14. Gyakorlat
Affin transzformációk

Affin transzformációnak nevezzük azokat transzformációkat, amelyek során az egyenesek egyenesek maradnak és a szögek nem változnak.

Az affin transzformációk közé tartozik a forgatás, eltolás és a skálázás.
(A transzformációs mátrixoknál a homogén koordinátás alakot használjuk.)

Forgatás:
Kétdimenzióban a forgatást a képre merőleges tengelyen végezzük, jelen esetben a Z tengelyen.
Egy (x,y) pont elforgatottját a következőképpen tudjuk kiszámítani. Az elforgatott pont koordinátáit (x', y')-vel jelöljük. α az elforgatás szögét jelöli.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eltolás:
Az eltolás nagyon egyszerűen elvégezhető, hiszen a *x* és *y* koordinátákból csak ki kell vonni az eltolás mértékét. A mátrixban *tx* az x-tengely mentén történő, *ty* pedig az y-tengely menti eltolás mértékét jelöli.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skálázás, átméretezés:
A skálázás is elvégezhető egy mátrixszorzással. A tengelyenkénti skálafaktorok (s_x, s_y) a mátrix diagonális elemei lesznek.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Összetett transzformáció:
Ha nem csak egy típusú transzformációt szeretnénk végrehajtani, akkor a mátrixszorzást a megfelelő sorrendben kell végrehajtani, ha pl. egy *q* pontot a *q'*-be transzformálunk, akkor

q' = S*R*T*q

sorrendben kell végrehajtani a mátrixszorzásokat, ahol S a skálázási, R a forgatási, T pedig az eltolási mátrixot jelöli. Vagyis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nem fontos minden pontot mindhárom mátrixszal beszorozni, hiszen, ez nagyon számításigényes művelet. Kiszámolhatjuk előre a transzformációs mátrixot, és így mindössze egyetlen mátrixszal kell szorozni minden pontot.

$$\mathbf{q' = M * q,}$$

ahol M = S * R * T.

Az összetett affin transzformációs mátrixunk inverzét általában sokkal bonyolultabb kiszámolni, mintha egyenként számolnánk ki. Ezért élhetünk azzal megoldással, hogy rendre balról szorzunk a legbaloldalibb mátrix inverzével.

$$\mathbf{q' = S * R * T * q}$$
$$\mathbf{T^{-1} * R^{-1} * S^{-1} * q' = q}$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & -ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elvégezve a mátrixszorzást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{s_x}\cos(\alpha) & \frac{1}{s_y}\sin(\alpha) & -tx \\ -\frac{1}{s_x}\sin(\alpha) & \frac{1}{s_y}\cos(\alpha) & -ty \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

A két koordináta így már nagyon egyszerűen kiszámolható:

$$x = \frac{1}{s_x}\cos(\alpha) x' + s_y \sin(\alpha) y' - tx$$
$$y = -\frac{1}{s_x}\sin(\alpha) x' + s_y \cos(\alpha) y' - ty$$

Mintavételezés transzformációk esetében

Forward transzformáció:

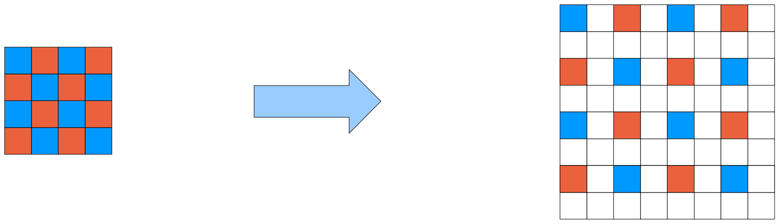
Forward transzformáció esetében van egy képmátrix, amit transzformálni szeretnénk. Kérdés: hová kerülnek az egyes pixelek intenzitásai?

Tekintsünk egy pixelt x és y koordinátájával, és egy T transzformációs mátrixot. A pixel új koordinátáit x' és y' jelöli.

Ekkor

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

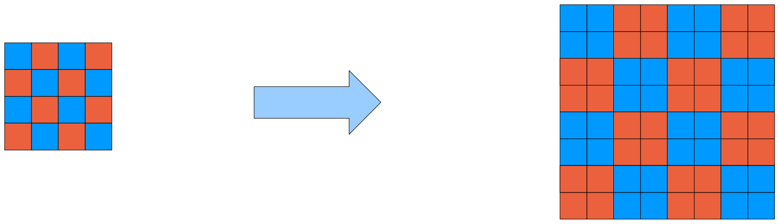
Forward transzformáció esetében végigmegyünk a transzformálandó képen, és minden pixelnek meghatározzuk az új helyét. A gond az, hogy nem biztos, az eredmény képen minden pixel kap értéket.



Backward transzformáció:
Ebben az esetben nem azt határozzuk meg, hogy egy adott képpont hová kerül a transzformáció után, hanem azt, hogy az eredmény kép egy adott képpontja, hol helyezkedett el eredetileg.
Vagyis az eredmény kép minden egyes képpontjához tudunk találni valamilyen értéket, innen vesszük az intenzitást.
Hogyan számítjuk ki, hogy egy képpont hol helyezkedett el eredetileg?
A válasz egyszerű:

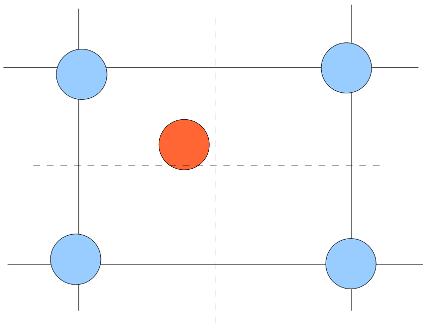
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Diszkrét terekben történő transzformációk esetében érdemes ezt a módszert használni.

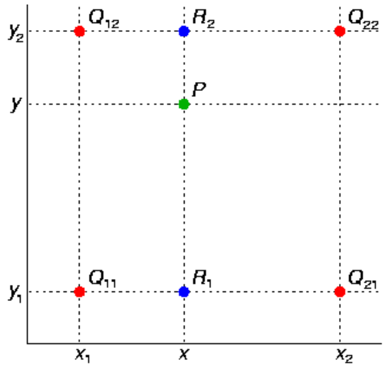


Az előfordulhat, hogy egyes eredményképbeli pixeleknek nem lesz olyan (x,y) ősük, amely rajta van a képen. Ezek a pixelek az eredeti képen a képhatáron kívülre esnek.

Legközelebbi szomszéd:
A transzformáció során általában a kiszámított koordináták nem egész koordinátákra esnek, viszont mi csak egész koordinátákból vehetünk mintát.
A mintavételezés egyik legegyszerűbb típusa, ha a kiszámított valós koordinátákhoz legközelebb eső egész koordinátájú pontból veszünk mintát.



Bilineáris interpoláció:



$$f(R_1)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{21})+\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{11})$$

$$f(R_2)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(Q_{22})+\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(Q_{12})$$

$$f(P)=\frac{y_1-y}{y_1-y2}f(R_2)+\frac{y-y_2}{y_1-y2}f(R_2)$$

ahol *f(P)* a *P* intenzitását jelöli. A bilineáris interpoláció esetében mind a négy környező pixel intenzitása részt vesz a P pont intenzitásának kialakításában, természetesen, súlyozott mértékben.