Közelítő és szimbolikus számítások

8. gyakorlat

Polinomok, Lagrange interpoláció

Készítette:

Gelle Kitti

Csendes Tibor

Somogyi Viktor

Vinkó Tamás

London András

Deák Gábor

jegyzetei alapján

1. Polinomok

Definíció 1.1. *A komplex számok teste feletti egyváltozós polinomok olyan* $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *alakú kifejezések, ahol* $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ *szám (tehát nemnegatív egész), valamint* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

A tudományos számításokban fontos szerepe van a polinomoknak. A segítségükkel bonyolultabb függvényeket tudunk közelíteni, valamint könnyű őket deriválni és integrálni, továbbá nem nehéz közelíteni a zérushelyeiket (gyökeiket).

1.1 Horner-elrendezés

A polinomok hatékony kiértékelésére a *Horner-elrendezés* használatos. Ez egyszerűen a polinom átalakítása a

$$p(x) = (\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n$$

alakra. A műveleteket értelemszerűen balról jobbra, a műveleti sorrendnek megfelelően kell elvégezni. Ez a séma a polinom kiértékelés idejét lecsökkenti n darab szorzásra és n összeadásra.

Példa. Vegyük a $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 12$ polinomot, és értékeljük ki az $x = 4$ helyen, azaz számoljuk ki $p(4)$-et.

Megoldás. Készítsük el először a Horner-alakját a fenti polinomnak. Figyeljünk arra, hogy a polinom 1 hatványon levő változójához tartozó együttható 0 (azaz van egy $0x^1$ tag). A Horner-alak tehát:

$$p(x) = (((2x - 4)x + 5)x + 0)x + 12.$$

Ezután ide helyettesítsük be az $x = 4$-et, így

$$p(4) = (((2 \cdot 4 - 4) \cdot 4 + 5) \cdot 4 + 0) \cdot 4 + 12 = 348.$$

1.2 Ruffini sorozat

A Horner-elrendezés kiszámításához hasonló a számítógépen könnyen implementálható, $\hat{x}$ helyhez tartozó *Ruffini sorozat*:

$$b_0 = a_0$$

$$b_k = b_{k-1}\hat{x} + a_k,$$

ahol $k = 1, \ldots, n$.

Tétel 1.1. *Jelölje $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ a b_k sorozat elemeivel felírt $n-1$-edfokú polinomot. Ekkor*

1. $p(x) = (x - \hat{x})q(x) + b_n$,
2. $p(\hat{x}) = b_n$, *és*
3. $p'(\hat{x}) = q(\hat{x})$.

A Ruffini-sorozat kiszámolását a következő táblázatos elrendezés segíti:

a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0x_0	b_1x_0	$\ldots$	$b_{n-2}x_0$	$b_{n-1}x_0$
b_0	$b_1 = b_0x_0 + a_1$	$b_2 = b_1x_0 + a_2$	$\ldots$	$b_{n-1} = b_{n-2}x_0 + a_{n-1}$	$b_n = b_{n-1}x_0 + a_n$

A táblázatot oszloponként balról jobbra haladva töltjük ki. Az első sor és oszlop ismert a megalkotás pillanatában. A megoldást ezek alapján az utolsó oszlop utolsó cellája fogja adni.

Példa. Legyen a vizsgált polinom $p(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 3$. Számoljuk ki az értékét Ruffini-sorozattal az $x_0 = 2$ helyen.

Megoldás.

$a_0 = 2$	$a_1 = 1$	$a_2 = -8$	$a_3 = 3$	$a_4 = 3$
$x_0 = 2$	4	10	4	14
$b_0 = 2$	5	2	7	17

$$p(x) = (x-2)(2x^3 + 5x^2 + 2x + 7) + 17$$

$$q(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + 7$$

Kiírva:

$$b_1 = b_0x_0 + a_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

$$b_2 = b_1x_0 + a_2 = 5 \cdot 2 - 8 = 2,$$

$$b_3 = b_2x_0 + a_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$

$$b_4 = b_3x_0 + a_4 = 2 \cdot 7 + 3 = 17.$$

2. Függvényközelítés

Azt a feladatot, melynek célja adott (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ pontpár sorozathoz előállítani egy olyan $f(x)$ függvényt, amely egy előre adott függvényosztályba tartozik, és az x_i *alappont*okban a hozzájuk tartozó y_i értéket veszi fel, *interpolációnak* nevezzük. Attól függően, hogy a keresett $f(x)$ függvényt, milyen függvényosztályban keressük, illetve milyen egyéb kritériumokat támasztunk vele szemben, sokféle interpolációs módszert definiálhatunk. Ha ez a függvény polinom, akkor *polinominterpolációról* beszélünk.

Az interpoláció szó másik jelentése az, hogy a közelítő függvény segítségével az eredeti $f(x)$ függvény értékét egy olyan $\hat{x}$ pontban becsüljük az interpoláló $p(x)$ polinom $p(\hat{x})$ helyettesítési értékével, amelyre

$$\hat{x} \in [\min(x_1, x_2, \ldots, x_n), \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Ha ezzel szemben

$$\hat{x} \notin [\min(x_1, x_2, \ldots, x_n), \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

teljesül, akkor *extrapolációról* van szó.

