Formális nyelvek I/2.
Véges automaták minimalizálása

Fülöp Zoltán

SZTE TTIK Informatikai Intézet
Számítástudomány Alapjai Tanszék
6720 Szeged, Árpád tér 2.

Véges automaták minimalizálása

Két automata *ekvivalens*, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

Definíció. Egy $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata *minimális*, ha bármely, vele ekvivalens $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ automatára $||Q|| \leq ||Q'||$ teljesül.

Cél: Olyan algoritmus megadása, melynek inputja egy tetszőleges M automata, outputja pedig egy M-mel ekvivalens minimális automata. (Az M automata minimalizálása.)

Az algoritmust két lépésben adjuk meg:

(1) M összefüggő részének meghatározása (nem elérhető állapotok elhagyása).

(2) Ekvivalens állapotok összevonása (redukálás).

Véges automaták minimalizálása

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata

Tetszőleges $q \in Q$ állapot és $x \in \Sigma^*$ szó esetén qx-szel jelöljük azt a Q-beli állapotot, melybe M a q-ból az x hatására kerül:

$$qx := p, \text{ ahol } (q, x) \vdash_M^* (p, \lambda).$$

Megjegyzés: $(qx)y = q(xy)$.

Egy p állapotot *elérhetőnek* nevezünk, ha van olyan $x \in \Sigma^*$, melyre $p = q_0x$.

Az elérhető állapotok halmaza $Q' = \{q_0x \mid x \in \Sigma^*\}$.

Véges automaták minimalizálása

Definíció. $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata M *összefüggő része* az $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ automata, ahol

- $Q' = \{q_0x \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $F' = F \cap Q'$,
- $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$ minden $p \in Q'$-re.

M *összefüggő*, ha $M = M'$.

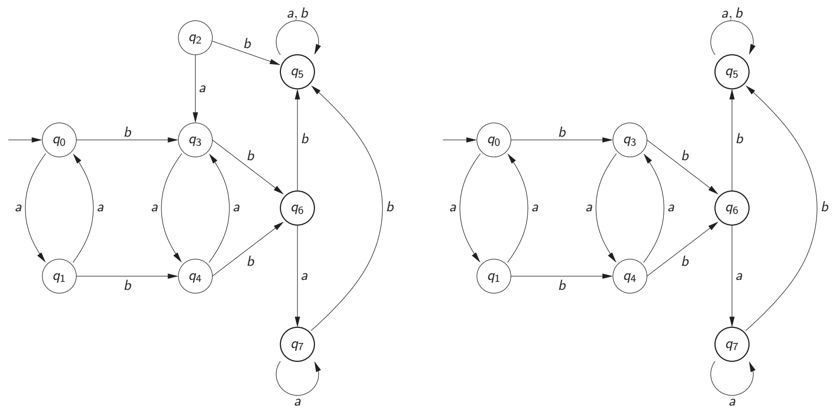
Q' meghatározása:

(i) Legyen $Q_0 = \{q_0\}$ és legyen $i = 0$.

(ii) Legyen $Q_{i+1} = Q_i \cup \{q \in Q \mid \exists (p \in Q_i \text{ és } a \in \Sigma) \text{ melyre } q = \delta(p, a)\}$

(iii) Ha $Q_i = Q_{i+1}$, akkor legyen $Q' = Q_i$ és álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (i)-re.

Véges automaták minimalizálása



Egy automata és az összefüggő része.

Véges automaták minimalizálása

A következő két állítás nyilvánvaló:

(1) Ha M' az M összefüggő része, akkor $L(M) = L(M')$.

(2) Ha M minimális, akkor összefüggő.

A minimalizálás első lépése, hogy elhagyjuk a nem elérhető állapotokat (más szóval, kiszámoljuk M összefüggő részét).

Véges automaták minimalizálása

Ekvivalens állapotok:

Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. Definiáljuk $\sim \subseteq Q \times Q$ relációt a következőképpen: $\forall p, q \in Q$-ra

$$p \sim q \text{ ha minden } x \in \Sigma^* \text{ esetén } px \in F \Leftrightarrow qx \in F.$$

Ekkor:

(1) $\sim$ ekvivalencia reláció (reflexív, szimmetrikus és tranzitív)

(2) ha $p \sim q$, akkor minden $a \in \Sigma$-ra $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$

(3) ha $p \sim q$, akkor $(p \in F \iff q \in F)$

A $\sim$ relációt M kongruencia relációjának (röviden M kongruenciájának) nevezzük.

