Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Amotrizált költségelemzés, Fibonacci kupacok

Szegedi Tudományegyetem

Amortizált költségelemzés

- A legrosszabb költségelemzés túl pesszimista tud lenni
- Amortizált költségelemzésnél az adatszerkezetek ‘életútját’ vizsgáljuk
- Lehetnek költséges műveleteink, ha azok *kellően* ritkák
  - Pl. dinamikusan bővülő tömb

Amortizált költségelemzés

- A legrosszabb költségelemzés túl pesszimista tud lenni
- Amortizált költségelemzésnél az adatszerkezetek ‘életútját’ vizsgáljuk
- Lehetnek költséges műveleteink, ha azok *kellően* ritkák
  - Pl. dinamikusan bővülő tömb

Fontos

Ennél az elemzésnél a véletlennek nincs szerepe: az egyes műveletek átlagos költségére adunk felső korlátot a *legrosszabb esetben*.

Amortizált költségelemzés

- A legrosszabb költségelemzés túl pesszimista tud lenni
- Amortizált költségelemzésnél az adatszerkezetek ‘életútját’ vizsgáljuk
- Lehetnek költséges műveleteink, ha azok *kellően* ritkák
    - Pl. dinamikusan bővülő tömb

Fontos

Ennél az elemzésnél a véletlennek nincs szerepe: az egyes műveletek átlagos költségére adunk felső korlátot a *legrosszabb esetben*.

Fő megközelítések

1. Összesítéses elemzés
2. Könyvelési módszer
3. Potenciálmódszer

Bináris számláló növelése

```
NÖVEL(A) {
   i=0
   while i < A.hossz és A[i] = 1 {
      A[i] = 0
      i = i+1
   }
   if i < A.hossz {
      A[i] = 1
   }
 }
```

Bináris számláló növelése

```
NÖVEL(A) {
   i=0
   while i < A.hossz és A[i] = 1 {
      A[i] = 0
      i = i+1
   }
   if i < A.hossz {
      A[i] = 1
   }
 }
```

i	3	2	1	0	$\sum$ktg.
	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	3
	0	0	1	1	4
	0	1	0	0	7
	0	1	0	1	8
	0	1	1	0	10
	0	1	1	1	11
	1	0	0	0	15
	1	0	0	1	16
	1	0	1	0	18
	1	0	1	1	19
	1	1	0	0	22
	1	1	0	1	23
	1	1	1	0	25
	1	1	1	1	26

Amortizált költségelemzés – összesítéses elemzés

Összesítéses elemzés

n hosszú műveletsorra állítunk föl $T(n)$ felső korlátot
$\rightarrow$ a műveletek átlagos költsége $T(n)/n$

Példa

k bites számlálón NÖVEL művelet n-szeri végrehajtása: $O(nk)$
Helyes, de nem éles korlát, mivel az i pozíciójú bit csak minden 2^i számú végrehajtás után változik.

Amortizált költségelemzés – összesítéses elemzés

Összesítéses elemzés

n hosszú műveletsorra állítunk föl $T(n)$ felső korlátot
$\rightarrow$ a műveletek átlagos költsége $T(n)/n$

Példa

k bites számlálón NÖVEL művelet n-szeri végrehajtása: $O(nk)$
Helyes, de nem éles korlát, mivel az i pozíciójú bit csak minden 2^i számú végrehajtás után változik.

Élesebb korlát

$$\sum_{i=0}^{k-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor < n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2n = O(n)$$

Vagyis a NÖVEL művelet amortizált költsége $O(n)/n = O(1)$

Amortizált költségelemzés – könyvelési módszer

- Különböző műveletekre különböző költséget számolunk el
  - A i-edik műveletre elszámolt $\hat{c}_i$ *amortizációs költség* tetszőlegesen eltérhet annak c_i **tényleges költség**étől

Amortizált költségelemzés – könyvelési módszer

- Különböző műveletekre különböző költséget számolunk el
  - A i-edik műveletre elszámolt $\hat{c}_i$ *amortizációs költség* tetszőlegesen eltérhet annak c_i **tényleges költség**étől
  - Azonban minden n hosszú műveletsorra teljesüljön, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

azaz a mindenkori hitelegyenleg $\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i - c_i\right)$ nemnegatív

Könyvelési módszer használata – példa

- A NÖVEL művelet működése során könyveljünk el 2 egységnyi költséget egy bit 1-re állításához
- A költség fele a majdani visszaállításra félretett „hitel”

Kérdés

A CSÖKKENT műveletet bevezetését követően is maradna az $O(1)$ amortizált költség?

