetjük az alternatívák ablakát, attól függően, hogy éppen melyik ablak aktív. A + és - gombok segítségével tudjuk növelni vagy csökkenteni a kiválasztott szempont súlyát egy százalékkal. Az érzékenységvizsgálat dinamikus, ezért a változtatás a többi szempont súlyára, valamint az alternatívák PROMETHEE II rangsorára gyakorolt hatása azonnal látható.

A GAIA érzékenységvizsgálat során meghatározhatók a stabilitási intervallumok, amiken belül változtatva az egyes szempontokhoz rendelt súlyokat, az alternatívák sorrendje nem változik, azaz a sorrend stabil. A mintapéldához tartozó eredmények a I.4.1. Táblázatban láthatók. A táblázat első oszlopa a szempontokat, a második a döntéshozói súlyokat, valamint az ezekhez tartozó stabilitási intervallumokat tartalmazza, a harmadik pedig ugyanezeket az információkat százalékos alakban. Ebben az esetben is csak egy súly változásának a függvényében vizsgáljuk a rangsort.

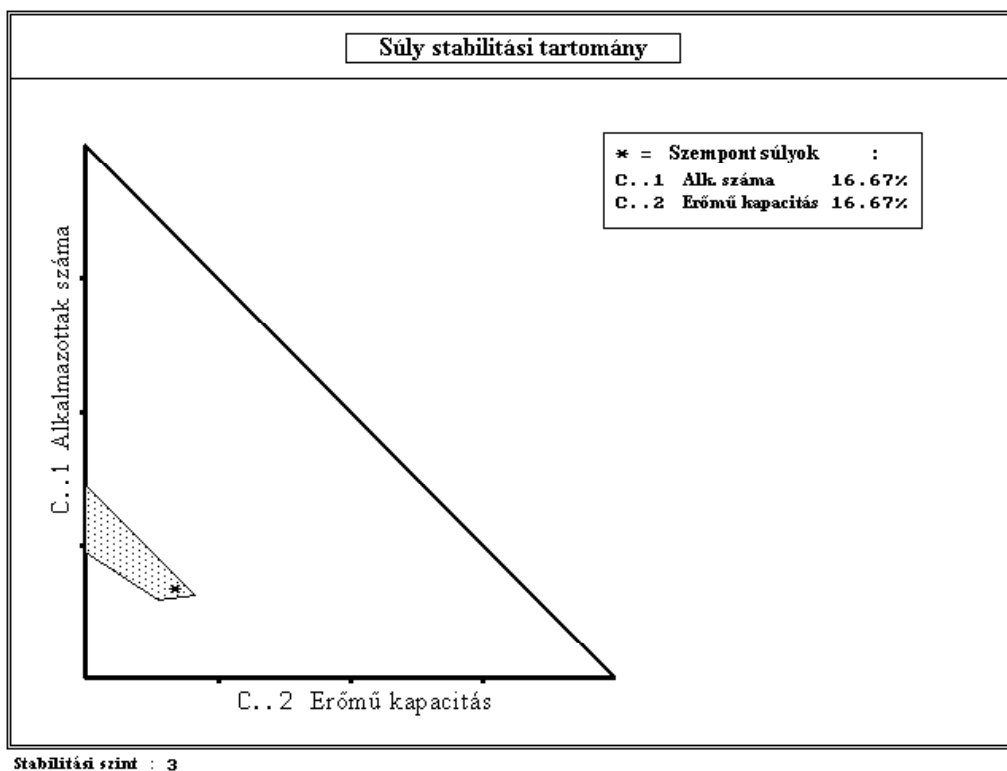
Súly stabilitási intervallum				
Szempont	Súly	Intervallum	%	% Intervallum
C..1: Alk. száma	1.00	[0.90, 1.28]	16.67	[15.19, 20.37]
C..2: Kapacitás	1.00	[0.84, 1.27]	16.67	[14.40, 20.31]
C..3: Építési költ.	1.00	[0.86, 1.33]	16.67	[14.68, 21.06]
C..4: Karbantart. költ.	1.00	[0.65, 1.35]	16.67	[11.56, 21.24]
C..5: Falvak száma	1.00	[0.86, 1.52]	16.67	[14.68, 23.31]
C..6: Biztonság	1.00	[0.37, 1.26]	16.67	[6.94, 20.10]

I.4.1. Táblázat

Az érzékenységvizsgálat során két szempont súly együttes változtatásának a hatása a stabilitási súlytartományok kialakításakor jelentkezik. A stabilitási vizsgálatok során a stabilitási szint, ami azt mutatja meg, hogy hány alternatíva sorrendje maradjon változatlan, kiválasztható. Az I.4.2. ábrán az alkalmazottak száma és az erőmű kapacitása szempontokhoz tartozó, a legjobb alternatívát változatlanul hagyó stabilitási tartomány, az I.4.3. ábrán pedig az első három alternatívát változatlanul hagyó stabilitási tartomány látható.



I.4.2. ábra



I.4.3. ábra

Irodalomjegyzék

- [1] Brans, J.P., L'ingénierie de la décision, Élaboration d'instruments d'aide à la décision. Méthode PROMETHEE, Université Laval, *Colloque d'Aide à la Décision Québec Canada* (1982) 183-213.
- [2] Brans, J.P. and Vincke, Ph., A preference ranking organisation method (the PROMETHEE method for multiple criteria decision making), *Management Science* 31 (1985) 647-656.
- [3] Brans, J.P., Vincke, Ph. and Mareschal, B., How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method, *European Journal of Operational Research* 24 (1986) 228-238.
- [4] Brans, J.P. and Mareschal, B., The PROMCALC & GAIA decision support systems for multicriteria decision aid, *Vrije Universiteit Brussel, CSOTW/254*, 1991.
- [5] Brans, J.P. and Mareschal, B., PROMETHEE V: MCDM problems with segmentation constraints, *INFOR, Canadian Journal of OR*, 30 (1992) 85-96.
- [6] Brans, J.P. and Mareschal, B., The PROMCALC and GAIA, *Decision Support Systems* 12 (1994) 297-310.
- [7] Brans, J.P., The space of freedom of the decision maker or modelling the human brain, *EURO GOLD MEDAL Lecture, Glasgow-EURO XIII.*, 1994.
- [8] Dancs, I., Preferencia relációk. *Kézirat*, 1996.
- [9] Mareschal, B. and Brans, J.P., Geometrical representation for MCDM, the GAIA procedure, *European Journal of Operational Research* 34 (1988) 69-77.
- [10] Rapcsák, T., Some optimization problems in multivariate statistics, *Journal of Global Optimization* 28 (2004) 217-228.
- [11] Salminen, P., Hokkanen, I. and Lahdelma, R., Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems, *European Journal of Operational Research* 104 (1998) 485-496.
- [12] Temesi, I., A döntéselmélet alapjai, *AULA*, Budapest, 2002.
- [13] Vincke, P., Multicriteria decision-aid, *John Wiley & Sons*, 1992.

I.5. Egyszerű és abszolút többségi szavazás

2 jelölt (alternatíva) és l választó esetén a következő döntések lehetségesek:

A_1 jobb, mint A_2 :	+1;
A_2 jobb, mint A_1 :	-1;
A_1 ugyanolyan jó, mint A_2 :	0.

Csak ezeket a lehetőségeket vizsgáljuk, nem lehet azt mondani pl., hogy az A_1 jelölt kétszer jobb, mint A_2 ; vagy A_2 helyett legyen A_3 .

Mivel az információk egyszerűek, könnyen leírhatók.

Példa. Legyen $l = 5$ és nézzük egy szavazás lehetséges eredményét!

	$A_1 R A_2$
$D1$	+1
$D2$	-1
$D3$	+1
$D4$	0
$D5$	-1

A szavazás eredménye egy számötös, ami 0, 1 vagy -1 értékekből áll. Esetünkben $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (+1, -1, +1, 0, -1)$, így látható, hogy összesen $3^5 = 243$ értékelesi lehetőség áll rendelkezésre.

Társadalmi választási szabály

Egy f függvényt kiértékelő függvénynek, vagy társadalmi választási szabálynak nevezünk, ha adott eredménylistához hozzárendeli azt, hogy A_1 nyert, vagy A_2 nyert, vagy se A_1 , se A_2 nem nyert.

A társadalmi választási szabály képlete 2 jelölt és l választó esetén:

$$f(\mathbf{a}) = \begin{cases} +1, & \text{ha } A_1 \text{ nyert;} \\ -1, & \text{ha } A_2 \text{ nyert;} \\ 0 & \text{ha nincs döntés,} \end{cases} \quad \mathbf{a} \in \{1, -1, 0\}^l. \quad (\text{I.5.1})$$

Néhány példa ilyen típusú függvényre:

Egyszerű többségi szavazás

$$f(\mathbf{a}) = \begin{cases} +1, & \text{ha } \sum_{i=1}^l a_i > 0; \\ -1, & \text{ha } \sum_{i=1}^l a_i < 0; \\ 0, & \text{ha } \sum_{i=1}^l a_i = 0. \end{cases} = \operatorname{sgn} \left(\sum_{i=1}^l a_i \right), \quad \mathbf{a} \in \{1, -1, 0\}^l. \quad (\text{I.5.2})$$

Abszolút többségi szavazás

$$f(\mathbf{a}) = \begin{cases} +1, & \text{ha } \left(\sum_{i=1}^l a_i\right)_+ > l/2; \\ -1, & \text{ha } \left(\sum_{i=1}^l a_i\right)_- > l/2; \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \quad \mathbf{a} \in \{1, -1, 0\}^l. \quad (\text{I.5.3})$$

Példa.

egyszerű többségi szavazás:

$\mathbf{a} = (+1, +1, +1, 0, 0, -1, -1) \longrightarrow f(\mathbf{a}) = 3 - 2 = 1$, tehát A_1 nyert;

abszolút többségi szavazás:

$\mathbf{a} = (+1, +1, +1, 0, 0, -1, -1) \longrightarrow f(\mathbf{a}) = 0$, $(3 < 3, 5$ és $2 < 3, 5)$, tehát nincs döntés.

Az egyszerű és az abszolút többségi szavazásnál az indifferens esetek értékelése megegyezik, ellentétes értékelésre pedig nincs példa.

I.5.1. Az egyszerű és abszolút többségi szavazás jellemzése

Az alábbiakban elsőnek tárgyalt karakterizáló tulajdonságok szükséges és elegendő feltételek arra nézve, hogy egy társadalmi választás egyszerű többségi szavazás legyen. Ez Kenneth O. May (1952) eredménye.

Legyen adott egy f társadalmi választási szabály az (I.5.1.) képlettel, ahol $\mathbf{a}$ egy l elemű lista. Az értelmezési tartomány mindazon l elemű listák halmaza, amikhez az f egyértelműen hozzárendel $+1, -1$ vagy 0 értéket.

1. Univerzális értelmezési tartomány (universal domain)

Az univerzális értelmezési tartomány tulajdonság teljesül, ha az értelmezési tartomány minden $\mathbf{a}$ $+1, -1$ vagy 0 számokból álló, l hosszúságú listája egyformán lehetséges.

Az egyszerű és a többségi szavazás is teljesíti ezt a tulajdonságot.

Ez a feltétel azt biztosítja, hogy a jelöltek között ne tehessünk különbséget.

