

7. Regisztráció

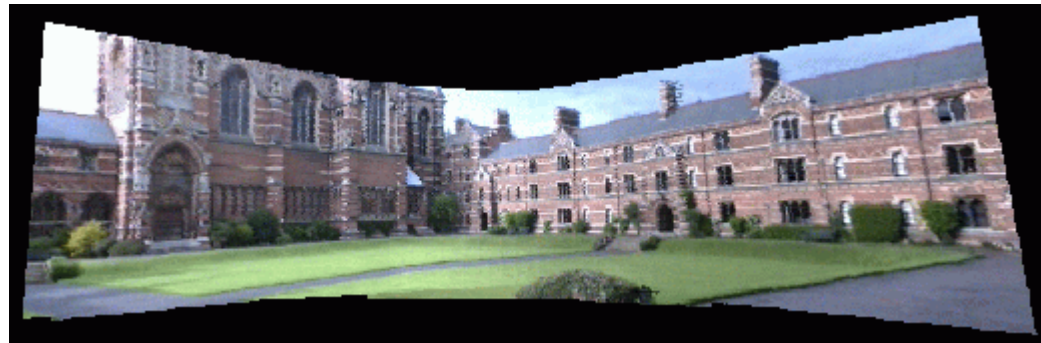
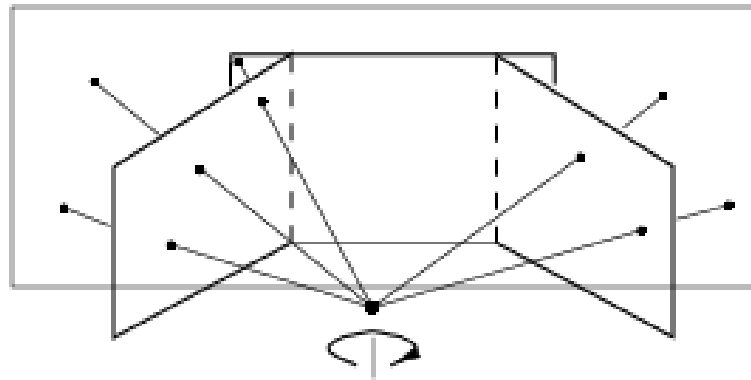
Kató Zoltán

**Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika tanszék
SZTE**

(<http://www.inf.u-szeged.hu/~kato/teaching/>)

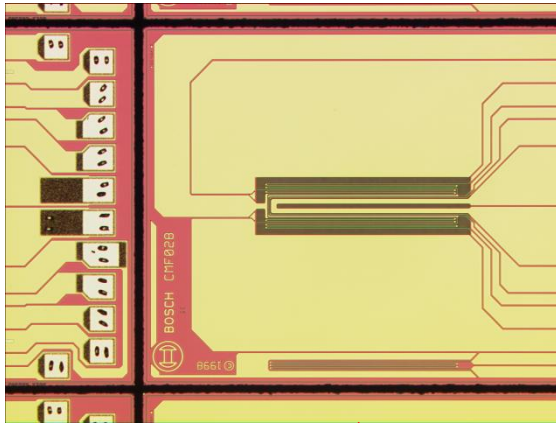
Kép mozaik

- **Nagyobb látószög érhető el**
 - Nagylátószögű optika → fokozott torzítás
 - Több kamera képének összeillesztésével → kép mozaik
- **Általában akkor állítható elő geometriailag helyes mozaik, ha a kamera középpontok egybeesnek.**

