

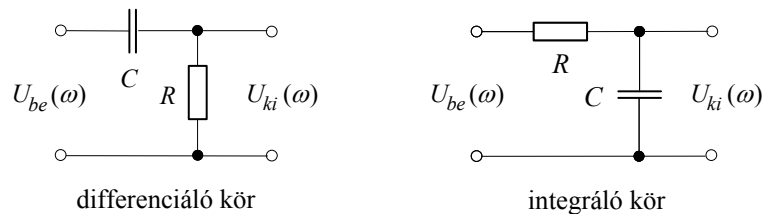
21. DIFFERENCIÁLÓ ÉS INTEGRÁLÓ ÁRAMKÖRÖK VIZSGÁLATA

Célkitűzés:

- A legegyszerűbb elektronikai passzív áramkörök tulajdonságainak megértése.

I. Elméleti áttekintés

Az 1. ábrán látható áramköröket differenciáló (D), illetve integráló (I) áramkörnek nevezik. Szokásos még a felüláteresztő vagy alulvágó, illetve az aluláteresztő vagy felülvágó szűrő elnevezés is. A két áramkör közötti különbséget a kimenet jelenti. A kimenő feszültség a differenciáló áramkörnél az ellenálláson ($U_{ki,D} = U_R$), az integráló áramkörnél a kondenzátoron ($U_{ki,I} = U_C$) eső feszültség.



1. ábra

Mindkét áramkörnél érvényes, hogy

$$U_{be}(t) = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R + \frac{Q(t)}{C}. \quad (1)$$

A kimenő feszültségek:

$$U_{ki,D}(t) = I(t)R, \quad \text{illetve} \quad U_{ki,I}(t) = \frac{Q(t)}{C}. \quad (2a,b)$$

Ha $U_{be}(t)$ túlnyomó része a kondenzátoron esik, (ami a bemenő feszültség lassú változása esetén teljesül), akkor $U_{be}(t) \approx Q(t)/C$, tehát

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \approx C \frac{dU_{be}(t)}{dt}. \quad (3)$$

Ezzel a differenciáló kör kimenő feszültsége:

$$U_{ki,D}(t) = R \cdot I(t) = RC \frac{dU_{be}(t)}{dt}. \quad (4)$$

Ez indokolja a differenciáló áramkör elnevezést.

Ha a feszültség megoszlása fordított, azaz $U_R \gg U_C$, (ami általában csak rövid ideig teljesül), akkor $U_{be}(t) \approx I(t)R$ és ezért

$$U_{ki,I}(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q(0)}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t') dt' = \frac{Q(0)}{C} + \frac{1}{CR} \int_0^t U_{be}(t') dt', \quad (5)$$

tehát a kimenő feszültség a bemenő feszültség integráljával arányos, ezért nevezik ezt az áramkört integráló áramkörnek.

A bemenő és a kimenő feszültség kapcsolatát általában az (1) deriválásával kapható

$$\frac{dU_{be}(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} R + \frac{1}{C} I(t) \quad (6)$$

egyenletből célszerű meghatározni. Példaként vizsgáljuk meg a feszültségugrás hatását. Legyen

$$U_{be}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0; \\ U_0, & \text{ha } t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

A (7) egyenletből következik, hogy a kondenzátor töltése a $t = 0$ időpillanatban zérus. Ekkor a (6) egyenletnek az $I(0) = U_0/R$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását keressük.

Könnyen belátható, hogy

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau}, \quad (8)$$

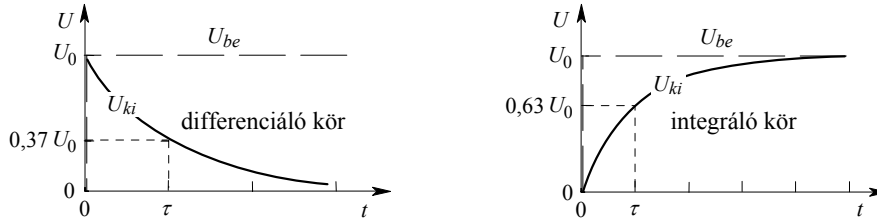
ahol $\tau = RC$. Ennek megfelelően

$$U_{ki,D}(t) = I(t)R = U_0 e^{-t/\tau}, \quad (9)$$

és

$$U_{ki,I}(t) = U_C(t) = U_{be}(t) - I(t)R = U_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (10)$$

