Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Augmentált keresőfák

Szegedi Tudományegyetem

Bináris keresőfák műveletei

- h magas és n csúcsból álló bináris keresőfa esetén a Keres, Beszúr, Töröl műveletek $O(h)$ időben végrehajthatók
- x csúcs rangja: a fában tárolt kulcsok között x hanyadik helyen áll $<$ szerint
- Hogy keresnénk meg egy bináris keresőfa r rangú elemét?
- Hogyan határoznánk meg egy bináris keresőfa x csúcsának rangját?

Bináris keresőfák műveletei

- h magas és n csúcsból álló bináris keresőfa esetén a Keres, Beszúr, Töröl műveletek $O(h)$ időben végrehajthatók
- x csúcs rangja: a fában tárolt kulcsok között x hanyadik helyen áll $<$ szerint
- Hogy keresnénk meg egy bináris keresőfa r rangú elemét?
- Hogyan határoznánk meg egy bináris keresőfa x csúcsának rangját?

Általános ötlet

A fapontokban tárolt extra adattagok hozzásegíthetnek minket új műveletek hatékony ($O(h)$ idejű) végrehajtásához

Új műveletek – adott rangú kulcs meghatározása

- Cél: $r \leq n$ ranggal rendelkező elem megtalálása a fában
- Naiv (de működő) elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok az r-ediknek érintett csúcsnál

Új műveletek – adott rangú kulcs meghatározása

- Cél: $r \leq n$ ranggal rendelkező elem megtalálása a fában
- Naiv (de működő) elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok az r-ediknek érintett csúcsnál
- $O(h)$ helyett $\Theta(r)$ idejű algoritmus
    - Kiegyensúlyozott fa és kellően nagy r estében pedig $r \gg h$

Új műveletek – adott kulcs rangjának meghatározása

- Naiv elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok, ha x kulcsot érintem
- A válasz az x megtalálásáig érintett kulcsok száma
- $O(h)$ helyett $O(n)$ idejű algoritmus

Új műveletek – adott kulcs rangjának meghatározása

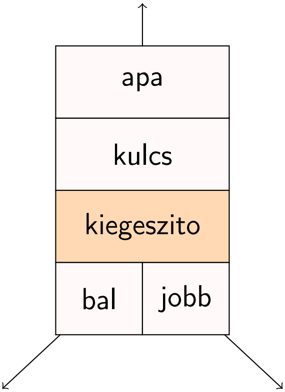
- Naiv elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok, ha x kulcsot érintem
- A válasz az x megtalálásáig érintett kulcsok száma
- $O(h)$ helyett $O(n)$ idejű algoritmus

A megoldás

Minden csúcs tároljon el kiegészítő információt magáról!

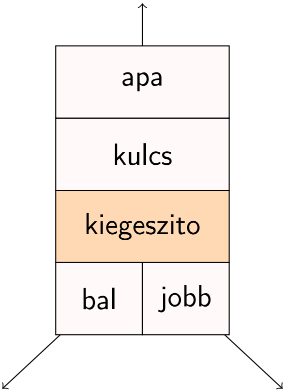
Rendezett-minta fa implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    int kiegeszito;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Rendezett-minta fa implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    int kiegeszito;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Megjegyzés

A kiegészítő információ legyen az adott gyökerű részfa mérete (benne található kulcsok száma). Üres fa kiegészítő információja 0.

Adott rangú kulcs keresése

```
RangKeres(x, i) {
  // x gyökerű részfában keresi az i rangú csúcsot
  r = x.bal.kiegeszito + 1

  if (i < r) {
      RangKeres(x.bal, i)
  } elseif (i > r) {
      RangKeres(x.jobb, i - r)
  } else {
     return x
  }
}
```

h magas fa esetén $O(h)$

Adott kulcs rangjának meghatározása

```
RangMeghatároz(x) {
  r = 0
  y = x
  while (y != nil) {
      if (x.kulcs >= y.kulcs) {
          r = r + y.bal.kiegeszito + 1
      }
      y = y.apa
  }
  return r
}
```