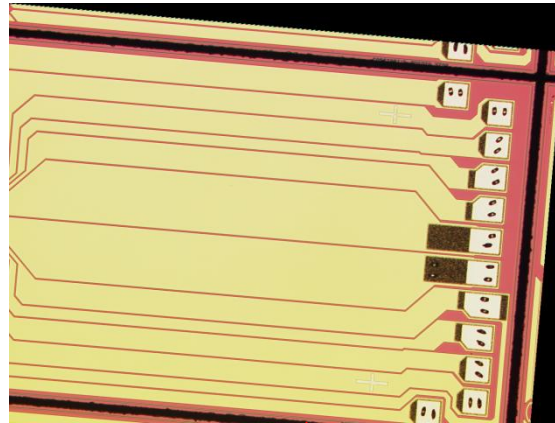


SÍK ALAKZAT MOZAIKOZÁSA EGY SÍKBA ESŐ KÉPSÍKOKKAL

Síkmozaik

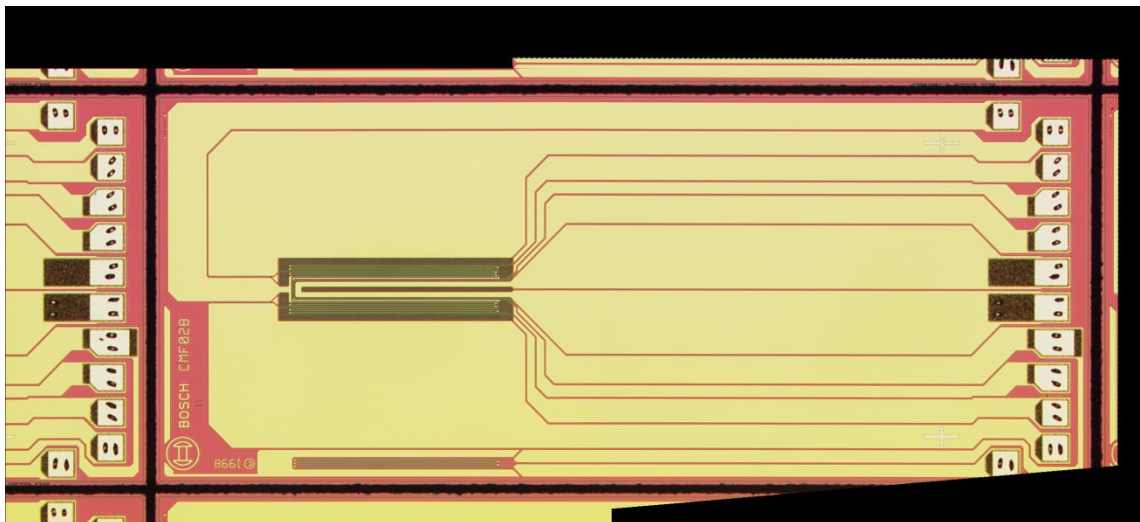


1. kép



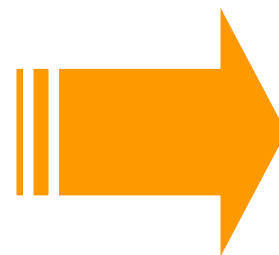
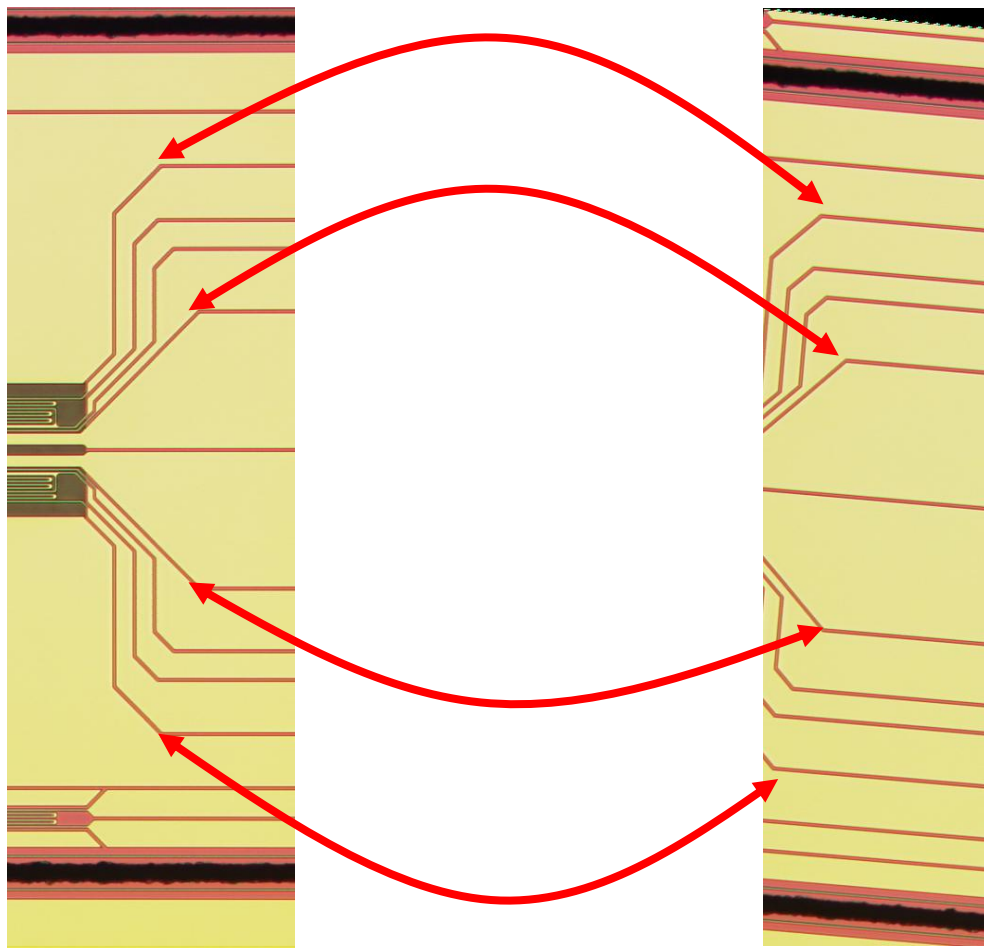
2. kép

Mozaik



- Síkról készült képek, képsík párhuzamos az objektummal
- → nincs torzítás
- → képsíkok egy síkba esnek
- Képek között részleges átfedés van
 - Merev test transzformációval összeilleszthetők a képek
 - Forgatás **R**
 - Eltolás **T**

1. lépés: pontmegfeleltetés



$P^1 \leftrightarrow Q^1$
 $P^2 \leftrightarrow Q^2$
 \vdots
 \vdots
 \vdots
 $P^N \leftrightarrow Q^N$

A megfeleltetett pontok *ugyanazon* 3D pont képei az 1. és a 2. képen.



$$\forall i = 1..N : \mathbf{P}^i = \mathbf{RQ}^i + \mathbf{T}$$

2. lépés: R,T meghatározása

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \cos(\theta)\mathbf{I} + \sin(\theta)\mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

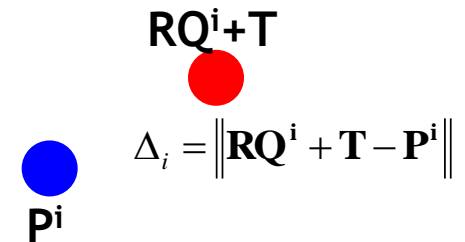
- 3 DOF: θ , T_x , T_y
 - 3 lineárisan független egyenlet \rightarrow 2 pontpár
- A pont megfeleltetések nem tökéletesek
 - Hiba a pont koordinátában \rightarrow LSE
 - Hibás megfeleltetések (kilógó adatok) \rightarrow RANSAC
- A direkt megoldás nem alkalmas ezeknek a hibáknak a kezelésére

$$\forall i = 1..N : \mathbf{P}^i \approx \mathbf{RQ}^i + \mathbf{T}$$

LSE megoldás

- Az eredeti egyenlet helyett minimalizáljuk a négyzetes hibát (SSE)
 - A geometriai hibát az eredeti és transzformált pont euklideszi távolságával mérjük (ha pontos a **R** és **T**, akkor ez 0)

$$SSE = \sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{RQ}^i + \mathbf{T} - \mathbf{P}^i \right\|^2$$



- *SSE* **R** és **T** függvénye
- *SSE* minimuma adja az optimális **R** és **T** értékét:

$$[\mathbf{R}, \mathbf{T}]_{LSE} = \arg \min_{\mathbf{R}, \mathbf{T}} SSE$$

- Ez általában nemlineáris probléma
 - Ebben a speciális esetben azonban a megoldást zárt alakban kapjuk!

SSE minimalizálása

$$\begin{aligned}
 SSE &= \sum_{i=1}^N \|\mathbf{RQ}^i + \mathbf{T} - \mathbf{P}^i\|^2 = \sum_{i=1}^N [\mathbf{RQ}^i + \mathbf{T} - \mathbf{P}^i]^T [\mathbf{RQ}^i + \mathbf{T} - \mathbf{P}^i] \\
 &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{Q}^{iT} \mathbf{R}^T] [\mathbf{RQ}^i] + \mathbf{P}^{iT} \mathbf{P}^i - [\mathbf{Q}^{iT} \mathbf{R}^T] \mathbf{P}^i - \mathbf{P}^{iT} [\mathbf{RQ}^i] + [\mathbf{Q}^{iT} \mathbf{R}^T] \mathbf{T} + \mathbf{T}^T [\mathbf{RQ}^i] - \mathbf{P}^{iT} \mathbf{T} - \mathbf{T}^T \mathbf{P}^i + \mathbf{T}^T \mathbf{T}
 \end{aligned}$$

- Fejtsük ki, majd egyszerűsítsük az alábbiak alapján:
 - Forgató mátrix ortonormált: $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$
 - Mivel $\mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{P}$ skalár $\rightarrow \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T \mathbf{R} \mathbf{Q}$

$$SSE = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{P}^i\|^2 + \|\mathbf{Q}^i\|^2 - 2\mathbf{P}^{iT} \mathbf{R} \mathbf{Q}^i + 2\mathbf{T}^T \mathbf{R} \mathbf{Q}^i - 2\mathbf{T}^T \mathbf{P}^i + \|\mathbf{T}\|^2$$

- Minimum ott lesz, ahol:
 - $SSE' = 0$ és $SSE'' > 0$

Eltolás

- **T** szerinti derivált:

$$\sum_{i=1}^N (2\mathbf{RQ}^i - 2\mathbf{P}^i + 2\mathbf{T}) = 0$$

$$N\mathbf{T} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}^i - \mathbf{RQ}^i)$$

- Legyen $\mathbf{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i$, $\mathbf{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i$

- **T**-re kapjuk:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{RQ}$$

- Geometriai értelemben ez nem más mint **P**ⁱ és az elforgatott **Q**ⁱ súlypontja közötti eltérés

Forgatás

- θ szerinti derivált:

$$\frac{d}{d\theta} \mathbf{R} = -\sin \theta \mathbf{I} + \cos \theta \mathbf{J} = \mathbf{R} \mathbf{J}$$

\Downarrow

$$\frac{d}{d\theta} SSE = \sum_{i=1}^N 2(\mathbf{T} - \mathbf{P}^i)^T \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{Q}^i = 0$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{R} \mathbf{Q}$$

$$\sum_{i=1}^N 2(\mathbf{P} - \mathbf{R} \mathbf{Q} - \mathbf{P}^i)^T \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{Q}^i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{P}^i - \mathbf{P}]^T \mathbf{R} \mathbf{J} \mathbf{Q}^i = -\underbrace{\mathbf{Q}^T \mathbf{J} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i}_{= -\mathbf{Q}^T \mathbf{J} \mathbf{N} \mathbf{Q} = 0}$$

$$\sum_{i=1}^N 2[\mathbf{T} - \mathbf{P}^i]^T \mathbf{R} \mathbf{J}^2 \mathbf{Q}^i > 0$$