2. Névtelenség (anonymity)

Egy f társadalmi választási szabály akkor teljesíti a névtelenség tulajdonságot, ha a kiértékelés nem változik meg a lehetséges listákban bekövetkező, de a $+1, -1$ és 0 értékek számát nem érintő, változások esetén.

Példa. Tekintsük a következő két listát:

$$\begin{aligned} & (+1, +1, +1, 0, 0, -1, -1), \\ & (-1, 0, +1, +1, 0, -1, +1), \end{aligned}$$

ahol $a + 1, -1$ és 0 értékek száma mindkét listában $(3, 2, 2)$, ami azt jelenti, hogy az egyik lista a másiknak egyszerű átrendezése.

A névtelenség tehát azt jelenti, hogy az $f(\mathbf{a})$ társadalmi választási szabály az $\mathbf{a}$ vektor komponenseinek permutációira nézve invariáns. Az egyszerű és az abszolút többségi szavazás is teljesíti ezt a tulajdonságot.

Ez a feltétel azt biztosítja, hogy a választók között nem teszünk különbséget.

3. Semlegesség (neutrality)

Egy f társadalmi választási szabályt semlegesnek nevezünk, ha abból, hogy az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l)$ és $-\mathbf{a} = (-a_1, \dots, -a_l)$ listák benne vannak az értelmezési tartományban következik, hogy

$$f(-\mathbf{a}) = f(-a_1, \dots, -a_l) = -f(a_1, \dots, a_l) = -f(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \{1, -1, 0\}^l, \quad (\text{I.5.4})$$

azaz, ha minden döntéshozó megváltoztatja a preferenciáját A_1 és A_2 között, akkor az eredmény az ellenkezőjére változik.

Ez a három feltétel általános, és a társadalmi választási szabályokra természetesen adódik.

4. Pozitív fogékonyság (positive responsiveness)

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_l)$ és $\mathbf{a}' = (a'_1, \dots, a'_l)$ két lista. Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}'$ i -variálható, ha $\forall j \neq i, a_j = a'_j$. Tehát, két i -variálható lista legfeljebb az i -edik elemében különbözik.

Például:

$$(+1, +1, +1, 0, 0, -1, -1) \quad \text{és} \quad (+1, +1, +1, 0, 0, 0, -1)$$

6-variálható, mivel a listák a 6-ik elemében különböznek.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}'$ listák i -variálhatóak és $a'_i > a_i$. Ennek a tulajdonságnak a megléte biztos, hogy nem ront a helyzeten, de nem is biztos, hogy javít.

I.5.1.1. Definíció. Egy f társadalmi választási szabály pozitívan fogékonyság, ha $\forall i$ esetén, amikor az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ listák i -variálhatóak és $a'_i > a_i$, akkor az $f(\mathbf{a}) \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $f(\mathbf{a}') = +1$.

A pozitív fogékonyság az egyszerű többségi szavazásra teljesül, de az abszolút többségi szavazásra nem.

Ezt a feltételt szukcesszíven lehet alkalmazni, többször egymás után. A feltétel aszimmetrikus, mivel csak az egyik irányban vizsgálja a növekedést. Ha azonban kombináljuk a semlegességgel, akkor szimmetritást kapunk.

I.5.1.1. Példa. Legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (0, +1, -1, 0, 0, +1, -1), \quad \text{ahol } f(\mathbf{a}) = 0 \quad \text{és} \\ \mathbf{a}' &= (0, 0, -1, 0, 0, +1, -1), \quad \text{ami 2-variálható lista.} \end{aligned}$$

Szeretnénk megmutatni, hogy az új listában $f(\mathbf{a}') = -1$, így A_2 nyer. Mivel

$$-\mathbf{a} = (0, -1, +1, 0, 0, -1, +1),$$

a semlegesség miatt

$$f(-\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a}) = 0.$$

Tekintsük az $\mathbf{a}^* = (0, 0, +1, 0, 0, -1, +1)$ listát. A pozitív fogékonyság miatt $f(\mathbf{a}^*) = +1$. Mivel $\mathbf{a}^* = -\mathbf{a}'$, a semlegesség újabb alkalmazásával

$$f(\mathbf{a}') = -f(-\mathbf{a}') = -f(\mathbf{a}^*) = -1,$$

ami az állítást bizonyítja.

Állítás. Ha egy f társadalmi választási szabály teljesíti az általános értelmezési tartomány, pozitív fogékonyság és semlegesség tulajdonságokat, akkor

$$f(+1, +1, \dots, +1) = +1 \quad \text{és} \quad f(-1, -1, \dots, -1) = -1.$$

Az egyszerű többségi szavazás mind a négy feltételt teljesíti.

May tétel (1952). Ha egy f társadalmi választási szabály teljesíti az

- a) általános értelmezési tartomány (a jelöltek között nem tesz különbséget),
- b) névtelenség (a választók között nem tesz különbséget),
- c) semlegesség,
- d) pozitív fogékonyság

tulajdonságokat, akkor f egyszerű többségi szavazás.

A May tétel feltételei függetlenek (Fishburn, 1973).

I.5.1.2. Definíció. Egy f társadalmi választási szabály akkor teljesíti a szigorú visszafordíthatatlanság (strong nonreversibility) tulajdonságot, ha

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a},$$

kivéve egy i indexet, amire

$$a'_i = 0 \quad \text{és} \quad a_i = 1,$$

esetén az

$$f(\mathbf{a}) \geq 0$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$f(\mathbf{a}') \geq 0.$$

I.5.1.1. Tétel. Egy társadalmi választási szabály abszolút többségi szavazás, ha az általános értelmezési tartomány, névtelenség, semlegesség és szigorú visszafordíthatatlanság tulajdonságok teljesülnek.

Be lehet bizonyítani, hogy az abszolút többségi szavazás teljesíti a következő két monotonitási feltételt:

1. Ha $\mathbf{a}'$ egy i -variálható listája $\mathbf{a}$ -nak és $a'_i \geq a_i$, akkor $f(\mathbf{a}') \geq f(\mathbf{a})$.
2. Ha $\mathbf{a}$ -ban nincs 0 komponens és $\mathbf{a}'$ az $\mathbf{a}$ listából nyerhető úgy, hogy valamilyen $a_i = -1$ helyett $a'_i = +1$ -et tekintünk, akkor az $f(\mathbf{a}) \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $f(\mathbf{a}') = +1$.

May bizonyítása

- 1.) $f(\mathbf{a})$ csak az $N_{+1}(\mathbf{a}) = \left(\sum_{i=1}^l a_i \right)_+$ és az $N_{-1}(\mathbf{a}) = \left(\sum_{i=1}^l a_i \right)_-$ értékektől függ a névtelenség miatt;
- 2.) $f(\mathbf{a}) = 0$, ha $N_{+1}(\mathbf{a}) = N_{-1}(\mathbf{a})$, és $f(\mathbf{a}) = f(-\mathbf{a}) = d \longrightarrow d = 0$;
- 3.) $f(\mathbf{a}) = +1$, ha $N_{+1}(\mathbf{a}) \geq N_{-1}(\mathbf{a})$, $(N_{+1}(\mathbf{a}) = N_{-1}(\mathbf{a}) + 1)$.

I.5.2. Szavazási paradoxon

Az egyszerű többségi szavazás jellemzése 2 jelölt esetére történt meg. Nagyon sokszor azonban nemcsak 2 alternatíva van, hanem több $A_1, A_2, \dots, A_n$ lehetséges. Ezekben az esetekben nincs kizárólagos út az egyszerű többségi szavazás kiterjesztésére.

Több változat létezik, amikből egyet vizsgálunk, mégpedig azt, amikor minden lehetséges párt összehasonlítunk az alternatívák közül. Ha $n = 3$, akkor az A_1, A_2, A_3 alternatívákból képzett párok

$$\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}.$$

Ezután az egyszerű többségi szavazási szabályt alkalmazzuk.

I.5.2.1. Definíció. Egy alternatíva Condorcet győztes, ha minden páros összehasonlításban nyer, vagy nem eldönthető eredmény születik.

Például: ha $\{A_1, A_2\}$ nem eldönthető és A_1 nyer A_3 , A_2 nyer A_3 ellen, akkor A_1 és A_2 Condorcet győztesek.

Egy módszer lehet **Condorcet győztes kiválasztása**. (Marquis de Condorcet írta az első jelentős munkát a társadalmi választásokról 1785-ben Párizsban.)

Egy másik lehetőség: nem kell minden lehetséges páros összehasonlítást elvégezni. Választunk egy tetszőleges alternatíva sorrendet, majd először az első két alternatívát vizsgáljuk, ezután a győztest a harmadikkal, majd a győztest a negyedikkel hasonlítjuk össze, és így tovább, amíg minden alternatíva sorra kerül. Akkor van értelme az eljárásnak, ha minden páros összehasonlításban van győztes, egyenlőség esetében pl. a kisebb sorszámú.

A Condorcet győztest kiválasztó módszer a többi módszertől eltérő eredményt adhat. A legnagyobb probléma a Condorcet győztes választási szabállyal az, hogy nem mindig alkalmazható, mivel nem mindig létezik Condorcet győztes jelölt.

Például: $\{A_1, A_2\}$ esetén A_1 nyer; $\{A_2, A_3\}$ esetén A_2 nyer; $\{A_3, A_1\}$ esetén A_3 nyer. Ebben az esetben nincs Condorcet győztes, ami szavazási paradoxon.

Nézzük meg most azt az esetet, amikor a szavazók egyénileg már rangsorolták a jelölteket, és ezekből a sorrendekből kell csoportssorrendet képezni. Condorcet kortársa volt **Borda**, akinek az eljárásában a legutolsó helyezett mindenkitől 0 pontot kap, az utolsó előtti 1-et és így tovább: az első helyezett $n - 1$ pontot kap, majd a helyezési pontokat összeadva kapjuk meg a végső sorrendet (Borda, 1781; Temesi, 2002).

Felvetődik a kérdés, hogy több döntéshozó esetén lehet-e az egyéni preferenciákat csoport preferenciákká aggregálni. **Arrow** híres lehetetlenségi tétele azt mutatja meg, hogy legalább három alternatíva esetén, természetes feltételek mellett, nem létezik ilyen aggregálási szabály (Arrow, 1951; Temesi, 2002).

I.5.3. Szavazási módszerek

Tegyük fel, hogy minden szavazó már rangsorolta a jelölteket és a kérdés az, hogyan lehet az egyéni rangsorokból csoport rangsort készíteni.

Condorcet híres példájában (lásd pl. Temesi, 2002) egy 60 fős döntéshozói testület a három jelölt közül akarja kiválasztani a legalkalmasabbat valamilyen posztra. Az A, B és C jelöltekre vonatkozó preferencia sorrendek a következők:

$A\mathcal{P}C\mathcal{P}B$	23	döntéshozó;
$B\mathcal{P}C\mathcal{P}A$	19	döntéshozó;
$C\mathcal{P}B\mathcal{P}A$	16	döntéshozó;
$C\mathcal{P}A\mathcal{P}B$	2	döntéshozó.

Az első szavazási módszert, az egyszerű többségi szavazást alkalmazva minden döntéshozónak egy szavazata van, amit az általa legjobbnak tartott jelöltre ad le. A szavazatok összeszámlálása után a következő sorrend alakul ki:

A:	23 pont;
B:	19 pont;
C:	18 pont.