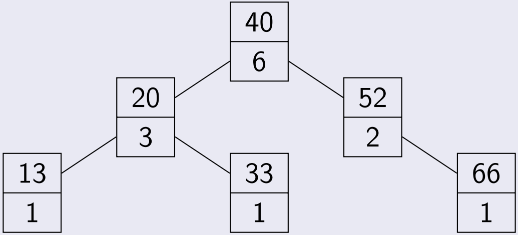
Szövegesen

x-től a gyökérig lépkedve azon *y* gyökerű részfák gyökérelemeinek rangjait összegezzük, melyekre $x.kulcs >= y.kulcs$

A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

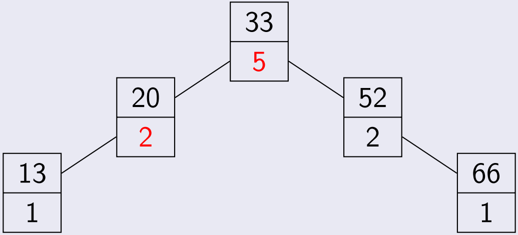
Példa: Töröl(40)



A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

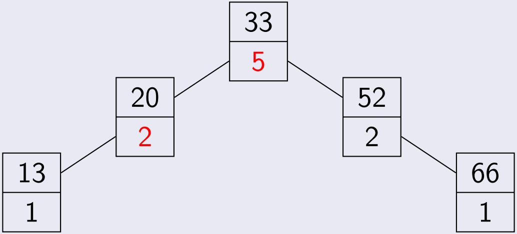
Példa: Töröl(40)



A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

Példa: Töröl(40)

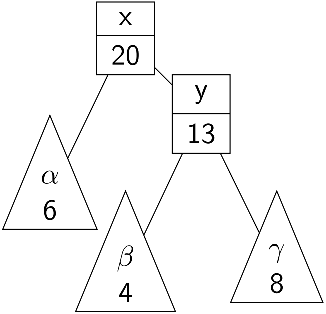


Észrevétel

Épp ezért nem a csúcsok rangjára tekintünk közvetlenül kiegészítő információként (hiszen azt költséges lehet aktualizálni)

Új művelet – Forgatás

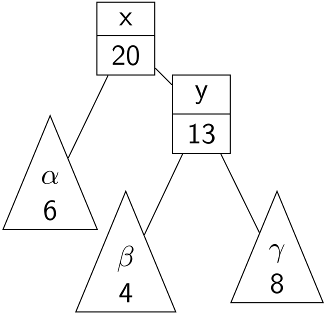
- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni



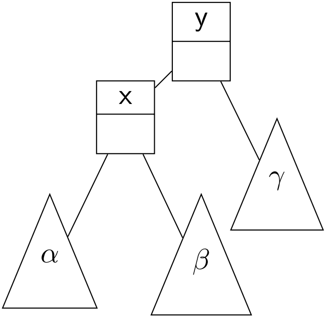
(a) x körüli balra forgatás előtt

Új művelet – Forgatás

- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni



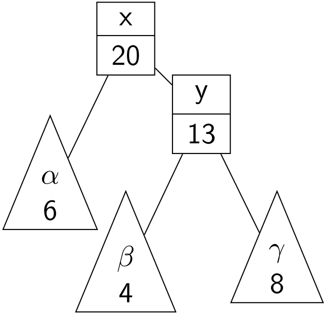
(a) x körüli balra forgatás előtt



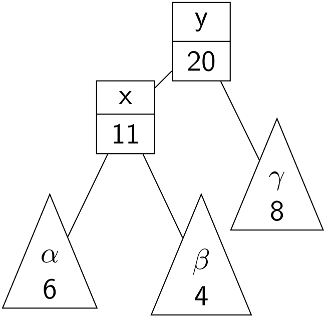
(b) x körüli balra forgatás után

Új művelet – Forgatás

- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni



(a) x körüli balra forgatás előtt



(b) x körüli balra forgatás után

A kiegészítő információ fenntartása

- Beszúrás esetén: a beszúrás helyétől a gyökérig menően a kiegészítő információk inkrementálása ($O(h)$)
- Törlés esetén: a kieső csúcstól a gyökéig menően a kiegészítő információk dekrementálása ($O(h)$)
- x körüli forgatás esetén ($O(1)$)
  - $y.kiegeszito = x.kiegeszito$
  - $x.kiegeszito = x.bal.kiegeszito + y.bal.kiegeszito + 1$, azaz α-beli és β-beli csúcsok száma +1