A fenti két függvény a 2. ábrán látható. Az ábrából látszik, hogy a differenciáló kör kimenetén a feszültségugrás megegyezik a bemenő feszültség értékével, majd a feszültség lassan nullára csökken. A (4) összefüggés csak $t \gg \tau$ tartományban teljesül. Az integráló kör kimenetén a feszültség kezdetben ($t \ll \tau$) közelítőleg lineárisan növekszik, ekkor még teljesül az (5) összefüggés, majd a feszültség lassan megközelíti bemenő feszültséget. A differenciáló kör kimenő feszültsége $t = \tau$ idő alatt a kezdeti érték 37 %-ára csökken, az integráló kör kimenő feszültsége pedig 63 %-ára növekszik.



2. ábra

Oszilloszkópos vizsgálatoknál egyszeri feszültségugrás helyett általában periodikus négyszögjel kapcsolunk az áramkör bemenetére. Ekkor a kimenő feszültség is periodikus lesz és oszcilloszkópon könnyen vizsgálható. A látott kép attól függ, hogy a négyszögjel T periódusideje hogyan viszonyul az áramkör $\tau = RC$ időállandójához. A 3. ábrán a $T = 20\tau$, $T = 5\tau$, $T = \tau$ és $T = 0,2\tau$ eseteknek megfelelő oszcilloszkópos képeket látjuk a D és az I körnél.

Megjegyezzük, hogy az áramkörök kimenő feszültsége periodikus jelek esetén kissé eltér a (9), illetve a (10) összefüggésektől. Ha a periodikus négyszögjel 0 és U_0 feszültségek között változik, és időben szimmetrikus, azaz mindkét feszültség periódusonként $T/2$ ideig tart, akkor (itt nem részletezett megfontolások szerint) differenciáló áramkörnél:

$$U_{ki,D}(t) = \frac{U_0}{1+\alpha} e^{-t/\tau}, \quad (11)$$

$$U_{ki,D}(t') = -\frac{U_0}{1+\alpha} e^{-t'/\tau}, \quad (12)$$

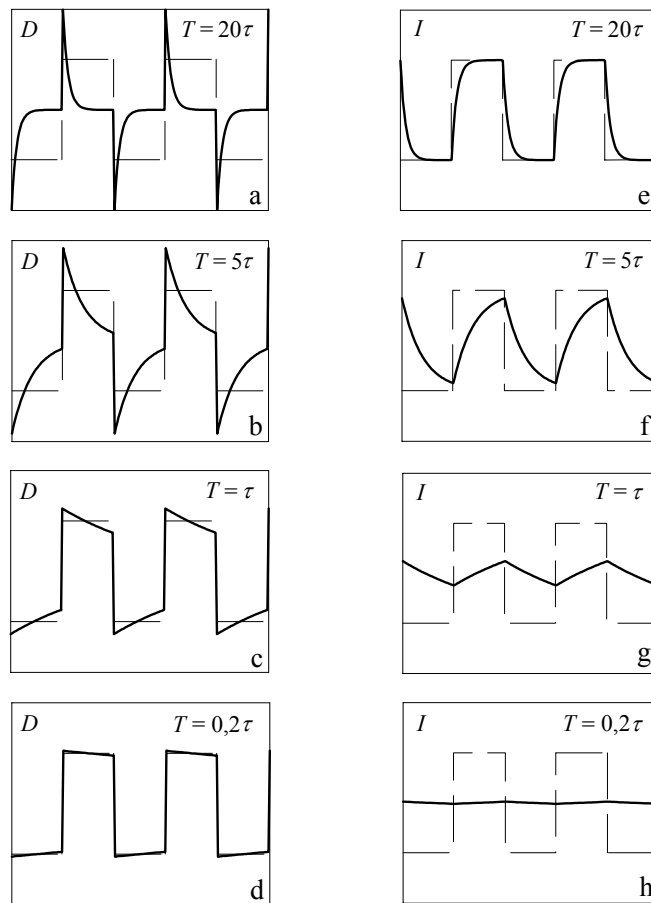
illetve integráló áramkörnél:

$$U_{ki,I}(t) = \frac{U_0}{1+\alpha} (1 + \alpha - e^{-t/\tau}), \quad (13)$$

$$U_{ki,I}(t') = \frac{U_0}{1+\alpha} e^{-t'/\tau}, \quad (14)$$

ahol $\alpha = \exp(-T/2\tau)$, és a t időt a feszültség pozitív, a t' időt a feszültség negatív irányú ugrásától mérjük. A (11)-(14) összefüggések felírásánál feltettük azt, hogy a periodikus jelet a mérés előtt legalább 10τ idővel előbb bekapcsoltuk („stacionárius megoldás”).

A differenciáló áramkör kimenetén – amint a 3.a ábrán látható – $T \gg \tau$ esetén egy gyorsan lecsengő feszültségugrás („tüske”) jelenik meg. Az ilyen jelet impulzustechnikai áramkörökben indítójelként használják. Ha az időállandó sokkal nagyobb a jel periódusidejénél ($\tau \gg T$), akkor a bemenő és a kimenő jelek alakja gyakorlatilag jól megegyezik (l. 3.d



3. ábra

ábra). Megjegyezzük, hogy ez nemcsak négyszög-, hanem bármilyen jel esetén igaz. Ezt hasznosítják pl. az oszcilloszkópoknál, ahol a bemeneti kapcsoló AC állásánál a jel egy nagy időállandójú differenciáló körön át jut a bemeneti erősítőre. Ebben a beállításban egy nagy egyenfeszültségre szuperponált kis amplitúdójú időben változó jel is könnyen megvizsgálható. A differenciáló körön keresztül csak a váltófeszültség jut át a bemeneti erősítőre, így az érzékenység kellően nagyra választható.

Minden erősítő valamilyen τ időállandójú integráló körnek tekinthető. Ha τ sokkal kisebb, mint a vizsgált jel időtartama, akkor az erősített jel és a kimenő jel alakja gyakorlatilag megegyezik. A 3.e ábrán látható, hogy $\tau \ll T$ esetén az integráló kör kimenetén látható jel alakja jól megközelíti a négyszögjelet. Ha az időállandót növeljük, akkor a kimeneten egyre inkább a bemenő feszültség átlaga jelenik meg és a bemenő jel alakja egyre kevésbé

vehető ki (l. 3.h ábra). Ezt a tényt pl. a tápegységek építésénél – ahol „sima” egyenfeszültség előállítás a cél – is hasznosítják.

Színuszos bemenő feszültség esetén a kimenő feszültséget a komplex impedanciák módszerével lehet legkönnyebben meghatározni. A bemeneti feszültség hatására a D , illetve az I áramkörben

$$I(\omega) = \frac{U_{be}(\omega)}{R + \frac{1}{jC\omega}} \quad (15)$$

áram folyik. Ezt felhasználva a kimenő feszültséget könnyű felírni.

Vezessük be az

$$\omega_p = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (16)$$

jelölést. Az ω_p mennyiséget pólusfrekvenciának nevezzük. Használata jelentősen egyszerűsíti a frekvenciafüggő hálózatok leírását. Ekkor (15)-ből egyszerű átalakítások után

$$I(\omega) = \frac{jC\omega}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} U_{be}(\omega). \quad (17)$$

Az $I(\omega)$ áram segítségével könnyű a kimenő feszültséget megadni:

$$U_{ki,D}(\omega) = I(\omega)R = \frac{j\frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} U_{be}(\omega), \quad (18)$$

illetve

$$U_{ki,I}(\omega) = I(\omega)\frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} U_{be}(\omega). \quad (19)$$

A kimenő és bemenő feszültségek kapcsolatát célszerű a szűrő $a(\omega)$ átviteli függvényével jellemezni:

$$a(\omega) = \frac{U_{ki}(\omega)}{U_{be}(\omega)}. \quad (20)$$

Ezzel

$$a_D(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}, \quad (21)$$

illetve

$$a_I(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}. \quad (22)$$

$U_{ki}(\omega)$ és $U_{be}(\omega)$ kapcsolatát komplex szám írja le. Ez azt fejezi ki, hogy a két feszültség között φ fáziseltérés van. Az elmélet szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}[a(\omega)]}{\operatorname{Re}[a(\omega)]}. \quad (23)$$

Pozitív φ esetén $U_{ki}(\omega)$ siet, negatívnál késik az $U_{be}(\omega)$ feszültséghez viszonyítva.