Így, az egyszerű többségi szavazás szerint az A jelölt nyeri el a pozíciót.

Ha az abszolút többségi szavazás alapján szeretnénk dönteni, akkor több lépésre van szükség, például úgy, hogy mindig kiejtjük az utolsó helyezettet. Példánkban, a harmadik helyezett, C kiejtése után, a B jelölt nyer 35 szavazattal az A ellenében, aki csak 25 szavazatot kapott.

Mondhatjuk azt, hogy ezek a módszerek nem használták ki eléggé a rendelkezésre álló információkat és ezért olyan szavazási módszert választunk, ahol minden jelölt megküzd minden jelölttel, azaz a döntéshozók páros összehasonlításokat végeznek a jelöltek között.

A páros összehasonlítások végeredménye:

$A\mathcal{P}B$: 25	$A\mathcal{P}C$: 23	$B\mathcal{P}C$: 19
$B\mathcal{P}A$: 35	$C\mathcal{P}A$: 37	$C\mathcal{P}B$: 41

azaz $CPBPA$, így a C jelölt nyeri el a pozíciót.

Melyik a helyes végeredmény? Jelenlegi ismereteink szerint bármelyik szavazási eljárást választhatjuk.

Páros összehasonlítást alkalmazva az alábbi problémába ütközhetünk. Változtassuk meg kissé a preferenciaprofilokat az előbbi példában!

Ha

$APBPC$	23	döntéshozó;
$BPCPA$	17	döntéshozó;
$BPAPC$	2	döntéshozó;
$CPAPB$	10	döntéshozó;
$CPBPA$	8	döntéshozó,

akkor a páros összehasonlítások végeredménye:

$APB : 33$	$APC : 25$	$BPC : 42$
$BPA : 27$	$CPA : 35$	$CPB : 18$

azaz APB , BPC , CPA és nem tudunk a jelöltek közül választani, mivel a végeredmény nem tranzitív.

Condorcet a maximin elvet alkalmazta. Tekintsük azt a táblázatot, ahol a jelöltek a páros összehasonlításokból származó eredményükkel szerepelnek:

	A	B	C	min
A	-	33	25	25
B	27	-	42	27
C	35	18	-	18

A maximin elv szerint azt tekintjük győztesnek, akinek a legrosszabb eredménye a legjobb, így a B jelölt nyeri el a pozíciót.

Condorcet kortársa volt Borda, akinek a módszerében a legutolsó helyezett mindenkitől 0 pontot kap, az utolsó előtti 1-et és így tovább: az első helyezett $n - 1$ pontot kap. A helyezési pontokat összeadva kapjuk meg a végső sorrendet.

Condorcet példájában:

A:	48 pont;
B:	54 pont;
C:	78 pont,

tehát a sorrend $CPBPA$.

A Borda módszert eliminálással elvégezve, azaz a legutolsó helyezettet törölve, és újra elvégezve az eljárást, azt kapjuk, hogy C a legjobb jelölt.

Irodalomjegyzék

- [1] Arrow, K.J., Social choice and individual values, *Wiley*, New York, 1951.
- [2] Borda, J.-C., Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1781.
- [3] Condorcet, M., Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix, *Paris*, 1785.
- [4] Fishburn, P., The theory of social choice, *Princeton University Press*, 1973.
- [5] Kelly, I.S, Social choice theory, *Springer-Verlag*, 1988.
- [6] May, K.O., A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision, *Econometrica* 20 (1952) 680-684.
- [7] Temesi, J., A döntéelmélet alapjai, *AULA*, Budapest, 2002.

I.6. Egyéni döntési modellek

A többszemponútú döntési feladat egy döntéshozó esetén a következő: véges számú alternatívát véges számú szempont figyelembevételével rangsorba kell rendezni. A többszemponútú döntési feladat felépítésének lépései: a szempontok meghatározása, az alternatívák megadása, és a döntéshozó kiválasztása. A többszemponútú döntési feladat megoldásának fő lépései: a szempontok súlyozása, az alternatívák szempontok szerinti értékelése és a súlyok, valamint az értékelések összegzése.

Az egyéni döntési modellek felépítésének kérdéseivel itt nem foglalkozunk. A szempontok súlyozására elfogadott módszertan a közvetlen súlyozás és a páros összehasonlítás. Az alternatívák szempontok szerinti értékelésére használatos módszerek a páros összehasonlítás (pl. AHP módszertan), általánosított szempont függvények (pl. PROMETHEE módszertan) és a döntési feladathoz illeszkedő értékelő, vagy más szóval, hasznossági függvények. A súlyok és az értékelések összegzésére széleskörűen alkalmazzák a súlyozott számtani közepet.

Ebben a részben először megismerkedünk azzal, hogyan lehet egy adott döntési táblázat esetén döntési elveket választani többszemponútú döntési feladatok megoldására. Erre a feladattípusra hatékony érzékenységvizsgálati módszert dolgoztunk ki.

I.6.1. Döntési elv választása adott döntési táblázat esetén

Nézzük meg, hogyan történik a döntési elv választása egy, az I.6.1. Táblázatban megadott döntési probléma esetén:

$$D : \begin{matrix} & & & \mathbf{A}_1 & . & . & \mathbf{A}_n \\ & w_1 & \mathbf{C}_1 & \left[\begin{matrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{matrix} \right] \\ & . & . & & & & \\ & . & . & & & & \\ & w_m & \mathbf{C}_m & & & & \end{matrix},$$

I.6.1. Táblázat

ahol $a_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

A megoldandó döntési probléma az alternatívák kiértékelése a megadott szempontok szerint és olyan n -dimenziós vektor meghatározása, ami „jól illeszkedik” a szempontok szerinti értékelésekhez, valamint a szempontokhoz tartozó súlyokhoz.

Disztributív AHP modell esetén az aggregáló képlet a következő:

$$x_j^D = \sum_{i=1}^m \left(\frac{w_i}{w} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_{ik}} \right) a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.1.1})$$

ahol $w = \sum_{i=1}^m w_i$. Így súlyozott számtani közepet kapunk $\frac{w_i}{w} \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_{ik}}$, $i = 1, \dots, m$, súlyok-

kal. Ez a modell jól alkalmazható rangsor megállapítására, erőforrás szétosztására és névleges értékeket tartalmazó döntési problémák esetén.

Az ideális AHP modellek esetén az összegző képlet a következő:

$$x_j^I = \sum_{i=1}^m \left(\frac{w_i}{w \max_k a_{ik}} \right) a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.1.2})$$

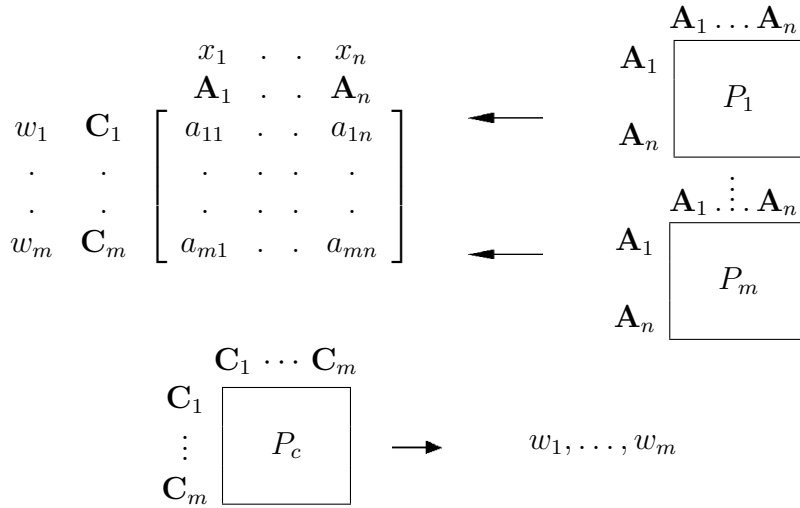
ami szintén súlyozott számtani közép. Ez a modelltípus alkalmazható a legjobb alternatíva kiválasztására nagyon hasonló értékelések mellett.

A minősítő AHP modellek esetén

$$x_j^R = \sum_{i=1}^m \left(\frac{w_i}{w a_i^*} \right) a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.1.3})$$

ahol $a_i^* = 1, \dots, m$, a feladattól függetlenül megadott optimális értékek. Nagyszámú alternatíva esetén javasolt ez a modelltípus.

Megjegyezzük, hogy az AHP módszertanban a súlyok és az értékelések is páros összehasonlítás mátrixokból lettek előállítva. Ez az alábbi ábrán szemléltethető:



I.6.1. ábra

A döntési probléma az alternatívák kiértékelése a megadott szempontok szerint és olyan pozitív ortánsbeli vektor meghatározása a szempontok és a hozzájuk tartozó súlyok figyelembevételével, amely „jól illeszkedik” az I.6.1. Táblázat soraihoz. A döntési elvek meghatározásához tekintsük tehát az alábbi döntési táblázatot:

$$\begin{matrix} & x_1 & \dots & x_n \\ & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_n \\ w_1 & \mathbf{C}_1 & \left[\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right] \\ \vdots & \vdots & & \\ w_m & \mathbf{C}_m & & \end{matrix},$$

I.6.2. Táblázat

ahol $a_{ij} > 0$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $\mathbf{x} \in R_+^n$ és $\sum_{i=1}^m w_i = w$.

Egy döntési elvet a Kullback-Leibler I -divergenciák súlyozott összegével képzett entrópia optimalizálási feladatból nyerhetünk:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{w} D(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) \\ & \sum_{j=1}^n x_j = c, \\ & x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (\text{I.6.1.4})$$

ahol c tetszőleges,

$$D(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^n x_j \log \left(\frac{x_j}{a_{ij}} \right) - \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad \mathbf{x} \in R_+^n, \quad (\text{I.6.1.5})$$

és R_+^n jelöli az n -dimenziós Euklideszi tér, az R^n pozitív ortánsát. Az entrópia optimalizálási feladatok széleskörűen alkalmazhatók mind a tudományos diszciplínákban, mind pedig a mérnöktudományokban (Kapur, 1989).