Intervallumfák

Az intervallumfa sajátosságai

- A csúcsok $[a; f]$ intervallumokat tárolnak
  - a és f az intervallum alsó,-és felső végpontjait jelöli
  - $a \leq f$ feltehető
- $<$ rendezést az intervallumok kezdőpontja szerint értelmezzük
  - $[1; 4] < [5; 6]$
  - $[1; 4] < [3; 5]$
  - $[1; 4] < [2; 3]$

Intervallumfák

Az intervallumfa sajátosságai

- A csúcsok $[a; f]$ intervallumokat tárolnak
  - a és f az intervallum alsó,-és felső végpontjait jelöli
  - $a \leq f$ feltehető
- $<$ rendezést az intervallumok kezdőpontja szerint értelmezzük
  - $[1; 4] < [5; 6]$
  - $[1; 4] < [3; 5]$
  - $[1; 4] < [2; 3]$

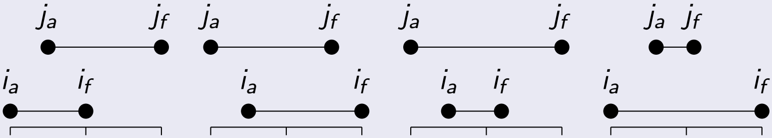
Speciális művelet: átfedő intervallum keresése

El akarjuk tudni dönteni, hogy a fa tartalmaz-e valamely $I = [i_a; i_f]$ intervallummal átfedő intervallumot.
I és J intervallumok átfednek $\Leftrightarrow i_a \leq j_f$ és $i_f \geq j_a$

Intervallum trichotómia

- Az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül bármely (I, J) intervallumpárra
  - a $I \cap J \neq \emptyset$, azaz I és J intervallumok átfedik egymást
  - b $i_a > j_f$
  - c $i_f < j_a$

Illusztráció – 1. eset

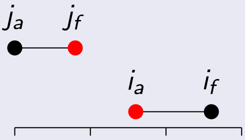


(a) Átfedő I és J

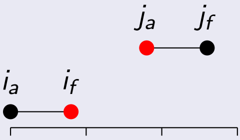
Intervallum trichotómia

- Az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül bármely (I, J) intervallumpárra
  - a $I \cap J \neq \emptyset$, azaz I és J intervallumok átfedik egymást
  - b $i_a > j_f$
  - c $i_f < j_a$

Illusztráció – 2. és 3. eset



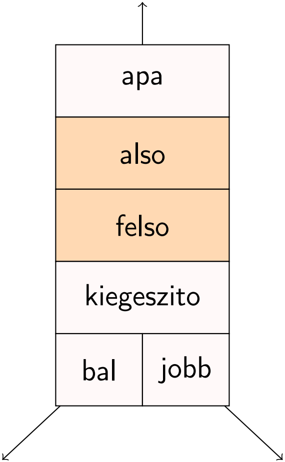
(b) $i_a > j_f$



(c) $i_f < j_a$

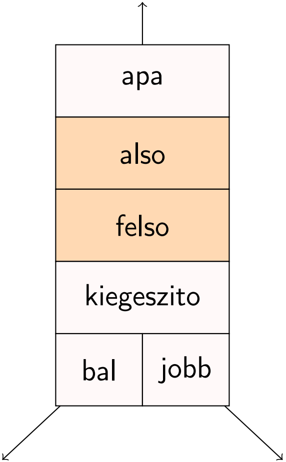
Intervallumfa implementációja

```
class Node {
    int also;
    int felso;
    int kiegeszito;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Intervallumfa implementációja

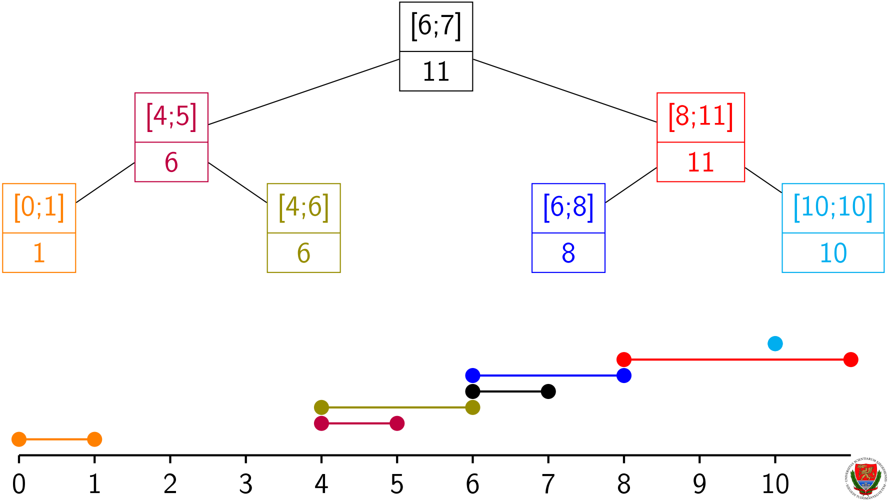
```
class Node {
    int also;
    int felso;
    int kiegeszito;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Ötlet