\Downarrow

$$B \cos \theta + A \sin \theta + N \|\mathbf{Q}\|^2 > 0$$

$$\cos \theta \underbrace{\sum_{i=1}^N ([\mathbf{P}^i - \mathbf{P}]^T \mathbf{J} \mathbf{Q}^i)}_A - \sin \theta \underbrace{\sum_{i=1}^N ([\mathbf{P}^i - \mathbf{P}]^T \mathbf{Q}^i)}_B = 0$$

$$A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}^{iT} \mathbf{J} \mathbf{Q}^i) - N \mathbf{P}^T \mathbf{J} \mathbf{Q}, \quad B = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}^{iT} \mathbf{Q}^i) - N \mathbf{P}^T \mathbf{Q}$$

- $(\sin \theta, \cos \theta)$ -ra két megoldása van:
 - $(A, B) / \sqrt{A^2 + B^2}$
 - $(-A, -B) / \sqrt{A^2 + B^2}$
- A helyes az, amelyikre $SSE'' > 0$:

$$\sin \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Megoldás zárt alakban

- Forgatás:

$$\sin \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Eltolás:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} - \mathbf{RQ}$$

- ahol:

$$A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}^{iT} \mathbf{J} \mathbf{Q}^i) - N \mathbf{P}^T \mathbf{J} \mathbf{Q}$$

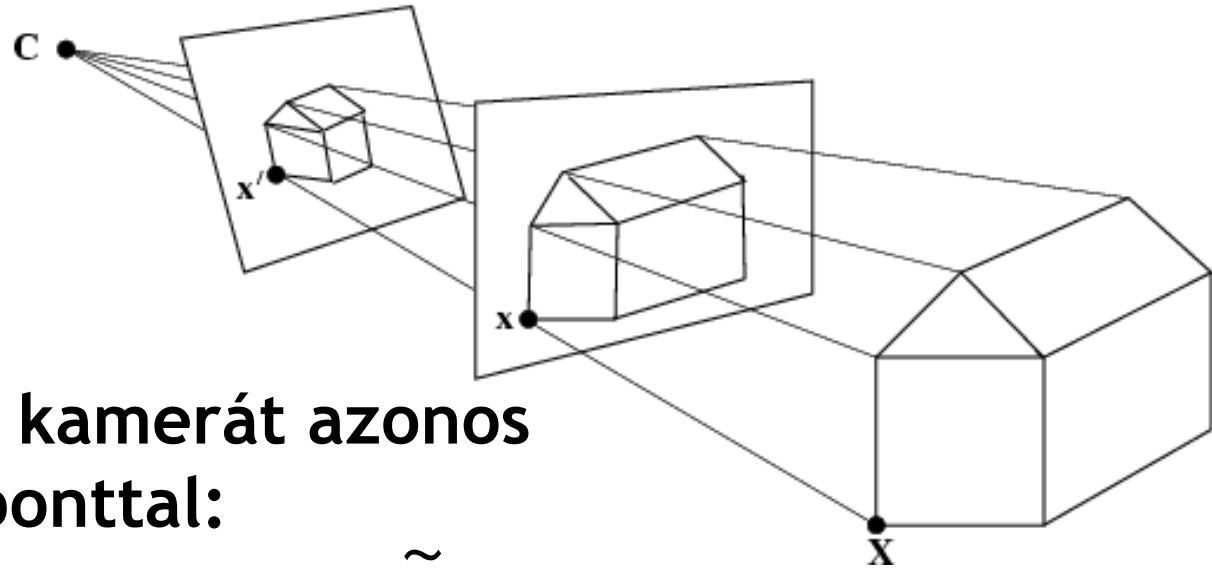
$$B = \sum_{i=1}^N (\mathbf{P}^{iT} \mathbf{Q}^i) - N \mathbf{P}^T \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}^i, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}^i$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

SÍKMOZAIK KÉSZÍTÉSE ÁLTALÁNOS ESETBEN

A kamera középpont jelentősége



- Tekintsünk két kamerát azonos vetítési középponttal:

$$P = KR[I \mid -\tilde{C}], P' = K'R'[I \mid -\tilde{C}]$$

- A közös középpont miatt  $P' = K'R'(KR)^{-1}P$

- Egy 3D X pont képei között tehát az alábbi összefüggés van:

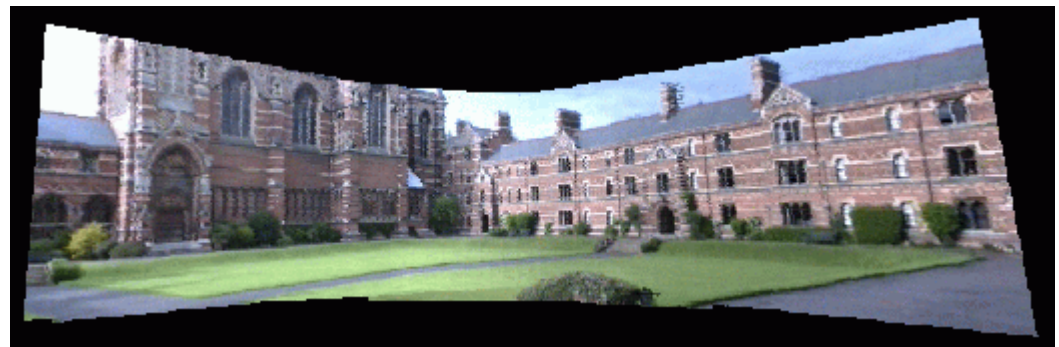
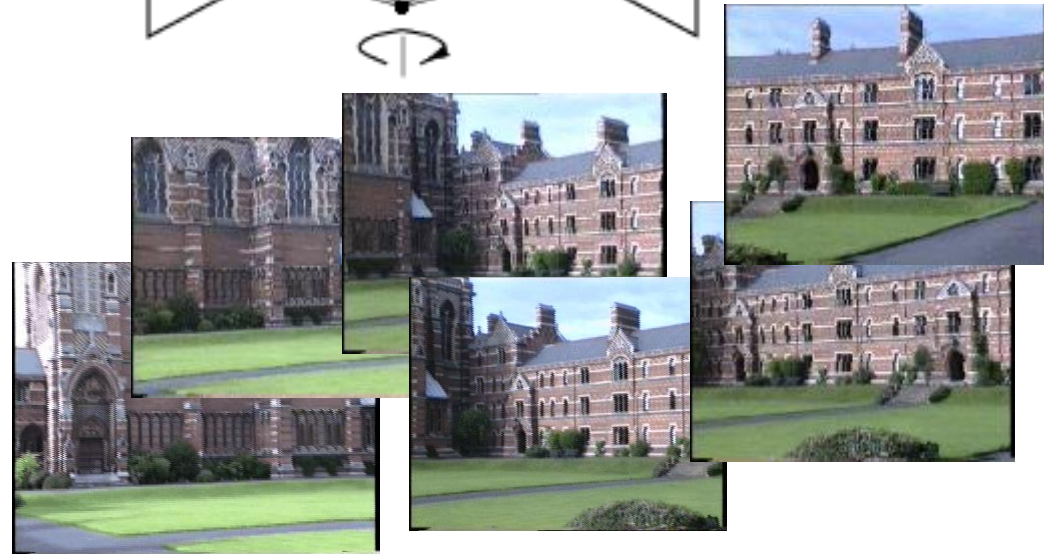
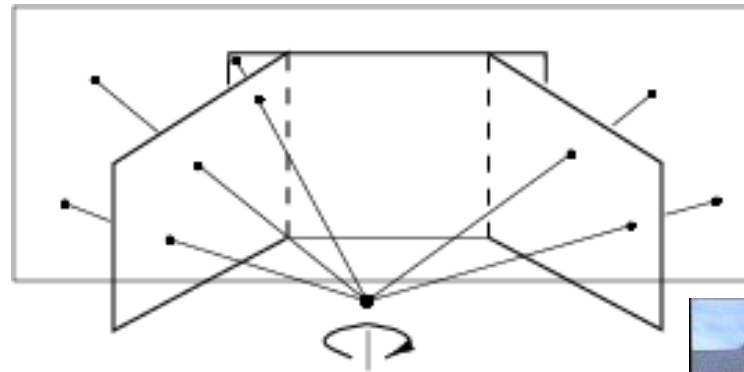
$$x' = P'X = K'R'(KR)^{-1}PX = K'R'(KR)^{-1}x$$