Az (I.6.1.4) entrópia optimalizálási feladat egyik előnye, hogy az optimális megoldás explicit formában megadható:

$$x_j = c \frac{\prod_{i=1}^m a_{ij}^{w_i/w}}{\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ik}^{w_i/w}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.6.1.6})$$

Az általánosított $D(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i)$ I -divergencia nem szimmetrikus az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{a}_i$ vektorokban, így egy új döntési elvet kapunk, ha megcseréljük az a_i , $i = 1, \dots, m$, és az $\mathbf{x}$ vektorokat a célfüggvényben. Ebben az esetben a modell optimális megoldása a következő:

$$x_j = c \frac{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} a_{ij}}{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} a_{ik}}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.6.1.7})$$

A legnépszerűbb döntési elveket, a geometriai és a számtani közepet ilyen módon is meg lehet kapni, azaz mint az explicit megoldásait az ugyanolyan típusú entrópia optimalizálási feladatoknak. Mivel bármely, a pozitív ortánsban értelmezett távolságot, amit a statisztikában és a mérnöktudományokban széleskörűen alkalmaznak (pl. Pearson és Hellinger), célfüggvényként lehet tekinteni az (I.6.1.4) entrópia optimalizálási feladatban, így újabb döntési elveket lehet nyerni. Néhány példa:

Pearson távolság:

$$D^P(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_{ij}} (x_j - a_{ij})^2; \quad (\text{I.6.1.8})$$

Hellinger távolság:

$$D^H(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = 1 - \sum_{j=1}^n \sqrt{x_j} a_{ij} = 2 \sum_{j=1}^n (\sqrt{x_j} - \sqrt{a_{ij}})^2; \quad (\text{I.6.1.9})$$

Fisher-Teil távolság:

$$D^{FT}(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \log \left(\frac{a_{ij}}{x_j} \right) - \sum_{j=1}^n x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (\text{I.6.1.10})$$

Tekintsünk egy általánosabb távolságcsaládot, a Hölder-Young egy paraméteres távolságokat, amik a következő formában adóttak:

$$H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{j=1}^n \alpha x_j + (1-\alpha) a_{ij} - x_j^\alpha a_{ij}^{1-\alpha}, \quad \alpha \in R, \quad \mathbf{x} \in R_+^n. \quad (\text{I.6.1.11})$$

A Hölder-Young távolságok nagyon jó tulajdonságokkal rendelkeznek (Klafszy, 1992):

1. $H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = H_{1-\alpha}(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i)$;
2. $H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i)$ konvex $\mathbf{x}$ -ben, $\mathbf{a}$ -ban és α -ban ;
3. $H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i)$ pozitív homogén, azaz, $H_\alpha(\lambda \mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i) = \lambda H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i)$, $\lambda \in R_+$.

Tekintsük a következő entrópia optimalizálási feladatot tetszőlegesen rögzített α és $c \in R$ értékek esetén:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} H_\alpha(\mathbf{x} \parallel \mathbf{a}_i), \\ & \sum_{j=1}^n x_j = c, \\ & x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{I.6.1.12})$$

Ebből az entrópia optimalizálási feladatból a Kullback-Leibler, Fisher-Teil, Pearson és Hellinger távolságokat a következő paraméterválasztásokkal nyerhetjük:

Kullback-Leibler távolság:	$\alpha = 1$;
Fisher-Teil távolság:	$\alpha = 0$;
Pearson távolság:	$\alpha = 2$;
Hellinger távolság:	$\alpha = \frac{1}{2}$.

Ezen kívül bármely $\alpha \in R$ paraméter érték esetén elvileg be lehet vezetni egy újabb döntési elvet, ha meg lehet indokolni az adott döntési folyamatban a döntési elv használatát. Belátható, hogy ez a döntési elv osztály végtelen sok elemet tartalmaz, pl. az $\alpha \in R$ paramétertől függő általánosított számtani és geometriai közepeket:

$$x_j = \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} a_{ij}^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.6.1.13})$$

Külön vizsgálat tárgyát képezheti az, hogy mely döntési elvek adnak különböző, illetve megegyező rangsorokat az adott döntési problémákban.

A következő példa azt szemlélteti, hogyan lehet döntési feladatokhoz jól illeszkedő értékelő függvényeket meghatározni.

I.6.1.1 Példa

Oldjuk meg a következő feladatot a disztributív és az ideális modell aggregáló képletének a felhasználásával!

Válasszuk ki a számunkra legkedvezőbb nyugdíjpénztárt!

Alternatívák: Brave New World (BNW);
Pennywise (PW);
Sunk Cost (SC);
Golden Decline (GD).

Szemponatok:

1. a befizetések hány százaléka kerül a fedezeti alapba (Felosztás);
2. az előző években elért átlaghozam (Hozam);
3. szubjektív vélemény az ügynökökkel folytatott beszélgetés alapján (Vélemény).

A rendelkezésre álló információkat az alábbi döntési táblázat tartalmazza:

Fontosság	Alternatívák → Szempontok ↓	BNW	PW	SC	GD
nagy	Felosztás	96	96	92	97, 35
kiemelt	Hozam	30	28	30	32
közepes	Vélemény	Nem tudott mindenre válaszolni	Korrekt, megbízható	Előzékeny volt	Ellentmondásba keveredett

Az első lépés a szempontok súlyának a meghatározása. Ez a következő értékelés alapján történik:

Felosztás $\prec$ Hozam közepesen;
Felosztás $\succ$ Vélemény erősen;
Hozam $\succ$ Vélemény nagyon erősen.

Ebből az értékelésből a súlyokra az

$$\begin{matrix} & F & H & V \\ F & \left(\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{matrix} \right) \\ H & \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 6 \end{matrix} \right) \\ V & \left(\begin{matrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

páros összehasonlítás mátrixból a

$$\begin{aligned} w_F &= \frac{3}{10}, \\ w_H &= \frac{6}{10}, \\ w_V &= \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

súlyokat kapjuk.

A második lépés az alternatívák szempontok szerinti értékelése.

A felosztás szerinti értékelésnél a fedezeti alapba nem kerülő összeg szerint pontozunk (ezek rendre: 4; 4; 8; 2,66), de mivel itt a legkisebb érték a legjobb, ezért ezen értékek inverzével dolgozunk. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} BNW_F &= \frac{1}{4}, \\ PW_F &= \frac{1}{4}, \\ SC_F &= \frac{1}{8}, \\ GD_F &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Mivel az értékelések összege 1, ezért ezeket az értékeket nem kell 1-re normálni.

A hozam szerinti értékelésnél a reálhozam szerint pontozunk. Tegyük fel, hogy az átlagos infláció 20% volt, így közelítőleg számolva a

$$\text{reálhozam} = \text{hozam} - \text{inflációs ráta}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a hozam szerinti értékelések a következők:

$$\begin{aligned} BNW_H &= 10, \\ PW_H &= 8, \\ SC_H &= 10, \\ GD_H &= 12. \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket 1-re normálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}BNW_H &= \frac{1}{4}, \\PW_H &= \frac{1}{5}, \\SC_H &= \frac{1}{4}, \\GD_H &= \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

A véleményeket 1 és 5 között pontozva, majd az értékeléseket 1-re normálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}BNW_V &= \frac{2}{10}, \\PW_V &= \frac{4}{10}, \\SC_V &= \frac{3}{10}, \\GD_V &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

A döntési feladathoz tartozó döntési tábla tehát a következő:

Súlyok		<i>BNW</i>	<i>PW</i>	<i>SC</i>	<i>GD</i>
$\frac{3}{10}$	Felosztás	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{6}{10}$	Hozam	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{1}{10}$	Vélemény	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

A disztributív modell aggregáló képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{BNW}^D = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{49}{200},$$

$$x_{PW}^D = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{47}{200},$$

$$x_{SC}^D = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{43,5}{200},$$

$$x_{GD}^D = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{60,5}{200}.$$

Az ideális modell aggregáló képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{BNW}^I = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{15}{20},$$

$$x_{PW}^I = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{14}{20},$$

$$x_{SC}^I = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{13,5}{20},$$

$$x_{GD}^I = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{4} = \frac{18,5}{20}.$$

Látható tehát, hogy mindkét esetben ugyanazt a rangsort kaptuk:

1. Golden Decline;
2. Brave New World;
3. Pennywise;
4. Sunk Cost.

A példa azt is megmutatja, hogy a döntési problémákban az alternatívák szempontok szerinti értékeléséhez problémához illő hasznossági függvényt érdemes választani.

I.6.2. Érzékenységvizsgálat adott döntési táblázat esetén

A többszemponútú döntési feladatok megoldásának az egyik legfontosabb lépése az érzékenységvizsgálat, amelyben a döntési folyamat során kialakult rangsor stabilitását vizsgáljuk a döntési paraméterek függvényében. Erre a lépésre mind az amerikai, mind pedig az európai iskola nagy hangsúlyt fektet. Az itt ismertetésre kerülő érzékenységvizsgálat (Mészáros és Rapcsák, 1996) előnye a többi módszerrel szemben az, hogy nem csak egy vagy két döntési paraméter együttes hatását vizsgálja, hanem a

rangsor változását és a stabilitását is megadja az összes döntési paraméter (a súlyok és a minősítési értékek) függvényében.

Tekintsük a következő döntési elv osztályt:

$$x_j = \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} \Phi(a_{ij}) \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.2.1})$$

ahol $\Phi : R_+ \rightarrow R_+$ szigorúan monoton valós függvény. Ez az osztály végtelen sok elemet tartalmaz, mivel a $\Phi(x) = x^\alpha, x > 0, \alpha \in R$, visszaadja az előbbiekben definiált (I.6.1.13) általánosított számtani és geometriai közepeket.

Tételezzük fel, hogy az adatainkban bizonytalanság van, amit úgy kezelünk, hogy a súlyokra és a minősítési értékekre intervallumokat adunk meg a következő formában:

$$\begin{aligned} w_i &\in [w_i^-, w_i^+], \quad i = 1, \dots, m, \\ a_{ij} &\in [a_{ij}^-, a_{ij}^+], \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{I.6.2.2})$$

Esetünkben a súlyok összege különbözhet 1-től. Az első érzékenységvizsgálati probléma a végső értékeléseket tartalmazó alsó és felső korlátok meghatározása az $x_j, j = 1, \dots, n$, értékekre vonatkozóan, azaz az

$$[x_j^-, x_j^+], \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.2.3})$$

intervallumok meghatározása az $A_j, j = 1, \dots, n$, alternatívákra. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$c_{ij} = \Phi(a_{ij}), \quad c_{ij}^+ = \Phi(a_{ij}^+), \quad c_{ij}^- = \Phi(a_{ij}^-), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.6.2.4})$$

Az intervallum aritmetikát alkalmazva könnyű belátni, hogy

$$x_j^- = \Phi^{-1} \left(\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^m \frac{w_i c_{ij}^-}{\sum_{k=1}^m w_k} \right), \quad w_i \in [w_i^-, w_i^+], \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.2.5})$$

$$x_j^+ = \Phi^{-1} \left(\max_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^m \frac{w_i c_{ij}^+}{\sum_{k=1}^m w_k} \right), \quad w_i \in [w_i^-, w_i^+], \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.6.2.6})$$

ahol a minimalizálás és a maximalizálás is a súlytartományban történik. Így ez az érzékenységvizsgálati probléma a következő speciális hiperbolikus optimalizálási feladatokba²

²Martos Béla visszaemlékezése szerint a hiperbolikus optimalizálás létrejöttének a következő a háttere:

1958 táján a Nehézipari Minisztérium megbízta az MTA Kibernetikai Kutatócsoportját (az MTA SZTAKI őset) a magyar bauxit-alumíniumipar négy vertikuma (bauxitbányászat, timföldgyártás,

megy át:

$$\begin{aligned} \min \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{w}}{\mathbf{e}^T \mathbf{w}} \quad \text{és} \quad \max \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{w}}{\mathbf{e}^T \mathbf{w}} \\ \mathbf{w}_1 \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1), \\ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}, \mathbf{c}, \mathbf{e} \in R^n. \end{aligned} \quad (\text{I.6.2.7})$$

Számítástechnikai szempontból ez azt jelenti, hogy minden alternatíva esetén két, lineáris hiperbolikus optimalizálási feladatot kell megoldani egy magasabb dimenziós téglatesten, amelyre nagyon gyors és hatékony polinomiális algoritmust dolgoztunk ki $O(n \log n)$ korláttal.

