Bonyolultságelmélet gyakorlat – 01
Függvények nagyságrendje

Miért? Nem akarunk pontos időigényekkel számolni (mint pl. $n^3 + 2n^2 + 16n - 2$ helyett csak annyit szeretnénk mondani, hogy „köbös”).

Futásidőt és tárigényt leíró f függvényekkel fogunk számolni, ezért hallgatólagosan feltesszük, hogy ezek a függvények monoton növőek lesznek („nagyobb inputra tovább fut és több tárat használ”)

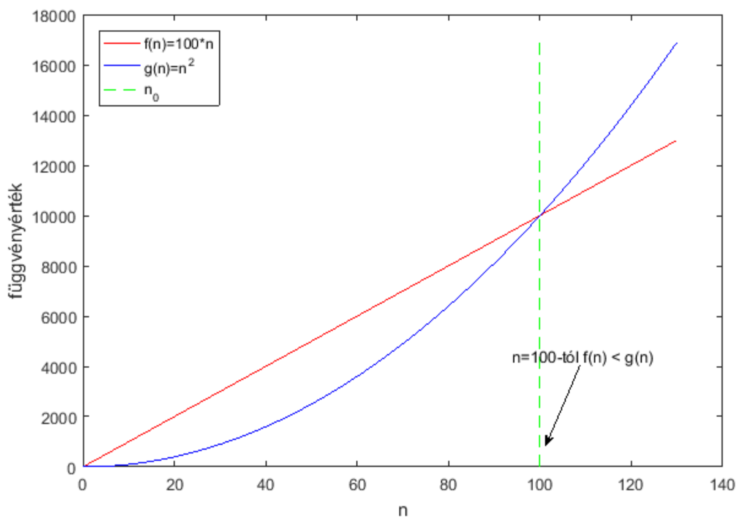
A függvények közötti kapcsolatok leírására az O (e. „Ordó”), o („ordó”, „kisordó”), Θ („Théta”), Ω („Omega”) és ω („omega”, „kisomega”) jelöléseket fogjuk használni. Ezek kb. a $\leq$, $<$, $=$, $\geq$, $>$ kapcsolatok lesznek (de nem úgy, hogy „minden n-re”, hanem „egy idő után, egy küszöbszám után minden n-re”). Erre láthatunk példát az 1. Ábrán.

A matematikai definíció ez:

Definíció

Ha f és g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények, akkor...

- $\mathbf{f} = \mathbf{O}(\mathbf{g})$, ha van olyan $c > 0$ és $n_0 \geq 0$, hogy $n_0 \leq n \Rightarrow f(n) \leq c \cdot g(n)$; (ez kb. az $f \leq g$)
- $\mathbf{f} = \mathbf{o}(\mathbf{g})$, ha minden $c > 0$-ra van olyan $n_0 \geq 0$, hogy $n_0 \leq n \Rightarrow f(n) \leq c \cdot g(n)$; (ez kb. az $f < g$)
- $\mathbf{f} = \mathbf{\Theta}(\mathbf{g})$, ha $f = O(g)$ és $g = O(f)$; (ez kb. az $f = g$)
- $\mathbf{f} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{g})$, ha $g = O(f)$; (ez kb. az $f \geq g$)
- $\mathbf{f} = \omega(\mathbf{g})$, ha $g = o(f)$. (ez kb. az $f > g$)



1. Ábra.: Példa $f(n) = O(g(n))$-re

1. Feladat Mutassuk meg, hogy $3n = O\left(\frac{n^2}{100}\right)$!

Megoldás

Az O kapcsolathoz a def szerint mondanunk kell egy jó c-t és egy jó n_0-t. Például, ha $c = 300$ és $n_0 = 1$, akkor: „ha $1 \leq n$, akkor $3n \leq 300 \cdot \frac{n^2}{100}$", ami igaz, hiszen

$$\begin{aligned} 3n &\leq 300 \cdot \frac{n^2}{100} \quad \text{egyszerűsítés} \\ 3n &\leq 3n^2 \quad \text{osztás } 3n\text{-nel} \\ 1 &\leq n \end{aligned}$$

és kész is.

2. Feladat Mutassuk meg, hogy $3n = o\left(\frac{n^2}{100}\right)$!

(Az előzőhöz képest annyi a különbség, hogy O helyett o van. Intuitíve érezzük is, hogy a négyzetes függvény „tényleg", szigorúan gyorsabban nő, mint a lineáris.)

Megoldás

Az o kapcsolathoz a def szerint a $c > 0$-t kapjuk, és ehhez kell adjunk egy n_0-t, amire kijön az „$f(n) \leq c \cdot g(n)$, ha $n_0 \leq n$" képlet.

Ha pl. az $n_0 := \frac{300}{c}$-t vesszük, akkor:

$$\begin{aligned} \frac{300}{c} &\leq n \\ 3 &\leq \frac{c}{100} n \quad \text{szorzás } \frac{c}{100}\text{-zal} \\ 3n &\leq c\frac{n^2}{100} \quad \text{szorzás } n\text{-nel} \end{aligned}$$

és kész is vagyunk.

