Bonyolultságelmélet gyakorlat – 02
Visszavezetés

Eldöntési probléma

Abban az esetben beszélünk eldöntési problémáról, ha a várt output minden esetben:

- Accept/Reject
- igen/nem
- 1/0

Visszavezetés

Problémák egymáshoz viszonyított nehézségére egy fogalom.

Legyenek A és B eldöntési problémák. Azt mondjuk, hogy A (hatékonyan) visszavezethető B-re, ha van olyan f polinomidejű inputkonverzió, ami:

- A inputjaiból B inputjait készíti
- tartja a választ azaz $A(x) = B(f(x))$

Jele: $A \leq_P B$ (*B legalább olyan nehéz, mint A./A legfeljebb olyan nehéz, mint B*)

Ekkor, ha B-re létezik algoritmus, akkor A-ra is:

```
bool A(x) {
    return B(f(x));
}
```

Az f inputkonverzió polinomidejű, tehát **gyors** kell legyen! Ha nem lenne az, akkor az is beleférne, hogy megoldjuk az A problémát, aztán a megoldás függvényében B-nek egy konstans igaz vagy konstans hamis példányát adnánk vissza - de ennek nem sok értelme lenne.

Azt, hogy a futásidő polinomidejű, úgy értjük, hogy az input méretéhez képest az.

Az input méretén pedig általában azt fogjuk érteni, hogy megfelelően tömör kódolásban azt hány biten tudjuk eltárolni. Ezt a számot n-nel fogjuk jelölni.

Mi lehet az input mérete?

- gráf: csúcsok száma/élek száma, szomszédsági mátrix mérete
- string: hossza
- szám: N input mérete: $\lceil \log N \rceil + 1 \Rightarrow (\log N)$ -es

Számokat binárisan kódolunk (ez OK), az unáris viszont már nem megfelelően tömör kódolás.

- formula: mintha string lenne

pl: n, n^2, n^3, $n \log n$ Az $n \log n \leq n^2$, ezért polinomként tekintünk rá.

SAT

- **Input**: egy CNF
- **Output**: Kielégíthető-e?
- **Példa**: $\underbrace{(p \vee q)}_{\text{klóz}} \wedge \underbrace{\neg p}_{\text{literál}} \wedge \neg q \;\Rightarrow$ Ez egy NEM példány.

Nálunk nincs az inputban üres klóz!

$\overline{\text{SAT}}$

- **Input**: egy CNF
- **Output**: kielégíthetetlen-e?

Erre volt jó a rezolúció!

1. Feladat Mutassuk meg, hogy a DNF-tautológia $\leq_P \overline{\text{SAT}}$!

DNF-tautológia

- **Input**: egy DNF
- **Output**: tautológia-e?

Megoldás

$$\begin{array}{ccc} \text{DNF-TAUTOLÓGIA} & \leq_P & \overline{\text{SAT}} \\ \varphi \text{ DNF} & \longmapsto & \varphi' \text{ CNF} \\ \varphi \text{ tautológia} & \Leftrightarrow & \varphi' \text{ kielégíthetetlen} \end{array}$$

Tudjuk, hogy ha φ tautológia, akkor $\neg\varphi$ kielégíthetetlen.

Inputkonverzió (a keresett f függvény):

$$\varphi\text{-ből} \qquad \longmapsto \qquad \neg\varphi \text{ CNF-jét}$$

Ez az átalakítás épp lineáris időigényű: $\vee \leftrightarrow \wedge$ és $\neg p \leftrightarrow p$ cserékkel meg is van. És tartja a választ is. Épp ezt szerettük volna, készen is vagyunk.

Példa:

$$\varphi = (\neg p \wedge \neg q) \vee p \vee q \qquad \longmapsto \qquad (p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$$

Mire jó ez?

Ha tudjuk, hogy a baloldali probléma nehéz, akkor a jobboldali is az kell, hogy legyen!

2. Feladat Mutassuk meg, hogy az Párosítás $\leq_P$ SAT!

Párosítás

- **Input**: egy gráf
- **Output**: van-e benne teljes párosítás?

Megoldás

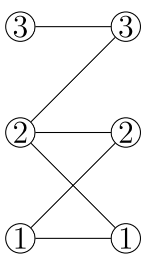
$$\begin{array}{ccc} \text{Párosítás} & \leq_P & \text{SAT} \\ G \text{ gráf} & \longmapsto & \varphi \text{ CNF} \\ G\text{-ben van párosítás} & \Leftrightarrow & \varphi \text{ kielégíthető} \end{array}$$

Ötlet:

Legyenek a változók G élei és akkor legyen egy változó igaz, ha az élet beválasztjuk a párosításba.

A formula pedig: *minden csúcsra pontosan* 1 *kiválasztott él van.* Ezt pedig úgy tudjuk leírni, hogy minden csúcsra **legalább** 1 és **legfeljebb** 1 kiválasztott él van.

Példa:



$$\begin{aligned} & (x_{11} \vee x_{12}) \wedge (x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}) \wedge (x_{33}) \wedge (x_{11} \vee x_{21}) \wedge (x_{12} \vee x_{22}) \wedge (x_{23} \vee x_{33}) \\ \wedge \quad & (\neg x_{21} \vee \neg x_{22}) \wedge (\neg x_{21} \vee \neg x_{23}) \wedge (\neg x_{22} \vee \neg x_{23}) \\ \wedge \quad & (\neg x_{11} \vee \neg x_{12}) \wedge (\neg x_{12} \vee \neg x_{22}) \wedge (\neg x_{23} \vee \neg x_{33}) \wedge (\neg x_{11} \vee \neg x_{21}) \end{aligned}$$

3. Feladat Mutassuk meg, hogy az PÁROS-E A GRÁF $\leq_{\mathbf{P}}$ SAT!

PÁROS-E A GRÁF

- **Input**: egy gráf
- **Output**: páros-e?

Két részre osztható-e a csúcsainak halmaza úgy, hogy minden él a két rész között menjen?
Hívjuk még „2-színezhető”-nek is.

Megoldás

$$\begin{array}{ccc} \text{PÁROS-E A GRÁF} & \leq_P & \text{SAT} \\ G \text{ gráf} & \longmapsto & \varphi \text{ CNF} \\ G \text{ páros gráf} & \Leftrightarrow & \varphi \text{ kielégíthető} \end{array}$$

Ötlet:

Mik legyenek a CNF változói? Csúcsok? Élek? Háromszögek?

Legyenek a változók G csúcsai.

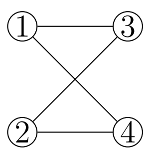
Inputkonverzió:

- $v \in V$-re legyen x_v logikai változó
- $x_v = 1$, ha x_v az egyik csoportban van
- $x_v = 0$, ha x_v a másik csoportban van

A formula pedig: minden él „zöld-kék” él: $\forall (u,v) \in E$-re legyen $(x_u \vee x_v) \wedge (\neg x_u \vee \neg x_v)$

A CNF: $\bigwedge\limits_{(u,v)\in E} (x_u \vee x_v) \wedge (\neg x_u \vee \neg x_v)$

Példa:



$$\begin{array}{r} (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \\ \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4) \\ \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \\ \wedge (x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \end{array}$$