A kiegészítő információ legyen az adott gyökerű részfában található maximális felső végpont

Intervallumfa – példa



Átfedő intervallum keresése x gyökerű részfában

```
ÁTFEDŐKERES(x, i) {
  while (x != nil) {
    if (i.also <= x.felso és i.felso >= x.also) {
       return x    // átfedést találtunk
    }
    if (x.bal != nil és x.bal.kiegeszito >= i.also) {
      x = x.bal    // folytassuk balra a keresést
    } else {
      x = x.jobb   // folytassuk jobbra a keresést
    }
  }
  return nil       // nem találtunk átfedő intervallumot
}
```

Átfedő intervallum keresésének helyessége

Tétel

Az ÁtfedőKeres*(x,i) minden végrehajtása csak abban az esetben tér vissza* `nil`*-lel, ha az x gyökerű intervallumfában nem található i-vel átfedő intervallum.*

Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
  - Nincs bal részfa, vagy
  - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad i intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)

Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
  - Nincs bal részfa, vagy
  - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad i intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)

$\Rightarrow$ jobbra lépéskor a bal részfában biztosan nincs átfedés

Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
  - Nincs bal részfa, vagy
  - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad *i* intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)

$\Rightarrow$ jobbra lépéskor a bal részfában biztosan nincs átfedés

Összegezve

Vagy fogunk jobbra lépve átfedő intervallumot találni, vagy balra lépve se találtunk volna

Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x-nél balra menve nem találunk i-vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?

[1] $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli

Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x-nél balra menve nem találunk i-vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
  - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
    - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal$[1], melyre $y.felso > i.also$

[1] $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli

Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x-nél balra menve nem találunk i-vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
  - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
    - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal$[1], melyre $y.felso > i.also$
    - Feltevésünk szerint $x.bal$-ban nincs i-vel átfedő intervallum $\rightarrow$ trichotómia c) esete

[1] $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli

Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x-nél balra menve nem találunk i-vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
  - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
    - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal$[1], melyre $y.felso > i.also$
    - Feltevésünk szerint $x.bal$-ban nincs i-vel átfedő intervallum $\rightarrow$ trichotómia c) esete $\rightarrow y.also > i.felso$
    - A keresőfa-tulajdonságból adódóan pedig $\forall y' \in x.jobb$ esetében $y'.also > y.also$ teljesül

[1] $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli

Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x-nél balra menve nem találunk i-vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
  - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
    - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal$[1], melyre $y.felso > i.also$
    - Feltevésünk szerint $x.bal$-ban nincs i-vel átfedő intervallum $\to$ trichotómia c) esete $\to$ $y.also > i.felso$
    - A keresőfa-tulajdonságból adódóan pedig $\forall y' \in x.jobb$ esetében $y'.also > y.also$ teljesül
    - Tehát $\forall y' \in x.jobb$ az i intervallumra nézve c)-típusú (vele át nem fedő) lehet csupán

Összegezve

Ha balra lépve nem sikerül átfedő intervallumot találjuk, akkor jobbra lépve se találhattunk volna

[1] $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli

Összegzés

- Addicionális adattagok bevezetésével újfajta kérdések hatékony megválaszolása válhat lehetővé
- Adatszerkezetek kibővítésének fő lépései
    1. Alap-adatszerkezet megválasztása (nem csak bináris keresőfa)
    2. Alap-adatszerkezet kiegészítő információjának kijelölése
    3. Kiegészítő információjának **hatékony** fenntarthatóságának igazolása
    4. Új hatékony műveletek kifejlesztése