- Azaz egy H síkhomográfia:

$$x' = Hx \text{ ahol } H = K'R'(KR)^{-1}$$

Mozaikozás síkhomográfiával

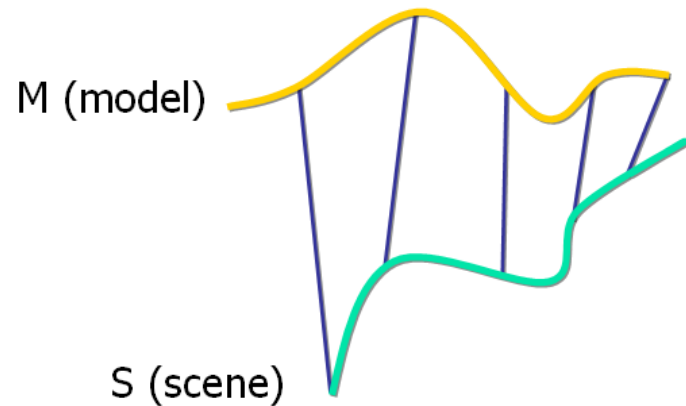
1. Válasszunk egy referencia képet (célszerűen a középsőt)
2. Számítsuk ki a H síkhomográfiát ami egy képet a referencia képhez illeszt
 1. 8 DOF \rightarrow legalább 4 pont megfeleltetés
3. Transzformáljuk a képet H -val
4. Ismételjük a 2-3 lépéseket minden képre.



ICP: ITERATIVE CLOSEST POINT

ICP

- Pont megfeleltetéseket nem mindig lehet megbízhatóan előállítani (pl. biáris képek, alapzatok)
 - Vegyük a legközelebbi pontot mint megfeleltetést
- 3D ponthalmazok euklideszi illesztésére szolgál
 - A legjobb merevtest transzformációt keressük
 - M az ún. model ponthalmaz.
 - S az ún. kép ponthalmaz.



Feltételezések:

1. $N_M = N_S$.
2. Minden S_i pont megfelel egy M_i pontnak.

ICP algoritmus

1. Párosítsunk minden S_i pontot a legközelebbi M_i ponttal
2. Határozzuk meg azt a merev test transzformációt, ami minimalizálja az átlag négyzetes hibát (MSE)
3. Alkalmazzuk a transzformációt S -re, és frissítsük az MSE hibát
4. Iteráljuk 1-3 lépéseket, amíg nem konvergál
 - Az algoritmus tulajdonságai:
 - Közel identikus transzformációra működik (előillesztés)
 - Pont párosítás számításigényes (minden pont legközelebbi párját kell megtalálni)
 - Nem robusztus (kilógó adatokat nem kezel)
 - Viszont a transzformációt zárt formulával kapjuk
 - Lassú, de garantált konvergencia egy lokális minimumba

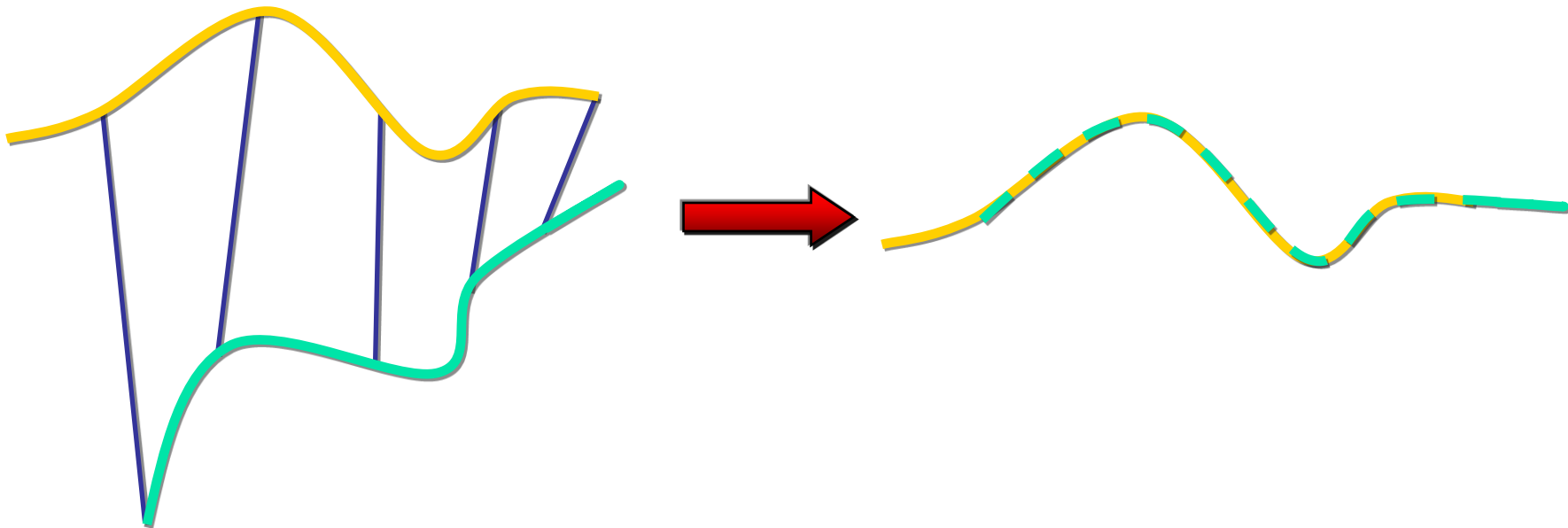
MSE hibafüggvény

$$f(R, T) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \|m_i - Rot(s_i) - Trans\|^2$$

$$f(q) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} \|m_i - R(q_R)s_i - q_T\|^2$$