Véges automaták minimalizálása

$$p \sim q \text{ ha minden } x \in \Sigma^* \text{ esetén } px \in F \Leftrightarrow qx \in F.$$

(1) triviális

(2) bizonyítása:

Tfh $p \sim q$ és van olyan $a \in \Sigma$, hogy $\delta(p, a) \not\sim \delta(q, a)$. Akkor van olyan $z \in \Sigma^*$, melyre $(pa)z \in F \Leftrightarrow (qa)z \notin F$. Akkor viszont $p(az) \in F \iff q(az) \notin F$, ami ellentmondás, mert $p \sim q$.

(3) bizonyítása:

$p \sim q$, akkor $x = \varepsilon$-ra: $p\varepsilon = p \in F \Leftrightarrow q\varepsilon = q \in F$

Véges automaták minimalizálása

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata és $\sim$ kongruencia reláció

Jelölések:

- a p-t tartalmazó ekvivalencia osztály:

$$[p]_\sim = \{q \in Q \mid p \sim q\}$$

  (ekkor: $[p]_\sim = [q]_\sim \iff p \in [q]_\sim \iff p \sim q$)
- az összes ekvivalencia osztály:

$$[Q]_\sim = \{[p]_\sim \mid p \in Q\}$$

- az F-et alkotó ekvivalencia osztályok:

$$[F]_\sim = \{[p]_\sim \mid p \in F\}$$

Véges automaták minimalizálása

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata és $\sim$ kongruencia reláció

Definiáljuk a következő automatát:

$$M/\sim = ([Q]_\sim, \Sigma, \delta_\sim, [q_0]_\sim, [F]_\sim),$$

ahol minden $a \in \Sigma$-ra:

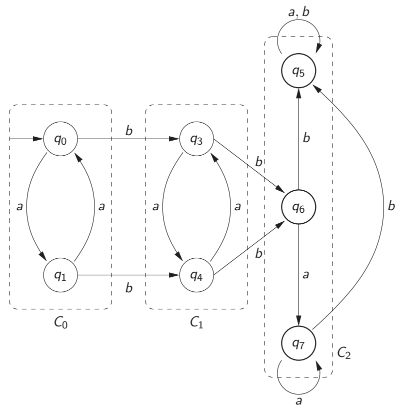
$$\delta_\sim([p]_\sim, a) = [\delta(p, a)]_\sim .$$

(A $[p]_\sim$ osztályból a hatására a $[\delta(p, a)]_\sim$ állapotba megy.)

A definíció helyes, mert ha $[p]_\sim = [q]_\sim$, akkor $p \sim q$, ezért $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$, ami azt jeleti, hogy $[\delta(p, a)]_\sim = [\delta(q, a)]_\sim$.

Véges automaták minimalizálása

Példa:



$M/\sim$, ahol $\sim = \{q_0, q_1\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6, q_7\}$

Véges automaták minimalizálása

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata és $\sim$ kongruencia reláció

Tétel. $L(M) = L(M/\sim)$ (M és $M/\sim$ ekvivalensek).

Bizonyítás. Meg lehet mutatni $|x|$ szerinti indukcióval, hogy minden $p, q \in Q$-ra és $x \in \Sigma^+$-ra

$$px = q \ \ (M\text{-ben}) \iff [p]_\sim x = [q]_\sim \ \ (M/\sim\text{-ben}) .$$

Ezután

$$\begin{aligned} x \in L(M) &\iff q_0 x = q,\ q \in F\text{-re} \\ &\iff [q_0]_\sim x = [q]_\sim,\ q \in F\text{-re} \\ &\iff [q_0]_\sim x = [q]_\sim,\ [q]_\sim \in [F]_\sim\text{-re} \\ &\iff x \in L(M/\sim). \end{aligned}$$

A harmadik ekvivalencia a (3) tulajdonságból következik.

Véges automaták minimalizálása

Tétel. Ha M összefüggő, akkor $M/\sim$ az M-mel ekvivalens minimális automata.

Bizonyítás. Lásd FZ, Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük

A minimalizálás két fő lépése:

(1) M összefüggő részének meghatározása (nem elérhető állapotok elhagyása).

(2) A $\sim$ kongruencia kiszámolása.

Véges automaták minimalizálása

A $\sim$ kongruenciát kiszámító algoritmus: $\sim$-et közelítjük a $\rho_0, \rho_1, \ldots \subseteq Q \times Q$ relációkkal:

(i) Legyen ρ_0 a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_0 q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p \in F \iff q \in F$. Legyen $i = 0$.

