

Bonyolultságelmélet gyakorlat – 03

Eldönthetlenség

Egy probléma **eldönthetetlen**, ha nincs egyáltalán őt eldöntő algoritmus.

MEGÁLLÁS PROBLÉMA

- **Input:** egy M forráskód és annak egy x inputja
- **Output:** M megáll-e x -en futtatva?

Ez egy eldönthetetlen
probléma.
Ez már volt előadáson!

Ennek felhasználásával más problémák eldönthetlenségét tudjuk bizonyítani.

Módszer eldönthetlenség bizonyítására:

- veszünk egy ismert eldönthetetlen problémát (PL. MEGÁLLÁS)
- visszavezetjük az új problémára
- egy $(M; x)$ párból kell készítenünk az új A problémának egy I inputját úgy, hogy M megáll x -en $\Leftrightarrow A(I) = 1 \quad // I \in A$.

1. Feladat Mutassuk meg, hogy a **MINDENEN MEGÁLLÁS** probléma is eldönthetetlen!

MINDENEN MEGÁLLÁS

- **Input:** egy M' forráskód
- **Output:** M' megáll-e minden lehetséges inputon?

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

MEGÁLLÁS	\leq_R	MINDENEN MEGÁLLÁS
(M, x)	\mapsto	M'
M megáll x -en	\Leftrightarrow	M' megáll minden

```
bool M'(y) {  
    M(x);  
}
```

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M'$ megáll minden inputon
Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M'$ minden végtelen ciklusba esik

Mert tetszőleges, x -től független y inputon futtattuk

2. Feladat Mutassuk meg, hogy az **ELFOGADÁS** probléma is eldönthetetlen!

ELFOGADÁS

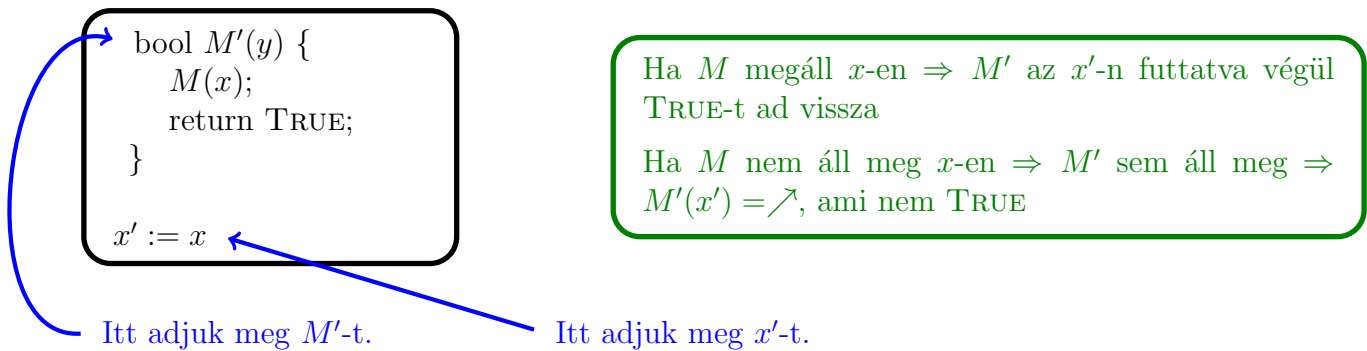
- **Input:** egy M' forráskód, x' inputja
- **Output:** $M'(x') = \text{TRUE}$?

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

$$\begin{array}{lcl}
 \text{MEGÁLLÁS} & \leq_R & \text{ELFOGADÁS} \\
 (M, x) & \mapsto & (M', x') \\
 M \text{ megáll } x\text{-en} & \Leftrightarrow & M'(x') = \text{TRUE}
 \end{array}$$

Megjegyzés: Most az ELFOGADÁS probléma mindkét inputját, M' -t és x' -t is meg kell adjuk!