A differenciáló áramkörnél az $\omega \ll \omega_p$ tartományban $a_D(\omega) \approx j\omega/\omega_p$, tehát $U_{ki}(\omega) \ll U_{be}(\omega)$, más szóval a differenciáló kör a kisfrekvenciás jeleket erősen csillapítja (csökkentí), ezért alulvágó vagy felüláteresztő szűrőnek is nevezik;

- kisfrekvencián ($\omega \ll \omega_p$), $\varphi \approx +\pi/2$;
- az áramkörre jellemző $\omega = \omega_p$ körfrekvenciánál $a_D(\omega_p) = j/(1+j)$, tehát $|a_D(\omega_p)| = 1/\sqrt{2}$ és $\varphi = \pi/4$;
- nagy ($\omega \gg \omega_p$) frekvencián $a_D(\omega) \approx 1$, a fáziskésés elhanyagolható.

Az integráló körnél

- kis ($\omega \ll \omega_p$) frekvencián $a_I(\omega) \approx 1$;
- az ω_p frekvenciánál $I(\omega_p) = 1/(1+j)$, tehát $|a_I(\omega_p)| = 1/\sqrt{2}$ és a fázisszög $-\pi/4$;
- nagy ($\omega \gg \omega_p$) frekvencián $a_I(\omega) \approx j\omega_p/\omega$, azaz a frekvencia növelésével csökken a kimenő feszültség, a fáziskésés pedig tart $-\pi/2$ -höz. Ezért nevezik az integráló áramkört felülvágó vagy aluláteresztő szűrőkörnek.

Az amplitúdó- és fázisviszonyok legegyszerűbben a *Bode*-diagramon tekinthetők át. Ez egy egyszerűsített, törtvonalas ábrázolás. A függőleges tengelyen az átviteli függvény abszolút értékét dB-ben ábrázoljuk, a vízszintes tengelyen pedig a frekvenciát logaritmikus léptékben vesszük fel.

Mint ismeretes, a dB értéket két feszültség esetén a

$$20 \lg \left| \frac{U_2}{U_1} \right| \quad (24)$$

mennyiség adja. Most $U_2 = U_{ki}$, $U_1 = U_{be}$, tehát a zárójelben éppen $a(\omega)$ szerepel. Az I. táblázatban tájékozódásul néhány a értékhez tartozó dB érték látható.

A Bode-féle ábrázolásnál a frekvencia 10-szeres megnöve-
lése az abszcisszán – a logaritmikus skála miatt – éppen 1-gyel
való jobbralépést jelent. A 10-szeres frekvenciaviszonyt de-
kád-nak nevezzük. Ezért a diagramon ábrázolt egyenesek mere-
dekségét dB/dekád-ban szokás kifejezni.

Vizsgáljuk meg a differenciáló kör Bode-diagramját az $\omega \ll \omega_p$ tartományban. Ekkor közelítőleg