2.1 Lagrange interpoláció

Abban az esetben használjuk, ha polinommal szeretnénk közelíteni egy függvényt. Ennél a módszernél feltesszük, hogy az alappontok páronként különbözők, ami jogos, és ilyenkor adott x-re nem mehet át a függvény két $y = f(x)$ értékhez tartozó ponton. A módszer egy n alappontból álló sorozatot egy $n - 1$-edfokú polinommal közelít.

Az interpolációs feltételeket a következő módon adhatjuk meg n alappont esetén:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k = y_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Ez egy lineáris egyenletrendszert határoz meg a keresett a_k együtthatókra vonatkozóan, és pont egy Vandermonde-mátrixszal írható le:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

A Vandermonde-mátrixokra érvényes, hogy

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Ebből adódik, hogy amennyiben az interpolációs alappontok páronként különbözők, akkor pontosan egy $n-1$-edfokú interpolációs polinom létezik, amely az adott pontokon áthalad.

A Lagrange interpoláció az interpoláló polinomokat

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

alakban adja meg, ahol

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

egy pontosan $n-1$-edfokú polinom.

Láthatjuk, hogy miért: ha x helyére x_i-t helyettesítünk $L_i(x)$-be, akkor minden kiejt mindent, mivel ugyanazok lesznek a számlálóban mint a nevezőben, így $L_i(x_i) = 1$.

Viszont ha L_i-ben x helyére x_j-t helyettesítünk, ahol $i \neq j$, akkor fenn a számlálóban lesz egy $(x - x_j)$ tényező, ami 0, és mivel így van a szorzatban egy 0 tag az $L_i(x_j) = 0$ lesz. Emiatt a fenti összeg minden i-re $p_n(x_i) = f(x_i)$ alakú lesz tényleg, azaz az így előállított polinomunk ugyanazt az értéket fogja felvenni az alappontokban, mint az eredeti közelíteni kívánt függvény.

Példa. Legyen adott 4 alappont: $(-1, 2), (0, 0), (1, 4), (4, 0)$. Keressük a $p_3(x)$ harmadfokú interpolációs polinomot.

Az alappontok táblázatba rendezve:

x	-1	0	1	4
$p_3(x)$	2	0	4	0

Határozzuk meg az $L_i(x)$ polinomokat:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(-1-0)(-1-1)(-1-4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(0+1)(0-1)(0-4)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-4)}{(1+1)(1-0)(1-4)}$$

$$L_4(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(4+1)(4-0)(4-1)}$$

Írjuk fel az interpoláló polinomot:

$$p_3(x) = 2L_1(x) + 0L_2(x) + 4L_3(x) + 0L_4(x) =$$

$$= 2\frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{-10} + 4\frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{-6} =$$

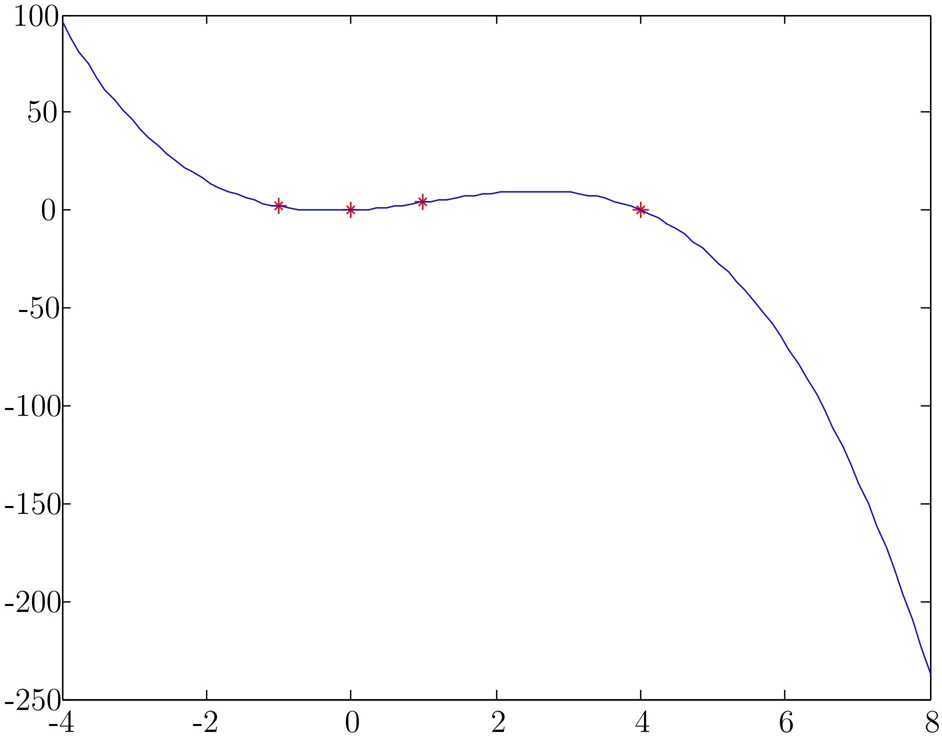
$$= -\frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{5} - \frac{2x^3 - 6x^2 - 8x}{3} =$$

$$= \frac{-3x^3 + 15x^2 - 12x - 10x^3 + 30x^2 + 40x}{15} =$$

$$= \frac{-13x^3 + 45x^2 + 28x}{15} =$$

$$= -\frac{13}{15}x^3 + 3x^2 + \frac{28}{15}x$$

Az 1. ábra mutatja az alappontokat (piros csillagok), illetve a fentebbi, ráillesztett polinomot.



1. Ábra.: A Lagrange módszer által létrehozott interpolációs polinom.