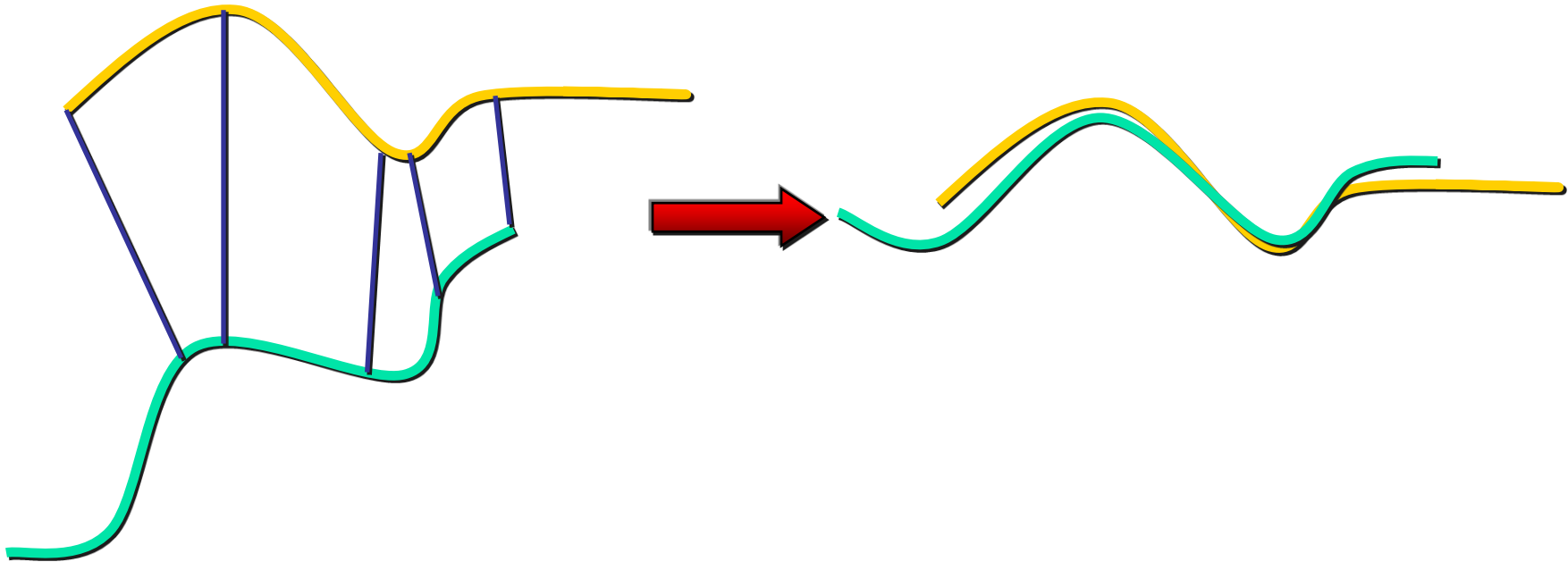
- Az illesztő transzformáció és hiba:

$$(Rot, Trans, d_{mse}) = \Phi(M, S)$$

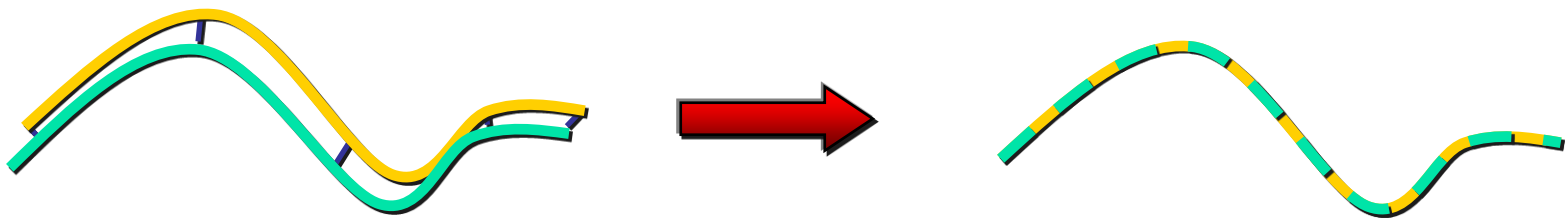


Pont párosítás

- A legközelebbi pont nem mindig ad valódi megfeleltetést:



- Ha elég közel van a két alakzat, akkor jól működik:



A legközelebbi pontok

- Két pont, r_1 és r_2 euklideszi távolsága:

$$d(r_1, r_2) = \|r_1 - r_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

- Pont távolsága egy A ponthalmaztól:

$$d(r_1, A) = \min_{i \in 1..n} d(r_1, a_i)$$

- Vagyis a megfeleltetéseket megkapjuk:

▶ C - legközelebbi pont operátor

$$d(s, M) = \min_{m \in M} d\|m - s\| = d(s, y)$$

▶ Y - az S -hez legközelebbi pontok halmaza

$$y \in M$$

$$Y = C(S, M)$$

$$Y \subseteq M$$

Megfeleltetések

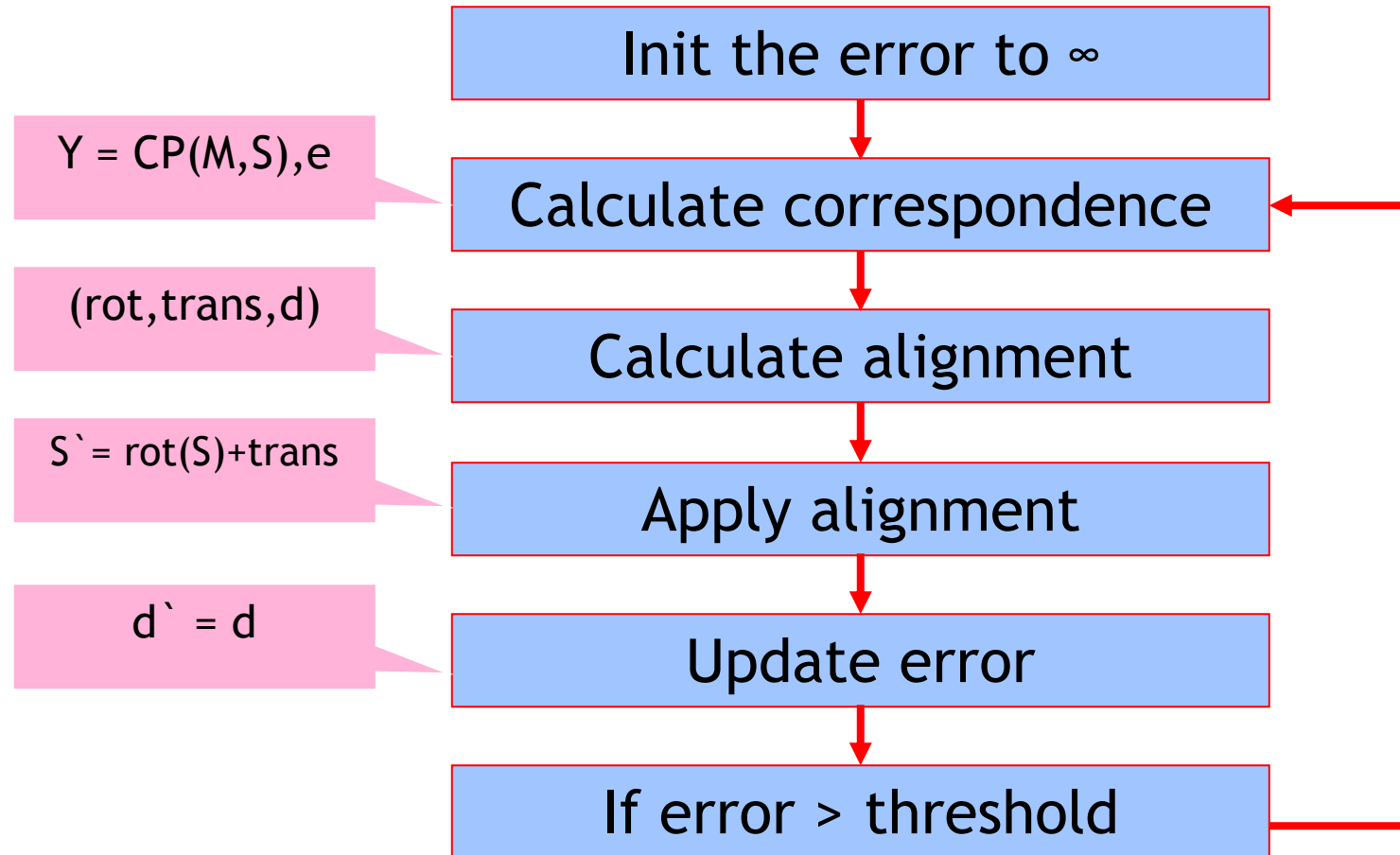
- Egy párosítás előállításának komplexitása $O(N_M)$ (legrosszabb eset)
- Ha ismert Y , akkor az illesztő transzformáció meghatározható:

$$(Rot, Trans, d) = \Phi(S, Y)$$

- Majd S -re alkalmazzuk a transzformációt és így kapjuk az új ponthalmazt:

$$S_{new} = Rot(S) + Trans$$

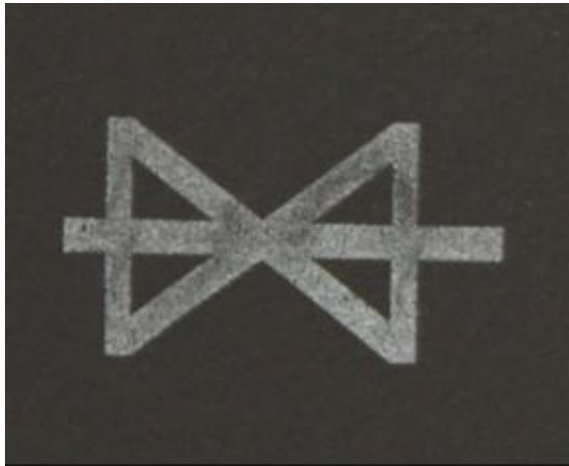
ICP algoritmus



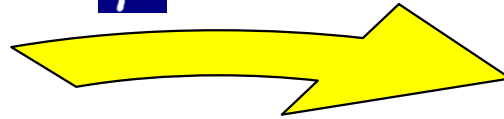
ALAKZATILLESZTÉS PONT MEGFELELTETÉSEK NÉLKÜL

Geometriai kapcsolat alakzat képei között

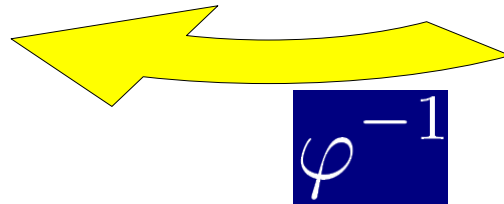
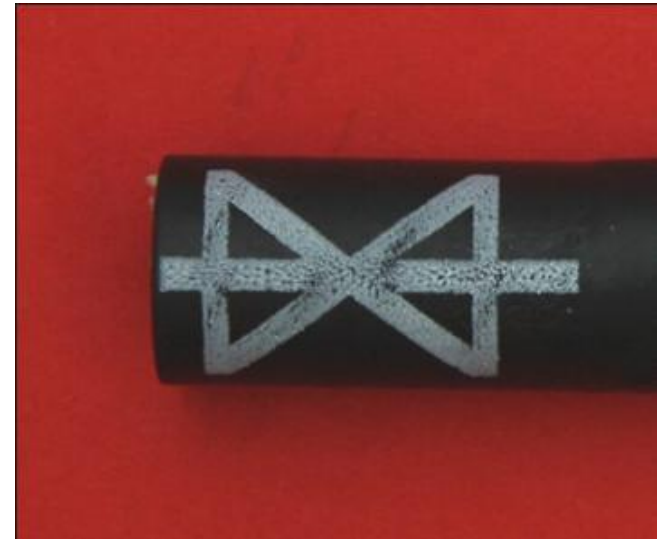
Sablon



φ



Megfigyelés (deformált)



φ^{-1}

A geometriai kapcsolat az alakzat pontjai között:

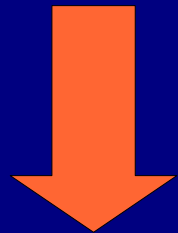
$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y})$$

ahol

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x})]^T$$

Megoldás pont megfeleltetések nélkül

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$$



Integráljuk ki az egyes pont megfeleltetéseket az \mathcal{F}_t és \mathcal{F}_o előtér régiók felett.

$$\int_{\mathcal{F}_o} \mathbf{y} d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{F}_t} \varphi(\mathbf{x}) |J_\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

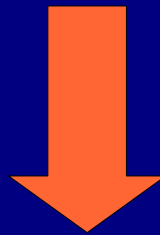
Ahol az $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$, $d\mathbf{y} = |J_\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$ integrál transzformációt alkalmaztunk és $|J_\varphi| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a Jacobi determináns

Et egy két nemlineáris egyenletből álló egyenletrendszer ami nem elegendő kettőnél több paraméter meghatározására

További egyenletek előállítása

Alapötlet: Generáljunk lineárisan független egyenleteket nemlineáris ω függvények segítségével:

$$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) \longrightarrow \omega(\mathbf{y}) = \omega(\varphi(\mathbf{x}))$$

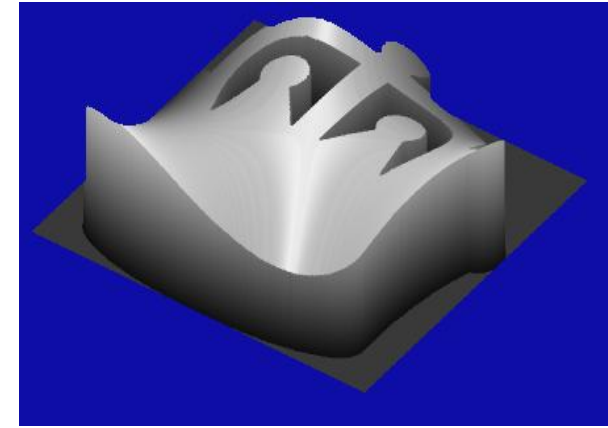


Legyen $\omega_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, \ell)$ egy nemlineáris függvényhalmaz. Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

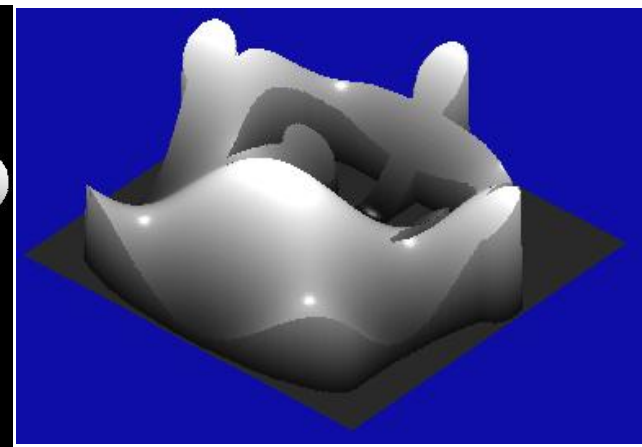
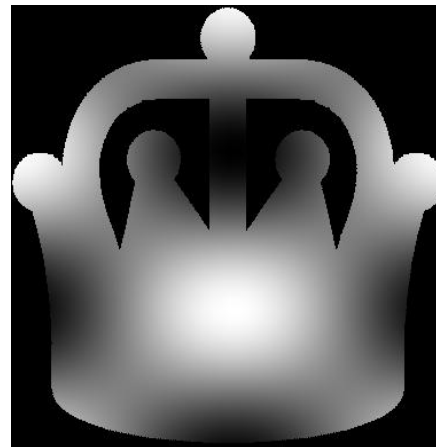
$$\int_{\mathcal{F}_o} \omega_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{F}_t} \omega_i(\varphi(\mathbf{x})) |J_\varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

ω értelmezése

- Minden ω az alakzat egy konzisztens színezését adja
- Az egyenletek az ω függvény által meghatározott térfogatok egyenlőségét fejezik ki (megfelelő koordinátarendszerben)
- Az illesztő transzformáció paramétereit egyszerűen az egyenletrendszer megoldásaként kapjuk.