$$a_D(\omega) = j \frac{\omega}{\omega_p}, \quad (25)$$

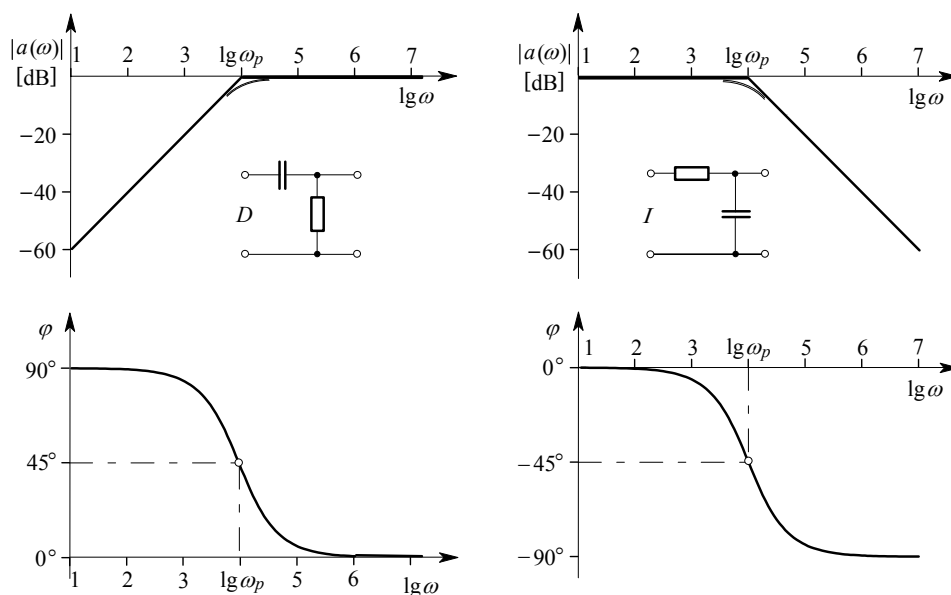
ebből

$$20 \lg |a_D(\omega)| = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_p. \quad (26)$$

Lineáris skálán	dB skálán
10	20
100	40
1000	60
0,1	-20
0,01	-40
0,001	-60
2	6
1/2	-6
$1/\sqrt{2}$	-3

Mivel az abszcissza tengelyen a $\lg \omega$ -t ábrázoljuk (l. 4. ábra), ezért a (26) összefüggés egy olyan egyenes egyenlete, amely-

I. táblázat



4. ábra

nek a meredeksége 20 dB/dekád, és az $\omega = \omega_p$ pontban metszi az abszcisszát. Az $\omega > \omega_p$ tartományban $a(\omega) \approx 1$, ami 0 dB-nek felel meg.

Az integráló körnél az $\omega < \omega_p$ tartományban $a(\omega) \approx 1$, míg az $\omega > \omega_p$ tartományban

$$20\lg|a_I(\omega)| = -20\lg\omega + 20\lg\omega_p. \quad (27)$$

Ez egy olyan egyenes egyenlete, amely az $\omega = \omega_p$ ponttól indul és a meredeksége -20 dB/dekád.

A két áramkör *Bode*-diagramja és a fázisszög frekvenciafüggése a 4. ábrán látható. Ez a függés a legtöbb ilyen jellegű áramkörnél teljesül. Ha a közelítő egyenes meredeksége 0, akkor a fázisszög is 0° . Ha a meredekség pozitív, akkor φ is pozitív, tehát a fázis siet, ha a meredekség negatív, φ is az, tehát a fázis késik. (Bonyolultabb áramköröknél a közelítő egyenesek meredeksége $20 \cdot k$, ahol k egész szám. Ebben az esetben a töréspontoktól távol a fázisszög $\varphi = k\pi/2$).

A differenciáló kör *Bode*-diagramján a kisfrekvenciás tartományban az egyenes 20 dB/dekád meredekségű és $\varphi = 90^\circ$. A töréspontban $\varphi = 45^\circ$, nagyfrekvencián $\varphi = 0^\circ$.

Az integráló körnél kisfrekvencián ($\omega < \omega_p$) az egyenes meredeksége 0, $\varphi = 0^\circ$. A töréspontban $\varphi = -45^\circ$. Nagyfrekvencián a meredekség -20 dB/dekád, és $\varphi = -90^\circ$.

Az ábrákon szaggatott vonallal rajzoltuk be $a(\omega)$ pontos értékét. Látható, hogy eltérés csak töréspont közelében van. A töréspontban a pontos görbe 3 dB-lel a közelítő egyenes alatt van.

II. A mérés menete

A differenciáló és az integráló áramkörök tulajdonságainak vizsgálatát az 1. ábrán látható kapcsolásban végezzük. Az egyes áramkörök kapcsolótáblán összeállítva található. A bemenetre egy szinuszgenerátor jelét csatoljuk. Az U_{be} és U_{ki} méréséhez olyan műszert kell választani, ami nagy frekvencián is jól mér.