TAKTIKA

Mindig (esetleg valami if után) futtatjuk M -et x -en, aztán esetleg csinálhatunk még valamit (pl.: return true;)

3. Feladat Mutassuk meg, hogy az **EKVIVALENCIA** probléma is eldönthetetlen!

EKVIVALENCIA

- **Input:** egy M_1 és egy M_2 forráskód
- **Output:** $M_1 \equiv M_2$? (Vagyis $\forall y M_1(y) = M_2(y)$?)

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

$$\begin{array}{lcl}
 \text{MEGÁLLÁS} & \leq_R & \text{EKVIVALENCIA} \\
 (M, x) & \mapsto & M_1 \text{ és } M_2 \\
 M \text{ megáll } x\text{-en} & \Leftrightarrow & M_1 \equiv M_2
 \end{array}$$

```
bool M1(y) {
    M(x);
    return TRUE;
}
```

Eddig ez van:

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M_1(y) = \text{TRUE}$

Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M_1(y) = \nearrow$

Kellene:

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M_2(y) = \text{TRUE}$

Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M_2(y) \neq \nearrow$

```
bool M2(y) {
    return TRUE;
}
```

Ha M megáll x -en, akkor (és csak akkor) $M_1 \equiv M_2$

4. Feladat

Mutassuk meg, hogy az **ELÉRHETŐ SOR** probléma is eldönthetetlen!

ELÉRHETŐ SOR

- **Input:** egy M' forráskód, és egy kijelölt sora
- **Output:** van-e olyan y input, amin M' -t elindítva a vezérlés előbb-utóbb a kijelölt sorra futhat?

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

MEGÁLLÁS	\leq_R	ELÉRHETŐ SOR
(M, x)	\mapsto	$(M', \text{kijelölt sor})$
M megáll x -en	\Leftrightarrow	M' ráfuthat a kijelölt sorra

Megjegyzés: Most az ELÉRHETŐ SOR probléma mindkét inputját, M' -t és az M' egy sorát (kijelölt sor) is meg kell adjuk!

```
bool M'(y) {
    M(x);
    return TRUE;
};
```

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M'$ ráfuthat a kijelölt sorra

Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M'$ -ben még a kijelölt sor előtt végtelen ciklus

Ez legyen a **kijelölt sor**!

5. Feladat

Mutassuk meg, hogy a **RENDEZÉS** probléma is eldönthetetlen!

RENDEZÉS

- **Input:** egy M' forráskód
- **Output:** az M' egy rendezőalgorithmus implementációja-e?

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{MEGÁLLÁS} & \leq_R & \text{RENDEZÉS} \\ (M, x) & \mapsto & M' \\ M \text{ megáll } x\text{-en} & \Leftrightarrow & M' \text{ egy rendezőalgoritmust implementál} \end{array}$$

```
int[] M'(int[] y) {
    M(x);
    return SORT(y);
};
```

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M'$ rendezést hajt végre
Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M'$ nem rendez, mert még előtte végtelen ciklus

Ez legyen a kedvenc rendezőalgoritmusunk!

6. Feladat

Mutassuk meg, hogy a **KONSTANS-E** probléma is eldönthetetlen!

KONSTANS-E

- **Input:** egy M' forráskód
- **Output:** az M' mindig ugyanazt adja-e vissza?

Megoldás

Visszavezetjük a Megállást erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{MEGÁLLÁS} & \leq_R & \text{KONSTANS-E} \\ (M, x) & \mapsto & M' \\ M \text{ megáll } x\text{-en} & \Leftrightarrow & M' \text{ viselkedése nem függ az inputtól} \end{array}$$

```
bool M'(y) {
    if(y == 0) return TRUE;
    M(x);
    return TRUE;
};
```

Ha M megáll x -en $\Rightarrow M'$ mindig TRUE-t ad vissza
Ha M nem áll meg x -en $\Rightarrow M'$ TRUE-t ad vissza
 $y = 0$ -ra és minden másra $M'(y) = \nearrow \Rightarrow M'$ nem konstans