Könyvelési módszer használata – példa

- A NÖVEL művelet működése során könyveljünk el 2 egységnyi költséget egy bit 1-re állításához
- A költség fele a majdani visszaállításra félretett „hitel”
- A NÖVEL minden hívása során 1 bitet állítunk 1-re
  - n végrehajtás $\Rightarrow$ $2n$ összköltség $\Rightarrow$ $O(1)$ költség/végrehajtás

Kérdés

A CSÖKKENT műveletet bevezetését követően is maradna az $O(1)$ amortizált költség?

Nem, $O(k)$ lenne.

Könyvelési módszer használata – dinamikusan bővülő tömb

- Dinamikusan bővülő tömb betelésekor megduplázza méretét, és a benne aktuálisan szereplő értékeket a megnövelt méretű tömbbe másolja
- Egy elem beszúrásához rendeljünk 3 *kreditet*
  - Az első egység elhasználódik a kulcs beszúrása kapcsán
  - A második egységet saját maga majdani (első alkalommal történő) átmásolására tartsa fenn
  - A harmadik egységből minden csúcs adományoz egy már 0 egyenlegű kulcsnak a másolására (tudja, hogy vissza fogja kapni)

Könyvelési módszer használata – dinamikusan bővülő tömb

- Dinamikusan bővülő tömb betelésekor megduplázza méretét, és a benne aktuálisan szereplő értékeket a megnövelt méretű tömbbe másolja
- Egy elem beszúrásához rendeljünk 3 *kreditet*
  - Az első egység elhasználódik a kulcs beszúrása kapcsán
  - A második egységet saját maga majdani (első alkalommal történő) átmásolására tartsa fenn
  - A harmadik egységből minden csúcs adományoz egy már 0 egyenlegű kulcsnak a másolására (tudja, hogy vissza fogja kapni)

Észrevétel

Amikor bővítünk, ugyanannyi kulcsnak lesz 0 az egyenlege, mint ahánynak 2.

Amortizált költségelemzés – Potenciálmódszer

- Az adatszerkezet i pillanatbeli állapotát jelöljük D_i-vel
- Vezessük be a $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **ponteciálfüggvény**t, ami az adatszerkezet egy D_i állapotához rendel egy **potenciál**t
- Az amortizációs költség legyen $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

Amortizált költségelemzés – Potenciálmódszer

- Az adatszerkezet i pillanatbeli állapotát jelöljük D_i-vel
- Vezessük be a $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **ponteciálfüggvényt**, ami az adatszerkezet egy D_i állapotához rendel egy **potenciált**
- Az amortizációs költség legyen $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

n hosszú műveletsorra a teljes *teleszkopikus összeg*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \Phi(D_n) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

- Az adatszerkezet i pillanatbeli állapotát jelöljük D_i-vel
- Vezessük be a $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **ponteciálfüggvényt**, ami az adatszerkezet egy D_i állapotához rendel egy **potenciált**
- Az amortizációs költség legyen $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

n hosszú műveletsorra a teljes *teleszkopikus összeg*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \Phi(D_n) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

- Olyan potenciálfüggvényt keresünk, melyre $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$, mivel ekkor nyilvánvalóan $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$ is teljesül

Amortizált költségelemzés – Potenciálmódszer

- Az adatszerkezet i pillanatbeli állapotát jelöljük D_i-vel
- Vezessük be a $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ **ponteciálfüggvényt**, ami az adatszerkezet egy D_i állapotához rendel egy **potenciált**
- Az amortizációs költség legyen $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$

n hosszú műveletsorra a teljes *teleszkopikus összeg*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \Phi(D_n) - \Phi(D_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

- Olyan potenciálfüggvényt keresünk, melyre $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0)$, mivel ekkor nyilvánvalóan $\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$ is teljesül