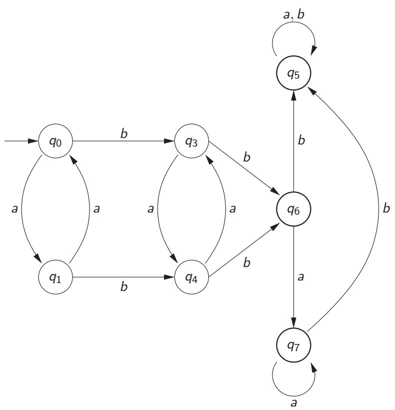
(ii) Legyen ρ_{i+1} a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_{i+1}q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p\rho_i q$ és minden $a \in \Sigma$-ra, $\delta(p, a)\rho_i\delta(q, a)$.

(iii) Ha $\rho_i = \rho_{i+1}$, akkor legyen $\sim = \rho_i$ és álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (i)-ra.

$$\rho_0 \supseteq \rho_1, \supseteq \rho_2 \supseteq \ldots \supseteq \rho_i = \rho_{i+1} = \ldots$$

Véges automaták minimalizálása

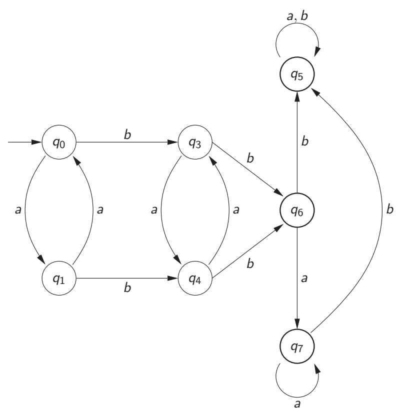
Példa $\sim$ kiszámítására:



$$\rho_0 \quad = \quad \{q_0, q_1, q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\}$$

Véges automaták minimalizálása

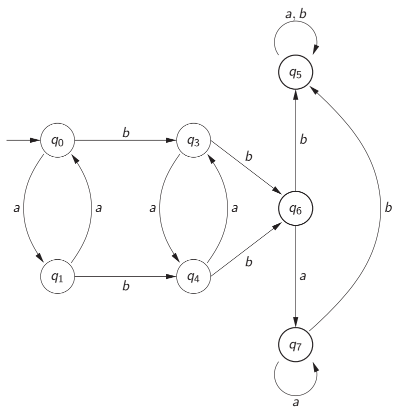
Példa $\sim$ kiszámítására:



$$\rho_0 \quad = \quad \{q_0, q_1, q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\}$$
$$\rho_1 \quad = \quad \{q_0, q_1\},\ \{q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\}$$

Véges automaták minimalizálása

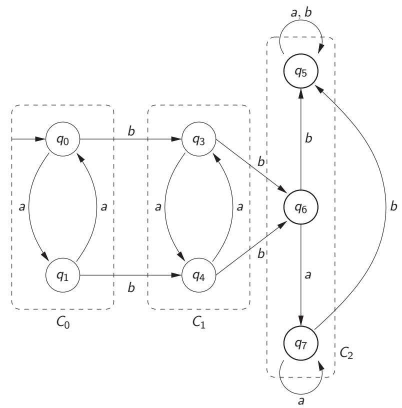
Példa $\sim$ kiszámítására:

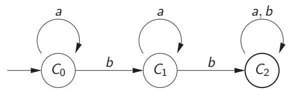


$$
\begin{aligned}
\rho_0 &= \{q_0, q_1, q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\} \\
\rho_1 &= \{q_0, q_1\},\ \{q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\} \\
\rho_2 &= \{q_0, q_1\},\ \{q_3, q_4\},\ \{q_5, q_6, q_7\},\ \text{tehát } \sim = \rho_2
\end{aligned}
$$

Véges automaták minimalizálása

A minimális automata:





$$\sim = \{q_0, q_1\}, \{q_3, q_4\}, \{q_5, q_6, q_7\}$$

Véges automaták minimalizálása

Tétel. Egy adott L nyelvet felismerő minimális automata (izomorfizmus erejéig) egyértelműen meghatározott.

Ez azt jelenti, hogy ha az L-et felismerő bármelyik automatát minimalizáljuk, mindig ugyanazt a minimális automatát kapjuk eredményül.

Két automata ekvivalenciáját úgy is el lehet dönteni, hogy mindkettőt minimalizáljuk, majd megnézzük, hogy mindkét esetben ugyanazt kapjuk-e eredményül.