A következő példa megmutatja, hogyan lehet az érzékenységvizsgálatot elvégezni adott döntési mátrix esetén.

I.6.2.1. Példa

Legyen adott 4 kocsitípus (Autó1, Autó2, Autó3, Autó4), amelyek közül a számunkra legmegfelelőbbet kell kiválasztani a következő 5 szempont figyelembevételével:

1. Ár;
2. Sebesség;
3. Fogyasztás;
4. Megbízhatóság;
5. Kényelem.

alumíniumkohászat, félkész termék) arányainak és külgazdasági összefüggéseinek a vizsgálatával. Abban az időben már működött a szovjet kooperáció, aminek keretében a hazai timföldet a Szovjetunióban kohósították, és az alumíniumtömböt visszaszállították.

A kutatócsoportot Martos Béla vezette, közgazdászok (Kornai János, Nagy András), matematikusok (Krekó Béla, Mentés Imre) és alumíniumgyártáshoz értő szakemberek voltak a tagjai. A kisszámú termék és technológiai-kereskedelmi variáns lehetővé tette olyan kisméretű optimalizálási modell kidolgozását, amelyet az akkori technikai feltételek mellett (elektroncsöves szovjet számítógép) kezelni lehetett.

A műszaki és gazdasági (lineáris) korlátozó feltételek felállításával nem is volt nagyobb gond, de a célfüggvény meghatározása nehézséget okozott. A probléma gyökere az volt, hogy amíg a ráfordításokat forintban lehetett számításba venni, a hozamokat világpiaci (dollár) áron kellett értékelni. Ma nevetségesnek tűnhet, hogy ez akkor gondot okozott, hiszen erre való a devizaárfolyam. Csakhogy akkoriban a hivatalos dollár-árfolyam, szovjet mintára, annyira alacsony volt, hogy alkalmazási lehetősége fel sem merült. Más, reális (fekete) árfolyamot viszont csak bizonytalanul lehetett volna becsülni, és emiatt bármilyen eredményt nehéz lett volna elfogadtatni.

Végül, a kutatócsoport a feladatot paraméteres optimalizálással oldotta meg, minthogy azonban nem volt olyan paraméter érték, devizaárfolyam, ami mellett a megrendelőknek tetsző eredmény adódott volna, a zárójelentést titkosították és elsüllyesztették.

A munka során ötlött fel Martos Béla számára, hogy ha különböző dimenziójú mennyiségeket összeadni-kivonni nem lehet is, de elosztani egymással igen, és ily módon elő lehet állítani az alumíniumipar belső devizaárfolyamát, azaz, hogy optimálisan mennyiért lehetne egy dollárt kitermelni. Ez viszont a hiperbolikus optimalizálási feladat megfogalmazását jelentette, amire abban az időben nem létezett megoldó algoritmus. Ez volt az a kihívás, amire körülbelül egyidőben, különböző és egymástól függetlenül kifejlesztett módszerekre alapozva, három megoldás született. Erről részletesebben lehet olvasni Martos Béla (1975) könyvében.

A szempontok súlyai a következők:

$$w_1 = 60,$$

$$w_2 = 30,$$

$$w_3 = 70,$$

$$w_4 = 80,$$

$$w_5 = 50.$$

A következő döntési tábla tartalmazza az alternatívák értékeléseit a szempontok szerint:

		x_1	x_2	x_3	x_4
		<i>Autó1</i>	<i>Autó2</i>	<i>Autó3</i>	<i>Autó4</i>
<i>Súlyok</i>					
60	<i>Ár</i>	80	50	40	20
30	<i>Sebesség</i>	30	75	55	90
70	<i>Fogyasztás</i>	70	20	40	10
80	<i>Megbízhatóság</i>	50	60	35	80
50	<i>Kényelem</i>	40	60	55	80

A kapott döntési feladatot megoldva a (I.6.2.1) döntési elv osztályból nyert számtani középpel azt kapjuk, hogy

$$x_1 = 57.241,$$

$$x_2 = 49.827,$$

$$x_3 = 42.759,$$

$$x_4 = 51.724,$$

a geometriai középpel megoldva pedig azt, hogy

$$x_1 = 54.553,$$

$$x_2 = 45.355,$$

$$x_3 = 42.093,$$

$$x_4 = 36.799.$$

Tegyük fel, hogy az érzékenységvizsgálat folyamán a súlyok 10%-kal változhatnak. A kérdés az, hogy az alternatívák értékelései hogyan változnak. A feltétel miatt a súlyintervallumok a következők:

$$[w_1^1; w_1^2] = [54; 66],$$

$$[w_2^1; w_2^2] = [27; 33],$$

$$[w_3^1; w_3^2] = [63; 77],$$

$$[w_4^1; w_4^2] = [72; 88],$$

$$[w_5^1; w_5^2] = [45; 55].$$

Az érzékenységvizsgálati probléma megoldásakor 4 hiperbolikus optimalizálási feladat megoldásai adják a végső értékelések alsó korlátjait, és 4 hiperbolikus optimalizálási feladat megoldásai pedig a felső korlátokat. Az „Autó1” alternatíva esetén a két hiperbolikus optimalizálási feladat a következő:

$$\min \frac{80 t_1 + 30 t_2 + 70 t_3 + 50 t_4 + 40 t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}$$

$$54 \leq t_1 \leq 66,$$

$$27 \leq t_2 \leq 33,$$

$$63 \leq t_3 \leq 77,$$

$$72 \leq t_4 \leq 88,$$

$$45 \leq t_5 \leq 55,$$

aminek a megoldása az Autó1 alternatívára vonatkozó alsó korlátot adja, és a

$$\max \frac{80 t_1 + 30 t_2 + 70 t_3 + 50 t_4 + 40 t_5}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}$$

$$54 \leq t_1 \leq 66,$$

$$27 \leq t_2 \leq 33,$$

$$63 \leq t_3 \leq 77,$$

$$72 \leq t_4 \leq 88,$$

$$45 \leq t_5 \leq 55,$$

aminek a megoldása az Autó1 alternatívára vonatkozó felső korlátot adja.

A hiperbolikus optimalizálási problémákat megoldva azt kapjuk, hogy

$$[x_1^1; x_1^2] = [55.670; 58.815],$$

$$[x_2^1; x_2^2] = [48.309; 51.245],$$

$$[x_3^1; x_3^2] = [42.113; 43.456],$$

$$[x_4^1; x_4^2] = [48.362; 55.017].$$

Az eredményekből következik, hogy a súlyra legkevésbé érzékeny alternatíva az Autó3, és a súlyra legérzékenyebb alternatíva pedig az Autó4. Ez a két döntési elv alkalmazásával kapott eredményekből is látszik.

I.6.3. Inverz érzékenységvizsgálat

Az inverz érzékenységvizsgálat arra a kérdésre keresi a választ, hogy melyek azok a súlyintervallumok, amelyekből tetszőlegesen választva a súlyokat, az alternatívák végső sorrendje nem változik. Tegyük fel, hogy az alternatívák csökkenő sorrendben vannak megadva. Tekintsük a következő parametrikusan megadott halmazt:

$$W_\lambda = [w_1 - \lambda w_1^-, w_1 + \lambda w_1^+] \times \dots \times [w_m - \lambda w_m^-, w_m + \lambda w_m^+] \subseteq R^m, \quad \lambda \in R_{\geq}, \quad (\text{I.6.3.1})$$

ahol $R_{\geq}$ jelenti a nem negatív ortánst. A megoldandó feladat meghatározni a maximális λ értéket úgy, hogy az alternatívák rangsora ne változzon tetszőleges $\mathbf{w} \in W_\lambda$ súlyválasztása esetén. Ez a következő optimalizálási problémára vezet:

$$\max_{\lambda} \left\{ \min_{\mathbf{w} \in W_\lambda} \left(\frac{\sum_{i=1}^m c_{ij} w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} - \frac{\sum_{i=1}^m c_{i,j+1} w_i}{\sum_{k=1}^m w_k} \right) > 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (\text{I.6.3.2})$$

Ha az (I.6.3.2) feladat megoldása során az optimális $\mathbf{w}$ vektorokat meghatározzuk a $j = 1, \dots, n-1$, indexekre, akkor megkapjuk a keresett súlyintervallumokat. Ez geometriai szempontból azt jelenti, hogy egy téglatestet kell „megnövelni” úgy, hogy a paramétereket ebből a testből választva az adott rangsor ne változzon.

Újabb érzékenységvizsgálat típusra ad lehetőséget, ha azon alternatívákat tüntetjük ki, amelyek sorrendjét változatlanul akarjuk hagyni, így ezen alternatívák végső értékelései egy-egy adott intervallumba eshetnek. A kérdés tehát az, hogy milyen intervallumokba eshetnek a súlyok, hogyan lehet ezeket az intervallumokat meghatározni, és hogyan lehet elérni vagy elkerülni két szomszédos alternatívánál a rangsorfordulást.

A következő példában az inverz érzékenységvizsgálatot szemléltetjük.

I.6.3.1. Példa

Az előző példában tárgyalt döntési probléma esetén arra a kérdésre kerestük a választ, hogy a súlyok értéke hány százalékkal változhat meg, ha kikötjük, hogy az alternatívák végső rangsora ugyanaz maradjon. Ebben az esetben az (I.6.3.2) inverz érzékenységvizsgálati problémák az alábbi formában írhatók.

Mivel feltételezésünk szerint $x_1 > x_4$, ezért az első probléma a következő:

$$\min \left(\frac{80w_1 + 30w_2 + 70w_3 + 50w_4 + 40w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} - \frac{20w_1 + 90w_2 + 10w_3 + 80w_4 + 80w_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} \right) > 0$$

$$60 - 0.6\lambda \leq w_1 \leq 60 + 0.6\lambda,$$

$$30 - 0.3\lambda \leq w_2 \leq 30 + 0.3\lambda,$$

$$70 - 0.7\lambda \leq w_3 \leq 70 + 0.7\lambda,$$

$$80 - 0.8\lambda \leq w_4 \leq 80 + 0.8\lambda,$$

$$50 - 0.5\lambda \leq w_5 \leq 50 + 0.5\lambda.$$

A célfüggvény helyett a

$$80w_1 + 30w_2 + 70w_3 + 50w_4 + 40w_5 - (20w_1 + 90w_2 + 10w_3 + 80w_4 + 80w_5)$$

függvényt tekintve ekvivalens problémát kapunk. Mivel a célfüggvény nem függ a keresett λ paramétértől, ezért a feladat könnyen megoldható. Esetünkben a célfüggvény

$$60w_1 - 60w_2 + 60w_3 - 30w_4 - 40w_5,$$

aminek a minimum értéke

$$\begin{aligned} 60(60 - 0.6\lambda) - 60(30 + 0.3\lambda) + 60(70 - 0.7\lambda) - 30(80 + 0.8\lambda) \\ - 40(50 + 0.5\lambda) = 1600 - 140\lambda, \end{aligned}$$

tehát

$$\lambda < 11.428.$$

Hasonlóan számolva az $x_4 > x_2$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\lambda < 9.910,$$

és az $x_2 > x_3$ esetben pedig azt, hogy

$$\lambda < 42.568.$$

Ez azt jelenti, hogy az inverz érzékenységvizsgálati feladat megoldása $\lambda = 9.91$, tehát a súlyok értéke 9.91%-kal változhat meg anélkül, hogy az alternatívák végső rangsora változna. Az eredményből az is következik, hogy a súlyváltoztatásra legérzékenyebb alternatíva az Autó4.