Kényelmes megoldás

$\Phi(D_0) = 0$, és lássuk be, hogy $\Phi(D_i) \geq 0$ minden i-re

Amortizált költségelemzés – Példa

- Legyen $\Phi(D_i) = b_i$ a NÖVEL művelet i-szeri alkalmazására a számlálóban szereplő 1 értékű bitek száma
- Jelölje t_i a NÖVEL művelet i-edik végrehajtásakor 1-ről 0-ra változó bitek számát (vagyis $c_i \leq t_i + 1$)
  - Vegyük észre[1], hogy $\Phi(D_i) = b_i \leq b_{i-1} - t_i + 1$
  - Vagyis a potenciálváltozás $\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \leq 1 - t_i$
  - Így az amortizációs költség $\hat{c}_i \leq c_i + 1 - t_i = t_i + 1 + 1 - t_i = 2$

Észrevétel

Mivel $\Phi(D_0) = 0$ és minden $\Phi(D_i) \geq 0$, így az n művelet amortizált költségének összege felső korlátja a tényleges összköltségnek ($O(n)$)

[1] $b_i = 0$ eset miatt egyenlőtlenség

Fibonacci kupacok

- Binomiális kupachoz hasonló (annál kötetlenebbül strukturált), amortizált értelemben jobban viselkedő adatszerkezet
    - A kupacot alkotó fák *nem* rendezettek
    - A csúcsok gyerekei kétirányú ciklikus listával összekapcsoltak
    - min[H] pointer a gyökérlista minimális kulcsú csúcsára mutat
    - A fák sorrendje a gyökérlistában tetszőleges
    - A kupacban találhatók megjelölt csúcsok

Megjelölt csúcsok

- Egy csúcs megjelölt, ha már vesztett el gyereket azóta, hogy egy másik csúcs gyerekévé vált
  - Létrehozásukkor jelöletlenek a csúcsok

Megjelölt csúcsok

- Egy csúcs megjelölt, ha már vesztett el gyereket azóta, hogy egy másik csúcs gyerekévé vált
  - Létrehozásukkor jelöletlenek a csúcsok

A potenciálfüggvény

$$\Phi(H) = t(H) + 2m(H)$$

- $t(H)$ a kupac gyökérlistájában található fák száma
- $m(H)$ a kupacban található megjelölt csúcsok száma

Megjelölt csúcsok

- Egy csúcs megjelölt, ha már vesztett el gyereket azóta, hogy egy másik csúcs gyerekévé vált
  - Létrehozásukkor jelöletlenek a csúcsok

A potenciálfüggvény

$$\Phi(H) = t(H) + 2m(H)$$

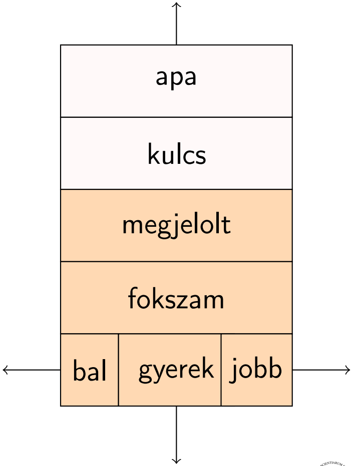
- $t(H)$ a kupac gyökérlistájában található fák száma
- $m(H)$ a kupacban található megjelölt csúcsok száma

Észrevétel

A potenciál végig nemnegatív, így a teljes amortizált költség felső korlátja a műveletsorozat teljes aktuális költségének felső korlátja is

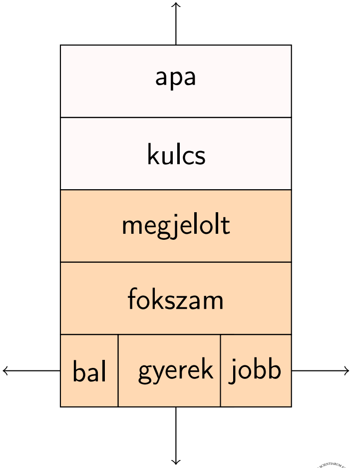
Fibonacci kupacok implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    Node *apa;
    int fokszam;
    boolean megjelolt;
    Node *gyerek;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Fibonacci kupacok implementációja