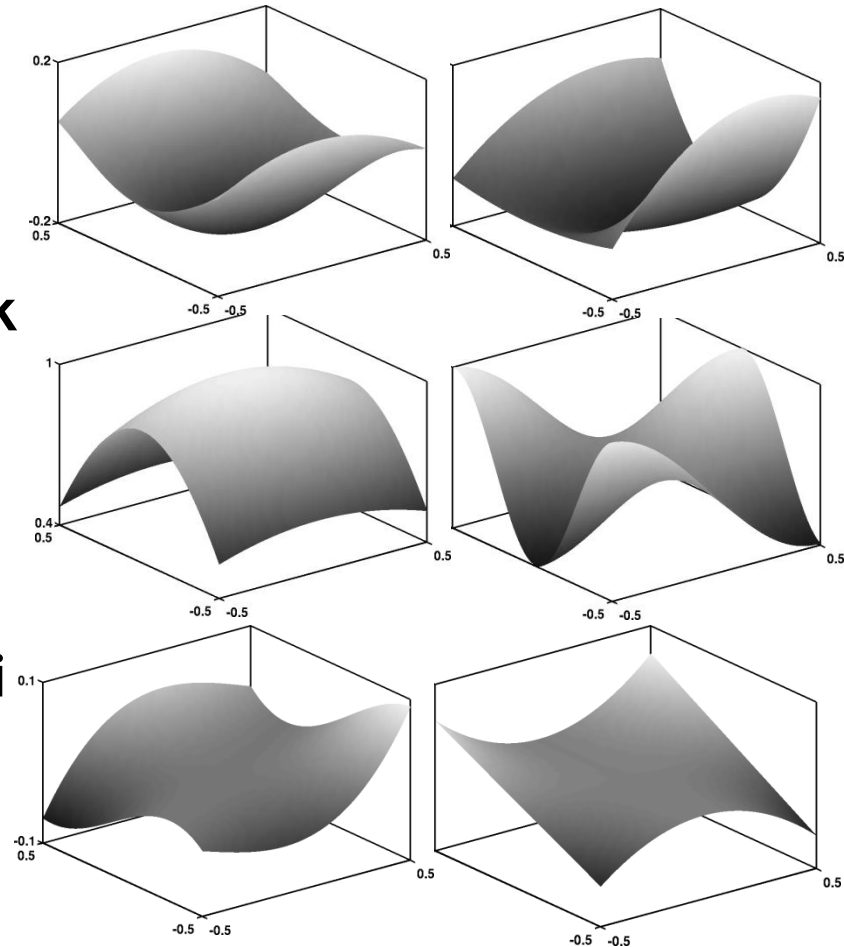
polinomiális



Trigonometrikus

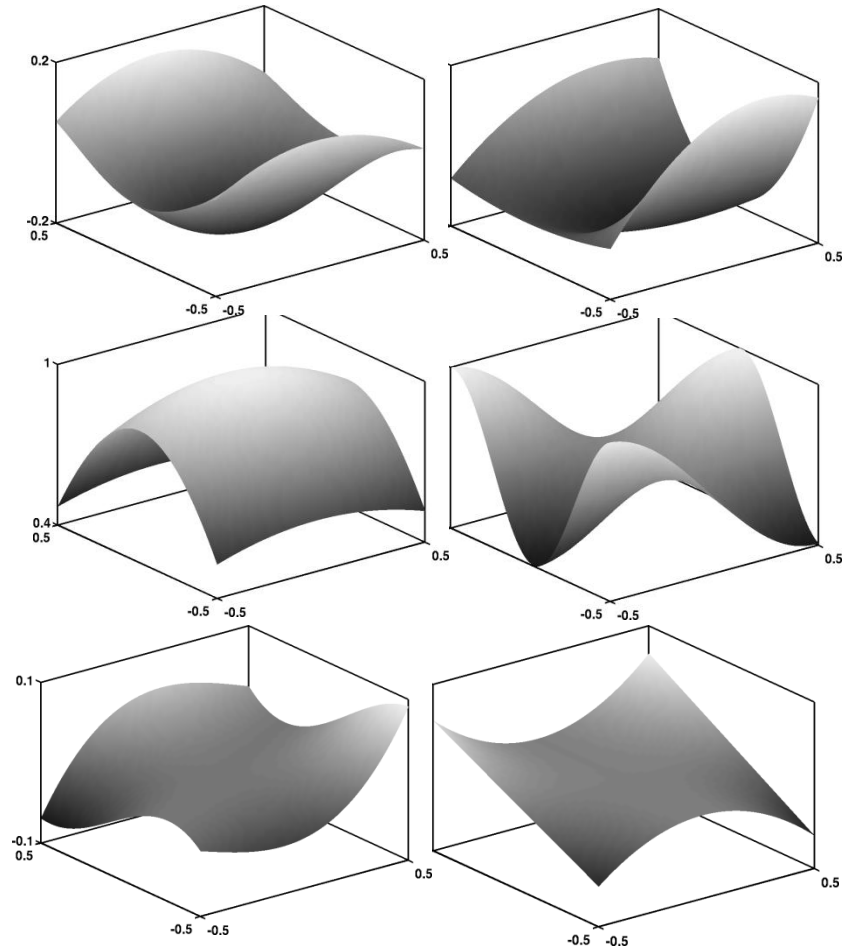
Hogyan válasszuk meg az ω függvényeket?

- Elméleti szempontból csak triviális feltételek:
 - Integrálható, kellően karakterisztikus
 - Az egyenletek hozzájárulása az algebrai hibához kiegyensúlyozott:
 - Normalizált képkoordináták
 - Az ω függvények értékkészlete normalizált
- Gyakorlati szempontból fontos, hogy általános esetben egy nemlineáris integrál egyenletrendszert kell megoldani
 - ➔ a közbülső deformációkat is ki kell értékelni
 - ➔ komplexitás nagy mértékben függ a képmérettől



Hogyan válasszuk meg az ω függvényeket?

- Vajon redukálható-e az egyenletrendszerünk egy egyszerű polinim egyenletrendszerre?
 - Ha nem kell integrálni, akkor elegendő egyszer végigmenni a képpontokon, tehát jelentős gyorsulás érhető el (futásidő csaknem független lesz a képmérettől)
- A válasz igen, HA
 - A transzformáció bázisfüggvények lineáris kombinációjaként írható fel
 - Polinom vagy TPS transzformáció
 - Egyébként Taylor sorfejtéssel mindig ilyen alakra hozható
 - Polinomiális ω függvényeket alkalmazunk



1. példa: Affin transzformáció

- Homogén koordinátákkal felírva:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

- A transzformációs mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{x} d\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} d\mathbf{y} \quad |\mathbf{A}| = \frac{\int_{\mathcal{F}} d\mathbf{y}}{\int_{\mathcal{D}} d\mathbf{x}}$$

- ω függvényt alkalmazva:

$$\int_{\mathcal{D}} \omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \int_{\mathcal{F}} \omega(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

AS

AS

AS

$$\omega(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \omega(\mathbf{x}) = [x_1^2, x_2^2, 1]^T$$

$$\omega(\mathbf{x}) = [x_1^3, x_2^3, 1]^T$$

Polinom egyenletrendszer

- Polinomiális ω esetén
- Szeparálható (x és y szerint) polinom egyenletrendszert kapunk:

➤ $n = 1.2.3: k = 1.2$

$$|\mathbf{A}| \int x^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} q_{k1}^{n-i} q_{k2}^{i-j} q_{k3}^j \int y_1^{n-i} y_2^{i-j}$$