I.7. Csoportos döntési modellek

A csoportos, többszemponútú döntési probléma megfogalmazása után foglalkozunk a csoportos döntéshozatallal páros összehasonlítás mátrixok esetén, majd megmutatjuk, hogy a csoportos döntési feladatok megoldását hogyan lehet visszavezetni egyéni döntési feladatok megoldására.

I.7.1. Többszemponútú, csoportos döntési probléma megfogalmazása

Az eddigiekben megismerkedtünk az amerikai iskola AHP-n alapuló Expert Choice (EC) nevű szoftverével, a francia iskola ELECTRE típusú és a belga iskola, PROMETHEE módszeren alapuló PROMCALC & GAIA szoftvereivel. Ezek mindegyike nagyon hasznosnak és hatékonynak tűnik bizonyos feladatosztályokba tartozó feladatok megoldására. A módszerek közös jellemzője, hogy a többszemponútú döntési problémákat egy döntéshozó esetén oldja meg, ami az alapfeladatnak tekinthető. Az utóbbi időben már természetesen a csoportos döntési feladatok megoldására is továbbfejlesztették a széleskörűen használt szoftverek legtöbbjét, pl. az EC-t és a PROMCALC & GAIA-t.

A következő részben többszemponútú, csoportos döntési problémákról lesz szó, amik lényegesen nehezebb feladatosztályt reprezentálnak, mint a korábbiak. A többszemponútú, csoportos döntési problémák megoldására a Windows környezetben működő WINGDSS módszertant és szoftvert fejlesztette ki az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Operációkutatás és Döntési Rendszerek Osztálya. Mielőtt ismertetnénk ez utóbbi rendszerhez tartozó döntési modellt és döntési eljárást, a többszemponútú, csoportos döntési problémát definiáljuk.

Olyan döntési problémákat vizsgálunk, amelyekben adott n alternatíva, m szempont, és l döntéshozó, akiknek az n alternatívát az m szempont szerint kell rangsorolnia.

Jelölje:

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \dots, A_n, & \text{ az alternatívákat,} \\ C_1, C_2, \dots, C_m, & \text{ a szempontokat és} \\ D_1, D_2, \dots, D_l, & \text{ a döntéshozókat.} \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a döntési probléma matematikai alapstruktúrája, a döntési táblázat esetünkben 3 dimenziós és a következő formában adható meg:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{D}_1: \begin{array}{cc} w_1^1 & \mathbf{C}_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_m^1 & \mathbf{C}_m \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_n \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^1 & \cdot & a_{1n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}^1 & \cdot & a_{mn}^1 \end{array} \right] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\
\\
\mathbf{D}_l: \begin{array}{cc} w_1^l & \mathbf{C}_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_m^l & \mathbf{C}_m \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}_n \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^l & \cdot & a_{1n}^l \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}^l & \cdot & a_{mn}^l \end{array} \right] \end{array}
\end{array}$$

I.7.1. Táblázat

ahol w_i^k , $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, l$; jelenti a k -adik döntéshozó által az i -edik szempontra adott súlyt, és a_{ij}^k , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, l$; pedig a j -edik alternatíva k -adik döntéshozó által történő értékelését a j -edik szempont szerint.

Hasonlóan, mint egy döntéshozó esetén, a döntéshozatal folyamán ki kell tölteni a döntési táblázatokat, azaz az egyes döntéshozóknak értékelni kell az alternatívákat a szempontok szerint, meg kell határozni a szempontok súlyait, majd az egyéni döntéseket aggregálni kell. Először tegyük fel, hogy a döntési táblázatok értékei ismertek, és az egyéni döntések aggregálása, azaz a döntési elv meghatározása a kérdés.

I.7.2. Csoportos döntéshozatal páros összehasonlítás mátrixok esetén

A kérdést úgy fogalmazhatjuk meg, hogy adott l számú páros összehasonlítás mátrix esetén (l döntéshozó van), hogyan aggregáljuk ezeket az egyéni döntéseket reprezentáló mátrixokat.

Az AHP módszertanban ez a következőképpen történik (Aczél és Saaty, 1983):

1. feltételezzük, hogy a páros összehasonlítás mátrixokból az aggregálás után is páros összehasonlítás mátrixot nyerünk, azaz a páros összehasonlítás mátrixok ugyanolyan indexű elemeit az $f : R_+^l \rightarrow R_+$ függvénnyel aggregálva, az aggregált mátrixban a reciprocitási tulajdonság teljesül, ami azt jelenti hogy,

$$f\left(\frac{1}{y_{ij}^1}, \dots, \frac{1}{y_{ij}^l}\right) = \frac{1}{f(y_{ij}^1, \dots, y_{ij}^l)}, \quad \mathbf{y}_{ij} \in \mathbf{R}_+^l, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (\text{I.7.2.1})$$

2. és a pozitív homogenitás teljesül, azaz,

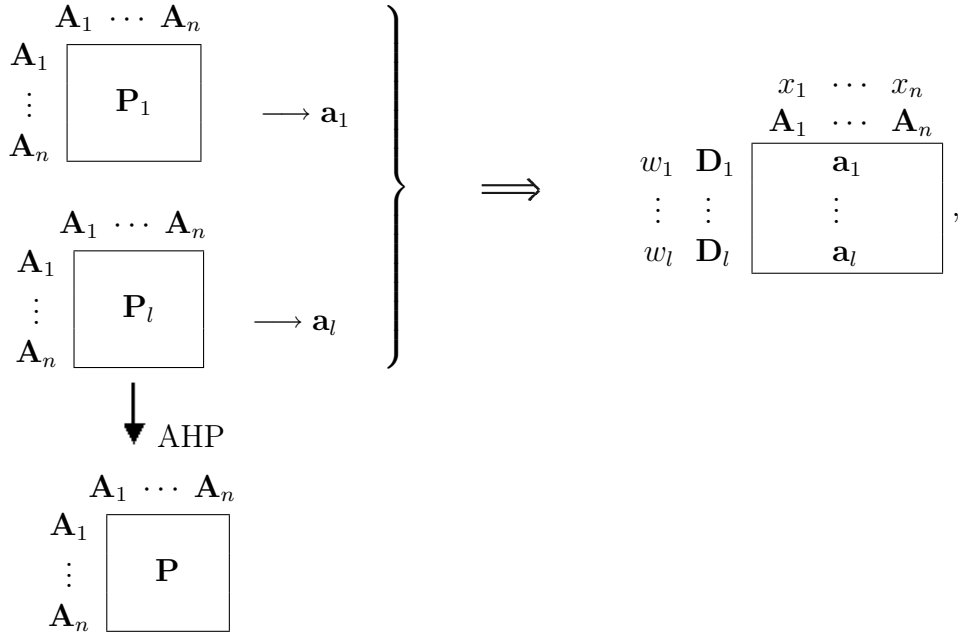
$$f(sy_{ij}^1, \dots, sy_{ij}^l) = sf(y_{ij}^1, \dots, y_{ij}^l), \quad \mathbf{y}_{ij} \in R_+^l, \quad s > 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.7.2.2})$$

A tétel állítása az, hogy az f összegző függvényre nézve az egyedüli megoldás a geometriai közép, azaz,

$$f(y_{ij}^1, \dots, y_{ij}^l) = \prod_{k=1}^l (y_{ij}^k)^{1/l}, \quad k \geq 2, \quad y_{ij} \in R_+^l, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{I.7.2.3})$$

Egy másik elképzelés szerint a páros összehasonlítás mátrixokat úgy lehet aggregálni, hogy a páros összehasonlítás mátrixokból kiszámítjuk az alternatívák szempontok szerinti értékelését, a döntéshozók kompetenciájának a mérlegelésével a végső döntésért felelős személy vagy szervezet megadja a döntéshozók szavazóerejét (ezek lesznek az új döntési feladat súlyai), majd az így kapott döntési feladatot oldjuk meg, pl. valamilyen Hölder-Young eltérést választva döntési elvnek (Gass és Rapcsák, 1998). Ennek a módszernek az előnye – a szavazóerők figyelembe vételén kívül – az, hogy az előzőekben ismertetett érzékenységvizsgálat alkalmazható a végső rangsor megadásakor.

Az alábbi ábrán ezt az elképzelést szemléltetjük:



I.7.1. ábra

ahol a w_k , $k = 1, \dots, l$, jelenti a döntéshozók szavazóerejét, az x_j , $j = 1, \dots, n$, értékek pedig az alternatívák rangsorát.

I.7.3. Csoportos döntési feladat megoldása

Jelölje a csoportos döntési feladatban az alternatívákat $A_1, \dots, A_n$, a szempontokat $C_1, \dots, C_m$, és a döntéshozókat $D_1, \dots, D_l$. A döntési feladat megoldása azt jelenti, hogy minden döntéshozó, minden alternatívát kiértékel minden szempont szerint, minden döntéshozó minden szempontot súlyoz, a döntésért felelős személy vagy intézmény képviselője meghatározza a döntéshozók szavazóerejét a szempontok súlyozására és a minősítésére vonatkozóan, és végül az egyéni döntésekből a szavazóerők figyelembevételével megtörténik a csoportos döntés kiszámítása.

Az egyéni döntések meghozatala után a döntési táblázatok a következők:

$$\begin{array}{c} \mathbf{D}_1: \\ \begin{array}{cc} w_1^1 & \mathbf{C}_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_m^1 & \mathbf{C}_m \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^1 & \cdots & a_{1n}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^1 & \cdots & a_{mn}^1 \end{array} \right] \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} Szavazóerők \\ v_{1w}^1 \quad v_{1q}^1 \\ \vdots \quad \vdots \\ v_{mw}^1 \quad v_{mq}^1 \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{D}_l: \\ \begin{array}{cc} w_1^l & \mathbf{C}_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_m^l & \mathbf{C}_m \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^l & \cdots & a_{1n}^l \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^l & \cdots & a_{mn}^l \end{array} \right] \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} v_{1w}^l \quad v_{1q}^l \\ \vdots \quad \vdots \\ v_{mw}^l \quad v_{mq}^l \end{array}.$$

I.7.2. Táblázat

Az egyéni döntéshozatal befejeződése után a feladat a csoportos értékelés megadása a fenti döntési táblázatok alapján. A csoportos értékelést visszavezetjük döntési alapeladatok sorozatának megoldására, amivel már korábban foglalkoztunk.

Az első lépés a csoportos súlyok meghatározása.

Építsük fel az egyéni döntési feladatot a következő megfeleltetések figyelembevételével:

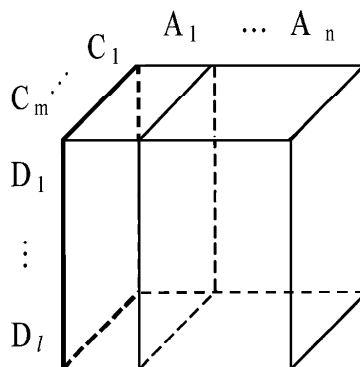
- a csoportos döntési feladat szempontjai $\longrightarrow$ az alternatívák,
- döntéshozók $\longrightarrow$ a szempontok,
- a döntéshozók súlyozásra vonatkozó szavazóerői $\longrightarrow$ a súlyrendszerek.