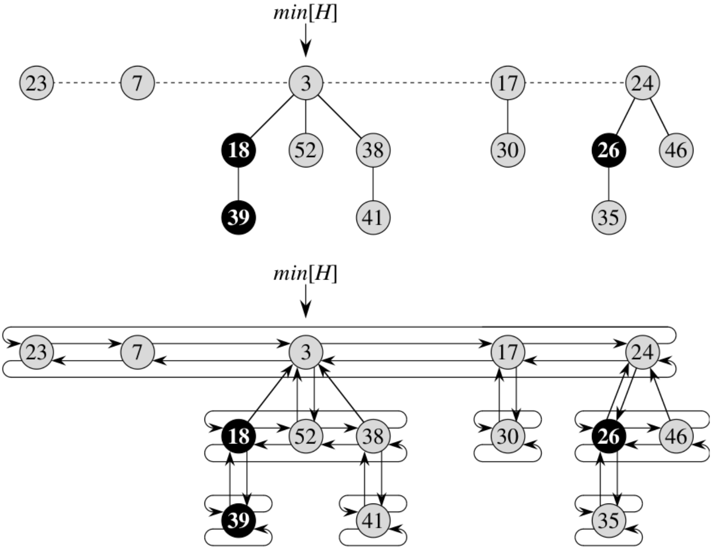
```
class Node {
    Object kulcs;
    Node *apa;
    int fokszam;
    boolean megjelolt;
    Node *gyerek;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



Emlékeztető

A megjelöltség azt jelöli, hogy a csúcs vesztette-e el gyerekét mióta egy másik csúcs gyerekévé vált

Fibonacci kupacok szerveződése



[1] *Forrás: CLRS: Új algoritmusok 20.1 ábrája*

Bináris vs. binomiális vs. Fibonacci kupac

Kupacműveletek legrosszabb esetbeli viselkedése

Művelet	Bináris	Binomiális	Fibonacci[2]
MIN-KERES	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
SORBOL-MIN	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
BESZÚR	$O(\log n)$	$O(\log n)$ [3]	$O(1)$
KULCSOTCSÖKKENT	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
EGYESÍT	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
TÖRÖL	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

[2] amortizált költségek
[3] amortizált költségben $O(1)$

A Fibonacci kupacok viselkedése

- Remek választás, ha tudjuk, hogy a SORBOL-MIN és TÖRÖL műveleteket keveset használjuk
  - Bizonyos gráfalgoritmusok (pl. Dijkstra) esetében a KULCSOTCSÖKKENT metódus alkalmazása dominál

A Fibonacci kupacok viselkedése

- Remek választás, ha tudjuk, hogy a SORBOL-MIN és TÖRÖL műveleteket keveset használjuk
  - Bizonyos gráfalgoritmusok (pl. Dijkstra) esetében a KULCSOTCSÖKKENT metódus alkalmazása dominál

Ha nem hajtunk végre KULCSOTCSÖKKENT és TÖRÖL műveletet

Egy (fokszám alapján) rendezetlen ”binomiális kupacot” kapunk
$\rightarrow \log n$ a kupacbeli csúcsok maximális fokszámának felső korlátja

A Fibonacci kupacok viselkedése

- Remek választás, ha tudjuk, hogy a SORBOL-MIN és TÖRÖL műveleteket keveset használjuk
  - Bizonyos gráfalgoritmusok (pl. Dijkstra) esetében a KULCSOTCSÖKKENT metódus alkalmazása dominál

Ha nem hajtunk végre KULCSOTCSÖKKENT és TÖRÖL műveletet

Egy (fokszám alapján) rendezetlen "binomiális kupacot" kapunk $\rightarrow \log n$ a kupacbeli csúcsok maximális fokszámának felső korlátja

KULCSOTCSÖKKENT és TÖRÖL műveletek végrehajtása esetén

$\log_\phi n = O(\log n)$ a kupacbeli csúcsok maximális fokszámának felső korlátja $\rightarrow$ innen jön a Fibonacci-kupac elnevezés is (mivel az i-edik Fibonacci szám fölírható $\frac{\phi^i - \psi^i}{\sqrt{5}}$ alakban, ahol $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$O(1)$ idejű műveletek

Egyesít és Beszúr

H_1 és H_2 Fibonacci kupacok egyesítésekor a kupacok gyökérlistáit összefűzzük, (min[H] aktualizálásán túl) **más teendőnk nincs**

Min-keres