Az átviteli függvénnyel egyidejűleg célszerű a fázisszöget is mérni „A katódsugar- oszcilloszkóp, mérések oszcilloszkóppal” című gyakorlatnál leírt fázisszög-meghatározási módszerek egyikével, vagy fázisszög mérővel.

Négyszögjellel az áramkörök időállandója megbecsülhető. Ha $T \gg \tau$ (legalább $5\tau = T$), akkor a 2. ábra alapján a csillapodásból vagy az emelkedésből τ kiszámítható. Ennél a mérésnél az áramkör bemenetére kapcsoljuk a négyszögjelet és a kimenő jelet oszcilloszkópon vizsgáljuk. A függőleges és a vízszintes eltérítést úgy állítsuk be, hogy a kép jól értékelhető legyen.

Feladatok:

Az alábbi feladatok az integráló és a differenciáló áramkörrel is végrehajthatók.

1. Mérőhíddal mérje meg a kiadott (D vagy I) áramkör ellenállásának és kondenzátorának értékét!

2. Számítsa ki ω_p értékét, és ebből azokat a frekvenciákat ($f = \omega/2\pi$), amelyeknél az átviteli függvény mérését fogja végezni! Legyen a mért frekvenciatartomány $(0,1 - 10)f_p$, és a frekvenciákat úgy válassza meg, hogy a $\lg f$ (illetve $\lg \omega$) ábrázolásnál a mérési pontok egyenlő távolságra essenek. Nagyságrendenként 10 pontban mérjen. (A pólusfrekvencia környékén célszerű sűrűbben mérni.) Számítsa ki az f frekvenciákhoz tartozó ω -kat is!
3. Állítsa össze a mérőkört és szinuszos bemenő jelnél végezze el az $a(f)$, illetve a $\varphi = \varphi(f)$ mennyiségek számításához szükséges méréseket! Számítsa ki az $a(\omega)$ értékét dB-ben, valamint $\varphi(\omega)$ -et! A mérési eredményeket és az azokból számított értékeket táblázatban rögzítse. Ábrázolja a dB-ben számított átviteli függvényt, valamint a fáziseltérés értékét $\lg \omega$ függvényében. Az $a(\omega)$ grafikonra rajzolja be a *Bode*-diagramot is!
4. Határozza meg a -3 dB-nek megfelelő frekvenciát és hasonlítsa össze az R és C mérése alapján kiszámított értékkel!
5. Kapcsoljon négyszögjelet az áramkör bemenetére és kimeneti jel oszcilloszkópos vizsgálatával határozza meg τ értékét majd ebből ω_p -t!
6. Állítsa elő és vizsgálja meg, valamint rajzolja le a 3. ábrának megfelelő jelalakokat! Néhány mondatban indokolja meg a látottakat!

Kérdések:

1. Mi a dB-ben kifejezett erősítés definíciója? Mi az előnye a dB alkalmazásának?
2. Mi a *Bode*-diagram?
3. Mi a pólusfrekvencia? Mi ennek a fizikai jelentése?
4. Hogyan kapjuk meg a felüláteresztő és az aluláteresztő szűrő *Bode*-diagramját?
5. Hogyan kapjuk meg számítással, illetve méréssel a differenciáló, valamint az integráló áramkör pólusfrekvenciáját?
6. Miben különbözik az aluláteresztő és a felüláteresztő szűrő amplitúdó- és fáziskarakterisztikája?
7. Mi a torzításmentes jelátvitel feltétele?
8. Hogyan különböztethetjük meg oszcilloszkópos vizsgálattal a pozitív fáziseltolódást a negatívtól?
9. Differenciáló és integráló kör esetén milyen frekvenciatartományban igaz az, hogy a kimenő jel a bemenő jel differenciálhányadosa, illetve integrálja?

Ajánlott irodalom:

1. Török M.: Elektronika, JATEPress, Szeged, 2000.
2. Fodor Gy.: Elméleti elektrotechnika II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
3. Simonyi K.: Elméleti villamosságtan, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.