- Affin deformáció polinomiális ω esetén standard 1., 2. és 3. alakzatmomentumra vezet:

$$|\mathbf{A}| \int x_k = q_{k1} \int y_1 + q_{k2} \int y_2 + q_{k3} \int 1,$$

$$|\mathbf{A}| \int x_k^2 = q_{k1}^2 \int y_1^2 + q_{k2}^2 \int y_2^2 + q_{k3}^2 \int 1 + 2q_{k1}q_{k2} \int y_1y_2 + 2q_{k1}q_{k3} \int y_1 + 2q_{k2}q_{k3} \int y_2,$$

$$|\mathbf{A}| \int x_k^3 = q_{k1}^3 \int y_1^3 + q_{k2}^3 \int y_2^3 + q_{k3}^3 \int 1 + 3q_{k1}^2q_{k2} \int y_1^2y_2 + 3q_{k1}^2q_{k3} \int y_1^2 + 3q_{k2}^2q_{k3} \int y_2^2 + 3q_{k1}q_{k2}^2 \int y_1y_2^2 + 3q_{k2}q_{k3}^2 \int y_2 + 3q_{k1}q_{k3}^2 \int y_1 + 6q_{k1}q_{k2}q_{k3} \int y_1y_2.$$

Algoritmus

- Közelítsük az integrált: $\mathcal{D} \approx D = \{\mathbf{d}^i\}_{i=1}^n$

$$\int_{\mathcal{D}} x_k d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_k^i$$

- Jacobi: $|\mathbf{A}| = \frac{m}{n}$

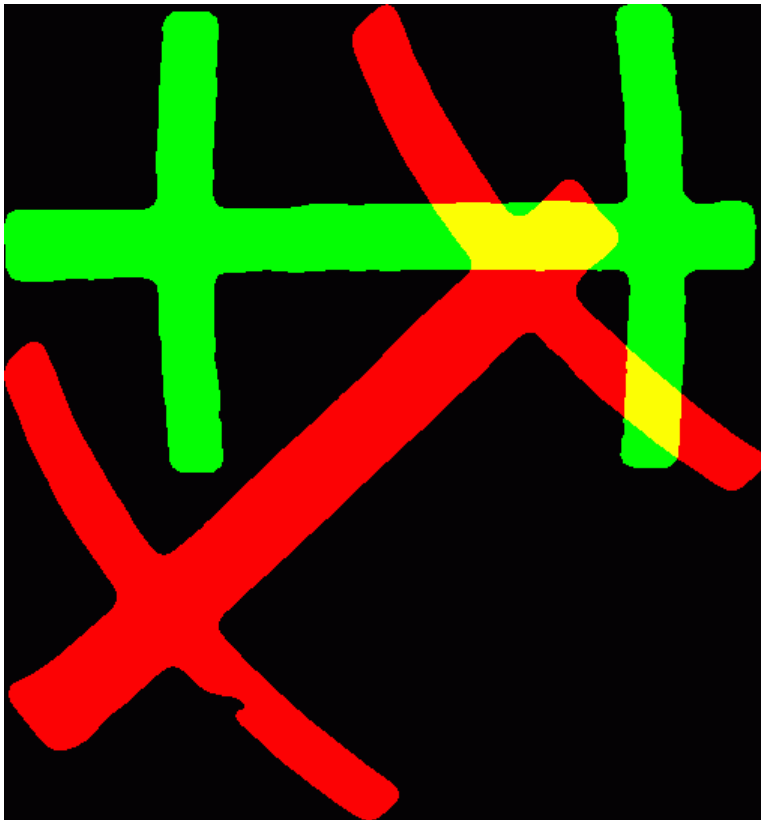
- Algoritmus:

1. Számoljuk ki a Jacobit
2. Az integrálok (momentumok) kiszámolásával megkapjuk az egyenletek együtthatóit
3. Oldjuk meg az egyenletrendszert

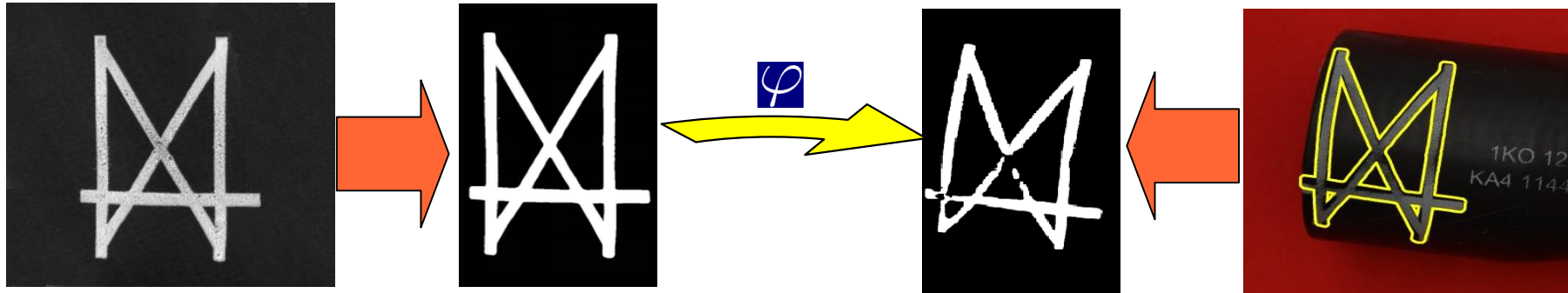
- Komplexitás: $\mathcal{O}(N)$, ahol N is az alakzatokat alkotó pixelek száma

2. példa: Nemlineáris transzformáció

- Szerelési jelek épségének ellenőrzése autóiipari gumiömlőkön

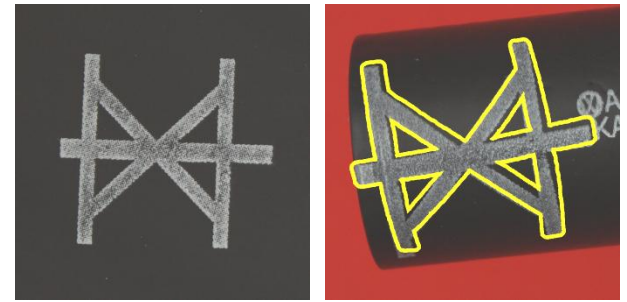


Az ellenőrzés menete



- Az ellenőrzést a tömlőn lévő jel sablonképével történő összehasonlítással oldhatjuk meg
- Ehhez szükséges a síkbeli sablon és a hengeres tömlőfelületre nromtatott jel képénél illesztése
- A nehézséget a szegmentálási hibák és a komplex torzulások adják

Az összetett transzformáció



- A kontakt nyomtatás folyamata:
 - A sík alakzatot (lényegében a nyomtató idomot) a cső felületén a megfelelő helyre pozicionáljuk,
 - Majd a cső felületére nyomjuk
- Ezt az alábbi transzformációkkal írhatjuk le:
 1. $\mathbf{S} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy 2D forgatás és skálázás (3 paraméter)
 2. $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 2D \rightarrow 3D leképezés r sugarú hengerfelületre (1 paraméter)

$$\gamma(\mathbf{x}) = \left[r \sin \frac{x_1}{r}, x_2, -r \cos \frac{x_1}{r} \right]^T$$
 3. Ezután a csőről egy képet készítünk egy $\mathbf{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ projektív kamerával (6 külső paraméter + fókusztávolság)
- A sík alakzat és a csőnyomat közötti $\mathbf{P} \circ \gamma \circ \mathbf{S}$ transzformációnak tehát 11 paramétere van.

Felhasznált anyagok, szoftver

- Ronen Gvili: ICP
 - www.cs.tau.ac.il/~dcor/Graphics/adv-slides/ICP.ppt
 - Letölthető szoftver at <http://www.inf.u-szeged.hu/~kato/software/> oldalról:
1. Nonlinear Shape Registration without Correspondences.
 - JAVA code.
 - Implements planar homography, extension to other nonlinear deformations is relatively easy.
 2. Affine Registration of 3D Objects.
 - JAVA code with multi-threading (~0.2 sec. CPU time for megavoxel volumes).
 3. Affine Registration of Planar Shapes.
 - JAVA code with a direct solver (only runs under Windows).