min[H] explicit tárolásából adódóan $O(1)$

Minimális kulcs kivágása

- Ez az a pont, amikor próbáljuk a binomiális kupachoz hasonlóvá tenni a Fibonacci kupacunkat
  1. min[H] által meghatározott csúcsot eltávolítjuk a gyökérlistából
  2. min[H] gyerekeit a gyökérlistába delegáljuk
  3. Összevonjuk a gyökérlistában szereplő azonos fokszámú fákat (segédtömb használatával)

Kulcs értékének csökkentése

1. Ha a kulcs csökkentett értéke túl kicsi, akkor a csúcsot kivágjuk és a gyökérlistába helyezzük
2. A kivágott csúcs szülejét (ha az nem gyökérlistabeli) megjelöltté tesszük
3. Amennyiben egy már megjelölt csúcs vesztené el egy újabb gyerekét, úgy azt is rekurzívan a gyökérlistába visszük (megjelöltségét eltávolítjuk)

Önszervező keresőfák (Splay tree)

- Olyan keresőfa, ami bármely művelet végrehajtása után (még egy sikertelen keresés után is), az utoljára érintett csúcsot forgatások segítségével a gyökérbe viszi
- Legrosszabb esetben $O(n)$ magasságú, de amortizált tekintetben a műveletei $O(\log n)$-beliek
- Működése mögötti intuíció: lehetnek sűrűbben érintett elemei a fának $\Rightarrow$ ne hagyjuk őket „lesüllyedni”

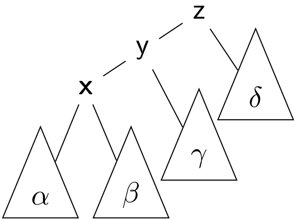
Önszervező keresőfák (Splay tree)

- Olyan keresőfa, ami bármely művelet végrehajtása után (még egy sikertelen keresés után is), az utoljára érintett csúcsot forgatások segítségével a gyökérbe viszi
- Legrosszabb esetben $O(n)$ magasságú, de amortizált tekintetben a műveletei $O(\log n)$-beliek
- Működése mögötti intuíció: lehetnek sűrűbben érintett elemei a fának $\Rightarrow$ ne hagyjuk őket „lesüllyedni”

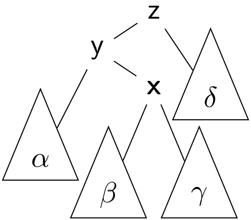
Lehetséges hátránya

Mivel még egy (sikertelen) KERES művelet is változtat a fa struktúráján, így többszálú használata problémás.

- Ha a gyökérbe juttatni kívánt **x** csúcs már a jelenlegi *y* gyökérelem bal (jobb) fia, akkor egyszerűen forgassunk *y* körül jobbra (balra)
- Egyébként 2 lehetőség van (és ezek szimmetrikusai) **x** gyökérbe juttatására



1. z csúcs körül jobbra majd
2. y csúcs körül jobbra forgatunk

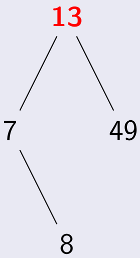


1. y csúcs körül balra majd
2. z csúcs körül jobbra forgatunk

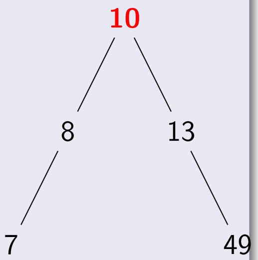
Splay tree – példák

Eredeti fa

KERES(21) után



BESZÚR(10) után



Összegzés

- Amortizált költségelemzéssel az adatszerkezetek hosszú távú legrosszabb esetbeli viselkedését modellezhetjük
- Amortizált költségelemzés szempontjából a Fibonacci-kupac a megismert leghatékonyabb kupac
- Egyes gráfalgoritmusok implementálásához kifejezetten hasznos választás lehet