Ez a döntési feladat az alábbi döntési táblával reprezentálható:

$$\begin{array}{ccc} & w_1^{cs} & \cdots & w_m^{cs} \\ & \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m \\ v_{1w}^1 & \cdots & v_{mw}^1 & \mathbf{D}_1 \left[\begin{array}{ccc} w_1^1 & \cdots & w_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^l & \cdots & w_m^l \end{array} \right] \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1w}^l & \cdots & v_{mw}^l & \mathbf{D}_l \left[\begin{array}{ccc} w_1^l & \cdots & w_m^l \end{array} \right]. \end{array}$$

I.7.3. Táblázat

A fenti döntési feladat megoldása megadja a szempontok csoportos súlyait, a megfelelő súlyrendszerek választása mellett. Az I.7.3. Táblázatban szereplő döntési feladat származtatását szemlélteti a I.7.2. ábra, a 3-dimenziós döntési táblázat struktúráját felhasználva.



I.7.2. ábra

A második lépés az alternatívák szempontok szerinti csoportos minősítési értékeinek a meghatározása.

Építsük fel az egyéni döntési feladatot a következő megfeleltetések figyelembevételével:

- az alternatívák $\rightarrow$ az alternatívák,
- a döntéshozók $\rightarrow$ a szempontok,
- a döntéshozók minősítésére vonatkozó szavazóerői $\rightarrow$ a súlyrendszerek.

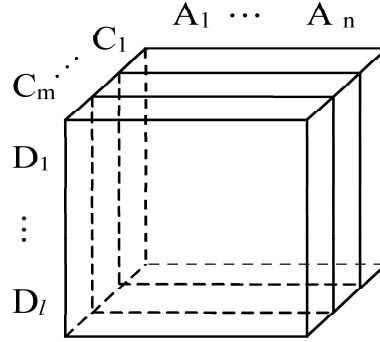
Ez a döntési feladat az alábbi döntési táblákkal reprezentálható:

$$\begin{array}{c}
 a_{i1}^{cs} \quad \cdots \quad a_{in}^{cs} \\
 \mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n \\
 \begin{array}{c} v_{iq}^1 \\ \vdots \\ v_{iq}^l \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_l \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{i1}^1 & \cdots & a_{in}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^l & \cdots & a_{in}^l \end{array} \right], \quad i = 1, \dots, m.
 \end{array}$$

I.7.4. Táblázat

A táblázatokban szereplő a_{ij}^k , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, l$, értékek a k -adik döntéshozó értékelését jelentik a j -edik alternatívára vonatkozóan az i -edik szempont szerint. Látható, hogy ebben a lépésben m számú alapeladatot kell megoldani, azaz minden szemponthoz tartozik egy alapeladat.

A kiértékelések eredményei, az $(a_{i1}^{cs}, \dots, a_{in}^{cs})$, $i = 1, \dots, m$, vektorok adják az alternatívák csoportos minősítését az adott szempontok szerint. A I.7.4. Táblázatban szereplő döntési feladatok származtatását szemlélteti a I.7.2. ábra.



I.7.3. ábra

A harmadik lépés a csoportos értékelések összegzése.

Építsük fel az egyéni döntési feladatot a következő megfeleltetések figyelembevételével:

az alternatívák $\rightarrow$ az alternatívák,
a szempontok $\rightarrow$ a szempontok,
a csoportos súlyok $\rightarrow$ a súlyok.

Ez a döntési feladat az alábbi döntési táblával reprezentálható:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{matrix} \\
 \begin{matrix} w_1^{cs} \\ \vdots \\ w_m^{cs} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc} a_{11}^{cs} & \cdots & a_{1n}^{cs} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{cs} & \cdots & a_{mn}^{cs} \end{array} \right].
 \end{array}$$

I.7.5. Táblázat

A táblázatban szereplő a_{ij}^{cs} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, értékek az előző lépésben nyert csoportos minősítési értékeket jelentik. Ennek a feladatnak a megoldása adja az alternatívák végső rangsorát.

I.7.4. Döntési modellek szempontfával

Legyenek $A_1, \dots, A_n$, alternatívák és $C_1, \dots, C_m$, szempontok. Tegyük fel, hogy egy döntéshozó súlyozta a szempontokat (w_i , $i = 1, \dots, m$) és értékelte az alternatívákat a szempontok szerint (a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$). A döntéshozó súlyozásra vonatkozó szavazóereje p és a szempontok szerinti minősítésre vonatkozó szavazóerői $q_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.

I.7.4.1. Definíció. A többszempontú, egyéni döntési modellek alapfeladata a

$$\begin{array}{ccccc} & & x_1 & \cdots & x_n \\ & & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n \\ w_1 & \mathbf{C}_1 & \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{array} \right] & q_1 & p \\ \vdots & \vdots & \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \end{array} \right] & \vdots & \\ w_m & \mathbf{C}_m & \left[\begin{array}{ccc} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] & q_m & \end{array} \quad (\text{I.7.4.1.})$$

döntési probléma megoldása, azaz az alternatívák rangsorát megadó $\mathbf{x} \in R^n$ vektor meghatározása.

I.7.4.2. Definíció. Egy döntési elvet akkor nevezünk általánosított közép döntési elvnek, ha létezik olyan szigorúan monoton $\Phi : R_+ \rightarrow R_+$ függvény, amelyre

$$x_j = \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{w} \Phi(a_{ij}) \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\text{ahol } w = \sum_{i=1}^m w_i.$$

I.7.4.1. Egyéni döntési modellek szempontfával

A többszempontú döntési feladatok egy jelentős részénél a szempontok hierarchikus rendben, szempontfaként modellezhetők. A legmagasabb hierarchikus szinten levő csúcs neve gyökér (jelölje v_0) és a legalacsonyabb szinten levő csúcsok neve levélszempontok. A szempontfa tetszőleges csúcsához tartozó szempontokat alszempontoknak nevezzük.

A döntési feladat megoldása során a döntéshozó – a gyökér alatti szintről indulva – súlyozza a szempontokat, kivéve a gyökérszempontot. Így egy súlyozott szempontfát kapunk. Legyen v egy tetszőleges csúcs a szempontfában, amihez tartozó alszempontok a $v_1, \dots, v_s$, csúcsok. Így a v csúcsához tartozó súly, a $w(v)$ egyenlő az alszempontok súlyainak összegével, azaz

$$w(v) = \sum_{i=1}^s w(vv_i), \quad (\text{I.7.4.1.1})$$

ahol a $w(vv_i)$, $i = 1, \dots, s$, értékek jelentik az alszempontok relatív súlyait a v szemponthoz viszonyítva.

Tekintsünk egy súlyozott szempontfát. Legyen v tetszőleges, a gyökérszempontról különböző csúcs a szempontfában. A szempontfa egyik fontos tulajdonsága az, hogy a gyökér és bármely csúcs között létezik egyértelmű út. Ez esetünkben legyen $v_0, v_1, \dots, v_t$, ahol a t index jelzi a v csúcs szintjét a szempontfában. Vezessük be az

$$L(v_i) = \frac{w(v_{i-1}v_i)}{w(v_{i-1})}, \quad 1 \leq i \leq t, \quad (\text{I.7.4.1.2})$$

lokális súlyokat. A globális súlyokat a lokális súlyok segítségével definiáljuk a következő módon:

$$P(v) = \prod_{i=1}^t L(v_i) = \prod_{i=1}^t \frac{w(v_{i-1}v_i)}{w(v_{i-1})}. \quad (\text{I.7.4.1.3})$$

Egy döntéshozó és az értékelési szempontok szempontfába történő rendezése esetén a megoldandó döntési probléma a következő: a szempontfa súlyozása és az adott $A_1, \dots, A_n$, alternatívák levélszempontok szerinti értékelése után olyan $\mathbf{x} \in R^n$ vektort kell meghatározni, amely megadja az alternatívák rangsorát.

Az alternatívák értékelése a szempontfán rekurzióval történik. Jelölje $a_j(v)$ a j -edik alternatíva értékelését egy tetszőleges, a v_0 gyöktől különböző, szempont szerint. Tegyük fel, hogy az $A_1, \dots, A_n$, alternatívák már ki vannak értékelve a v szempont $v_1, v_2, \dots, v_s$, alszempontjai szerint. Így a rekurzív értékelés a tetszőleges v szempont esetén a következő döntési probléma megoldását jelenti:

$$\begin{array}{c} a_1(v) \quad \cdots \quad a_n(v) \\ \mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n \\ \omega(vv_1) \quad \mathbf{v}_1 \quad \left[\begin{array}{ccc} a_1(v_1) & \cdots & a_n(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(v_s) & \cdots & a_n(v_s) \end{array} \right] \\ \vdots \quad \vdots \\ \omega(vv_s) \quad \mathbf{v}_s \end{array} \quad (I.7.4.1.4)$$

A többszempontú döntési feladat megoldását valamilyen döntési elv választása mellett az

$$\mathbf{x} = (a_1(v_0), \dots, a_n(v_0)) \in R^n$$

vektor adja.

I.7.4.1.1. Tétel. [6] *Tekintsünk egy olyan többszempontú döntési feladatot, ahol egy döntéshozó van és a szempontok fastruktúrába rendezhetők. Akkor a feladat megoldása bármely általánosított közép döntési elvet választva megegyezik az alábbi döntési feladat megoldásával:*

$$\begin{array}{c} x_1 \quad \cdots \quad x_n \\ \mathbf{A}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}_n \\ P(v_1) \quad \mathbf{v}_1 \quad \left[\begin{array}{ccc} a_1(v_1) & \cdots & a_n(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(v_m) & \cdots & a_n(v_m) \end{array} \right] \\ \vdots \quad \vdots \\ P(v_m) \quad \mathbf{v}_m \end{array} \quad (I.7.4.1.5)$$

ahol $v_1, \dots, v_m$, jelentik a levélszempontokat.

I.7.4.2. Csoportos döntési modellek szempontfával

Legyen adott n alternatíva, $A_1, A_2, \dots, A_n$, l döntéshozó, $D_1, D_2, \dots, D_l$, és egy szempontfa, amit minden döntéshozó súlyoz, majd a levélszempontok szerint kiértékeli az alternatívákat. A döntéshozókhoz hozzá vannak rendelve a súlyozásra és a minősítésre vonatkozó szavazóerők. A döntési probléma olyan n -dimenziós értékelő vektor meghatározása, amelynek komponensei kifejezik a csoportos döntés végeredményét, az alternatívák rangsorát. Legyen v egy tetszőleges csúcs a szempontfában, ami nem levélszempont, és amihez tartozó alszempontok a $v_1, \dots, v_s$, csúcsok; $p^1(v) \geq 0, \dots, p^l(v) \geq 0$, $\sum_{k=1}^l p^k(v) = 1$, a döntéshozók súlyozási szavazóerői az adott

v csúcsban, akkor a $w^g(vv_1), \dots, w^g(vv_s)$, csoportos súlyokat a következő feladat megoldásából kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc} & & w^g(vv_1) & \cdots & w^g(vv_s) \\ & & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_s \\ p^1(v) & \mathbf{D}_1 & \left[L^1(v_1) & \cdots & L^1(v_s) \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p^l(v) & \mathbf{D}_l & \left[L^l(v_1) & \cdots & L^l(v_s) \right] \end{array} . \quad (\text{I.7.4.2.1})$$

Tegyük fel továbbá, hogy a döntéshozók minősítésre vonatkozó szavazóerői minden levélszempontra teljesítik a

$$\sum_{k=i}^l q_i^k = 1, \quad q_i^k \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, l, \quad (\text{I.7.4.2.2})$$

feltételeket. Megjegyezzük, hogy a súlyozási és minősítési szavazóerőkre vonatkozó feltételezések az általánosságot nem korlátozzák.