Ez persze olyankor, mikor mindkettő valami polinom(szerű) függvény, ilyen egyszerűen, a definícióval is kijön. De nem mindig ilyen egyszerű input c-hez megadni egy konkrét n_0-t. Szerencsére van, amit tudunk használni:

Állítás

Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ldots$

- $= 0$, akkor $f = o(g)$;
- $< \infty$, akkor $f = O(g)$.

Persze nem minden függvényre létezik ez a határérték, de a gyakorlatban előforduló futásidő-elemzésekben szinte mindig létezik és ki is lehet számítani.

Ezzel a módszerrel már össze tudjuk hasonlítani pl. a $\log n$ és a $\sqrt{n}$ függvényeket is. Közben a L'Hôpital szabályt is alkalmazzuk.

L'Hôpital szabály

Ha f, g a valósakon értelmezett, deriválható függvények, és $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy $\log n = o(\sqrt{n})$!

Hasznos

Ezen a kurzuson a log mindig kettes alapú. Ha valaki esetleg nem emlékszik:

- $\log n$ deriváltja $\frac{1}{\ln 2 \cdot n}$.
- $\sqrt{n}$ deriváltja pedig, mivel $\sqrt{n} = n^{1/2}$, így $\frac{1}{2}n^{-1/2}$, azaz $\frac{1}{2\sqrt{n}}$.
- 2^n deriváltja $\ln 2 \cdot 2^n$

Megoldás

Itt már nagyon nehéz (sőt, szinte lehetetlen) lenne minden c-re egy alkalmas n_0-t kézzel megadni. Ehelyett határértéket számolunk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2 \cdot n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\ln 2 \cdot n} = \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ami 0, hiszen a számláló konstans, a nevező pedig végtelenbe tart. Tehát $\log n = o(\sqrt{n})$.

Persze a L'Hôpital-szabályt többször is alkalmazhatjuk:

4. Feladat

Mutassuk meg, hogy $(\log n)^2 = o(\sqrt[3]{n})$!

Megjegyzés: ezen az órán a $(\log n)^2$-et sokszor $\log^2 n$-nel fogjuk jelölni.

Megoldás

Megint határértéket számolunk, $\log^2 n$ deriváltja $2 \log n \cdot \frac{1}{n \ln 2}$, $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$-é pedig $\frac{1}{3}n^{-2/3}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^2 n}{\sqrt[3]{n}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2 \log n \frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{3}n^{-2/3}} = \frac{6}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/3}} = \frac{6}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2 \cdot n}}{\frac{1}{3}n^{-2/3}} = \frac{18}{(\ln 2)^2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/3}},$$

ami 0, tehát tényleg $\log^2 n = o(n^{1/3})$.

Ennél általánosabban, az is igaz, hogy ha f egy polilogaritmikus függvény (azaz $\log^k n$ alakú valamilyen k konstansra), g pedig n^ϵ alakú valamilyen $\epsilon > 0$ konstansra, akkor $f = o(g)$, kijön k darab L'Hôpital szabállyal.

5. Feladat

Mutassuk meg, hogy $n^3 = o(2^n)$!

Megoldás

Három L'Hôpital szabályt alkalmazva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\ln 2 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{(\ln 2)^2 \cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{(\ln 2)^3 \cdot 2^n},$$

ami 0, hiszen a számláló konstans, a nevező meg végtelenbe tart.

Ennél általánosabban is igaz: ha f egy polinomfüggvény, g pedig egy a^n alakú exponenciális valamilyen $a > 1$-re, akkor $f = o(g)$.

6. Feladat

Mutassuk meg, hogy $4^n = o(n!)$.

Megoldás

Ugyan a limeszt felírhatjuk, de az $n!$ függvény nem terjed ki olyan könnyen valósra, mint az eddig látottak, így ezt **rendőrelvvel** csináljuk meg: megmutatjuk, hogy alulról is, felülről is 0 egy korlátja a határértéknek. Tehát csak 0 lehet.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!}$$

ez könnyű, hiszen két pozitív érték hányadosa pozitív, pozitív számok halmazának pedig a 0 mindenképp alsó korlátja lesz.

A felső korlát kicsit trükkösebb. A következőt szeretnénk kapni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!} \leq 0$$

Írjuk ki néhány tagig:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot n} \leq 0$$

A tört értékét növeljük, ha a nevezőt csökkentjük. Állítsuk mondjuk az 5-nél nagyobb tényezőket 5-re:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \cdots \cdot n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot \cdots \cdot 5}$$

Ez az utóbbi pedig nem más, mint

$$\frac{32}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4},$$

ami pedig azért 0, mert egy 1-nél kisebb konstanst hatványozunk $n-4$-re, ami végtelenbe tart.

Tehát a határérték tényleg 0.