I.7.4.2.1. Tétel. [6] *Tekintsünk egy olyan többszempontú, csoportos döntési feladatot, ahol a szempontok fastruktúrába rendezhetők. Akkor a feladat megoldása bármely általánosított közép döntési elvet választva megegyezik az alábbi döntési feladat megoldásával:*

$$\begin{array}{ccccc} & & x_1 & \cdots & x_n \\ & & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_n \\ P^g(v_1) q^1(v_1) & \mathbf{v}_1 & \left[a_1^1(v_1) & \cdots & a_n^1(v_1) \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^g(v_1) q^l(v_1) & \mathbf{v}_1 & \left[a_1^l(v_1) & \cdots & a_n^l(v_1) \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^g(v_m) q^1(v_m) & \mathbf{v}_m & \left[a_1^1(v_m) & \cdots & a_n^1(v_m) \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^g(v_m) q^l(v_m) & \mathbf{v}_m & \left[a_1^l(v_m) & \cdots & a_n^l(v_m) \right] \end{array}, \quad (\text{I.7.4.2.3})$$

ahol $P^g(v_i) = \prod_{s=1}^{t_i} L^g(v_i^s)$, $i = 1, \dots, m$, a csoportos súlyok és $q^k(v_i)$, $i = 1, \dots, m$; $k = 1, \dots, l$, a döntéshozók szempontok szerinti minősítésre vonatkozó szavazóerői és $v_1, \dots, v_m$ jelentik a levélszempontokat.

Irodalomjegyzék

- [1] Aczél, J. and Saaty, T. L., Procedures for synthesizing ratio judgements, *Journal of Mathematical Psychology* 27 (1983) 93-102.
- [2] Bridgman, P.W., Dimensional analysis, *Yale University Press*, New Haven and London 1922., 1931.
- [3] Csáki, P., Rapcsák, T., Turchányi, P. and Vermes, M., Research and development for group decision aid in Hungary by WINGDSS, A Microsoft Windows based group decision support system, *Decision Support Systems* 14 (1995) 205-217.
- [4] Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T. and Turchányi, P., A flexible framework for group decision support: WINGDSS 3.0, *Annals of Operations Research* 58 (1995) 441-453.
- [5] Csáki, P., Fölsz, F., Keller, K., Lóránt, G., Mészáros, Cs., Rapcsák, T. and Tóth, Á., Visualization in the decision support system WINGDSS 4.0, in: KOI'95 Proceedings of the 5th Conference on Operational Research, eds.: Hunjak, T., Martić, L. and Neralić, L., *Croatian Operational Research Society* (1995) 1-32.
- [6] Csáki, P., Fölsz, F., Rapcsák, T., and Sági, Z., On tender evaluations, *Journal of Decision Systems* 7 (1998) 179-194.
- [7] Gass, S. I. and Rapcsák, T., A note on synthesizing group decisions, *Decision Support Systems* 22 (1998) 59-63.
- [8] Kapur, J. N., Maximum-entropy models in science and engineering, *John Wiley & Sons*, New York, Chichester, Brisbane, 1989.
- [9] Klafszky, E., Hölder-Young eltérés és alkalmazása a több tényezős értékelés feladataiban, *Prodinform*, Budapest, 1992.
- [10] Klafszky, E. and Ottmár, B., An application of the informational divergence by evaluating building structures, *Proceedings of the Bicentury Anniversary of the Technical University of Budapest* (1983) 65-68.
- [11] Mészáros, Cs. and Rapcsák, T., On sensitivity analysis for a class of decision systems, *Decision Support Systems* 16 (1996) 231-240.

Összesített irodalomjegyzék

- [1] Aczél, J. and Saaty, T.L., Procedures for synthesizing ratio judgments, *Journal of Mathematical Psychology* 27 (1983) 93-102.
- [2] Aczél, J., Determining merged relative score, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 150 (1990) 20-40.
- [3] Arrow, K.J., Social choice and individual values, *Wiley*, New York, 1951.
- [4] Basak, I. and Saaty, T.L., Group decision making using the analytic hierarchy process, *Mathematical Computer Modelling* 17 (1993) 101-109.
- [5] Bell, W.J., Dalberto, L.M., Fischer, M.L., Greenfield, A.J., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R.G. and Prutzman, P.J., Improving the distribution of industrial gases with an online computerized routing and scheduling optimizer, *Interfaces* 13 (1983) 4-23.
- [6] Borda, J.-C., Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1781.
- [7] Bozóki, S., A method for solving LSM problems of small size in the AHP, *Central European Journal of Operations Research*, 11 (2003) 17-33.
- [8] Brans, J.P., L'ingénierie de la décision, Élaboration d'instruments d'aide à la décision. Méthode PROMETHEE, Université Laval, *Colloque d'Aide à la Décision Québec Canada* (1982) 183-213.
- [9] Brans, J.P. and Vincke, Ph., A preference ranking organisation method (the PROMETHEE method for multiple criteria decision making), *Management Science* 31 (1985) 647-656.
- [10] Brans, J.P., Vincke, Ph. and Mareschal, B., How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method, *European Journal of Operational Research* 24 (1986) 228-238.
- [11] Brans, J.P. and Mareschal, B., The PROMCALC & GAIA decision support systems for multicriteria decision aid, *Vrije Universiteit Brussel*, CSOTW/254, 1991.
- [12] Brans, J.P. and Mareschal, B., PROMETHEE V: MCDM problems with segmentation constraints, *INFOR, Canadian Journal of OR* 30 (1992) 85-96.
- [13] Brans, J.P. and Mareschal, B., The PROMCALC and GAIA, *Decision Support Systems* 12 (1994) 297-310.
- [14] Brans, J.P., The space of freedom of the decision maker or modelling the human brain, *EURO GOLD MEDAL Lecture, Glasgow-EURO XIII.*, 1994.

- [15] Bridgman, P.W., Dimensional analysis, *Yale University Press*, New Haven and London 1922., 1931.
- [16] Condorcet, M., Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité des décisions rendues á la pluralité des voix, *Paris*, 1785.
- [17] Csáki, P., Rapcsák, T., Turchányi, P. and Vermes, M., Research and development for group decision aid in Hungary by WINGDSS, A Microsoft Windows based group decision support system, *Decision Support Systems* 14 (1995) 205-217.
- [18] Csáki, P., Csiszár, L., Fölsz, F., Keller, K., Mészáros, Cs., Rapcsák, T. and Turchányi, P., A flexible framework for group decision support: WINGDSS 3.0, *Annals of Operations Research* 58 (1995) 441-453.
- [19] Csáki, P., Fölsz, F., Keller, K., Lóránt, G., Mészáros, Cs., Rapcsák, T. and Tóth, Á., Visualization in the decision support system WINGDSS 4.0, in: KOI'95 Proceedings of the 5th Conference on Operational Research, eds.: Hunjak, T., Martić, L. and L. Neralic, *Croatian Operational Research Society* (1995) 1-32.
- [20] Csáki, P., Fölsz, F., Rapcsák, T. and Sági, Z., On tender evaluations, *Journal of Decision Systems* 7 (1998) 179-194.
- [21] Dancs, I., Preferencia relációk. *Kézirat*, 1996.
- [22] Eckart, C. and Young, G., The approximation of one matrix by another of lower rank, *Psychometrika* 1 (1986) 211-218.
- [23] Ekárt, A. and Németh, S.Z., Stability of distributive and ideal AHP models with respect to the addition of a new alternative, *Proceedings of the ISAHP2001*, Switzerland, Inst. Accounting and Controlling, University of Bern (2001) 87-92.
- [24] Fishburn, P., The theory of social choice, *Princeton University Press*, 1973.
- [25] Fleming, P.J. and Wallace, J.J., How not to lie with statistics: the correct way to summarize benchmark results, *Communications of the ACM* 29 (1986) 218-221.
- [26] Gass, S.I. and Rapcsák, T., A note on synthesizing group decisions, *Decision Support Systems* 22 (1998) 59-63.
- [27] Gass, S.I. and Rapcsák, T., Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research*, 154 (2004) 573-584.
- [28] Greenacre, M.J., Theory and applications of correspondence analysis, *Academic Press*, London, Orlando, 1984.
- [29] Jones, C.V., Visualization and optimization, *ORSA Journal of Computing* 6 (1994) 221-257.
- [30] Jones, C.V., Visualization and optimization, *Kluwer Academic Publishers*, 1996.

- [31] Kapur, J. N., Maximum-entropy models in science and engineering, *John Wiley & Sons*, New York, Chichester, Brisbane, 1989.
- [32] Kelly, I.S, Social choice theory, *Springer-Verlag*, 1988.
- [33] Kennedy, W.J. and Gentle, J.E., Statistical computing, *Marcel Dekker*, New York, Basel, 1980.
- [34] Klafszky, E., Hölder-Young eltérés és alkalmazása a több tényezős értékelés feladataiban, *Prodinform*, Budapest, 1992.
- [35] Klafszky, E. and Ottmár, B., An application of the informational divergence by evaluating building structures, *Proceedings of the Bicentury Anniversary of the Technical University of Budapest* (1983) 65-68.
- [36] Mareschal, B. and Brans, J.P., Geometrical representation for MCDM, the GAIA procedure, *European Journal of Operational Research* 34 (1988) 69-77.
- [37] May, K.O., A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision, *Econometria* 20 (1952) 680-684.
- [38] Mészáros, Cs. and Rapcsák, T., On sensitivity analysis for a class of decision systems, *Decision Support Systems* 16 (1996) 231-240.
- [39] Mirkin, B.G., Group choice, V.H. *Winston & Sons*, Washington, 1979.
- [40] Perron, O., Zur Theorie der Matrizen, *Math. Ann.* 64 (1907) 248-263.
- [41] Rapcsák, T., Some optimization problems in multivariate statistics, *Journal of Global Optimization* 28 (2004) 217-228.
- [42] Saaty, T.L., The analytic hierarchy process, *McGraw-Hill*, New York, 1980.
- [43] Saaty, T.L., Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process, *Management Science* 32 (1986) 841-855.
- [44] Saaty, T.L., The analytic hierarchy process, *University of Pittsburgh*, Pittsburgh, 1990.
- [45] Saaty, T.L., How to make a decision: the analytic hierarchy process, *Interfaces* 24 (1994) 19-43.
- [46] Salminen, P., Hokkanen, I. and Lahdelma, R., Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems, *European Journal of Operational Research* 104 (1998) 485-496.
- [47] Temesi, J., A döntéselmélet alapjai, *AULA*, Budapest, 2002.
- [48] Vincke, P., Multicriteria decision-aid, *John Wiley & Sons*, 1992.