Bonyolultságelmélet gyakorlat – 04
NP-teljesség

SAT

- **Input**: φ CNF (konjunktív normálformájú formula)
- **Output**: kielégíthető-e?

Előadásról tudjuk, hogy a SAT egy NP-teljes probléma.

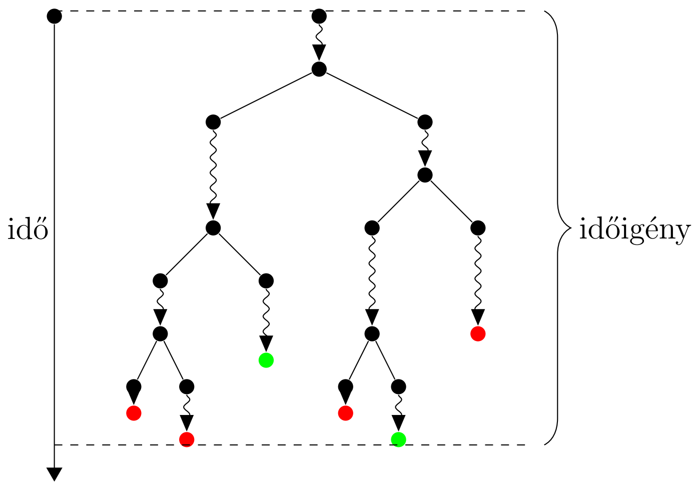
Azaz minden NP-beli probléma visszavezethető rá és NP-beli is.

NP-nehéz

nemdeterminisztikusan polinomidőben eldönthető

Azaz létezik olyan algoritmus, amiben lehet nemdeterminisztikusan bitet generálni, és akkor mondhat igent, ha a problémának az input egy igen példánya, és az algoritmus időkorlátja polinom.

Nemdeterminizmus:



A lényege: generálunk egy „tanút" és determinisztikusan ellenőrzünk (gyorsan).

A nemdeterminisztikus program időigénye akkor $f(n)$, ha minden n méretű inputon minden lehetséges számítási szál (ld. a bal oldali ábrát) legfeljebb $f(n)$ lépésben terminál. Minden lépésben nemdeterminisztikusan bitet generálhatunk. Ha a futásidő polinom, akkor NP algoritmusról beszélünk.

1. Feladat Mutassuk meg, hogy a SAT $\in$ NP!

Megoldás

Az input CNF változói: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Egy jó nemdeterminisztikus algoritmus:

- $\forall x_i$-t nemdeterminisztikusan beállítunk 0-ra vagy 1-re, $i = 1, 2, \ldots$ ($O(n)$ lépés)
- megnézzük, hogy az adott értékadás kielégíti-e a formulát (lineáris)
- ha igen, akkor ACCEPT
- ha nem, akkor REJECT

Ha egy problémáról belátjuk, hogy NP-nehéz/teljes, akkor az egy jó érv arra, hogy egzakt megoldóalgoritmus helyett pl közelítő algoritmussal, vagy randomizált algoritmussal próbáljuk meg megoldani.

Módszer arra, hogy belássuk, hogy egy probléma NP-teljes:

Vegyünk egy ismerten NP-teljes problémát és vezessük ezt az új problémára vissza.

NP-teljes problémák

- SAT: az input formula kielégíthető-e?
- Hamilton-út: van-e az input gráf minden csúcsát pontosan egyszer érintő út?
- 3-színezés: kiszínezhetőek-e az input gráf csúcsai 3 színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különbözőek legyenek?

(ezeket előadásról tudjuk, hogy NP-teljesek)

2. Feladat

Mutassuk meg, hogy a Hamilton-kör probléma NP-nehéz!

Hamilton-kör

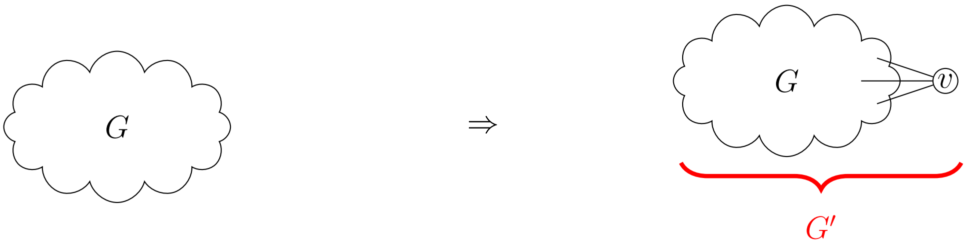
- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf
- **Output**: van-e G-ben minden csúcsot pontosan egyszer érintő kör?

Megoldás

Visszavezetjük a Hamilton-utat erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{Hamilton-út} & \leq & \text{Hamilton-kör} \\ G & \longmapsto & G' \\ G\text{-ben van Hamilton-út} & \Leftrightarrow & G'\text{-ben van Hamilton-kör} \end{array}$$

Inputkonverzió:



Ha G-ben van Hamilton-út, akkor G'-ben v-vel körré alakítható, mivel v-t minden csúcshoz hozzákötöttük (így a Hamilton-út két végpontjához is).

Fordítva, ha G'-ben Hamilton-kör, akkor v-t törölve a maradék gráfban (G) egy Hamilton-utat kapunk.

3. Feladat Mutassuk meg, hogy a 4-SZÍNEZÉS probléma NP-nehéz!

4-SZÍNEZÉS

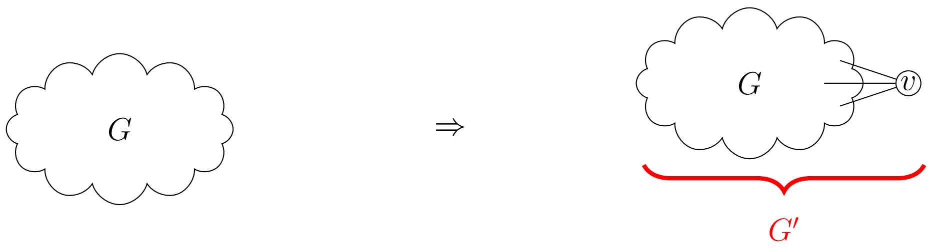
- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf
- **Output**: megadható-e G-nek egy helyes 4-színezése?

Megoldás

Visszavezetjük a 3-színezést erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{3-SZÍNEZÉS} & \leq & \text{4-SZÍNEZÉS} \\ G & \longmapsto & G' \\ G \text{ kiszínezhető 3 színnel helyesen} & \Leftrightarrow & G' \text{ kiszínezhető 4 színnel helyesen} \end{array}$$

Inputkonverzió:



Ha G 3-színezhető, akkor G' 4-színezhető lesz kiindulva G egy helyes 3-színezéséből, ha az új v csúcsnak valami új, negyedik színt adunk, amit muszáj, hiszen mivel mindenkivel összekötöttük csak új színt kaphat.

Fordítva, ha G' 4-színezhető, akkor véve G' egy helyes 4-színezését, mivel a v csúcs színe egyedi (mivel mindegyik másik csúcsnak szomszédja), őt elhagyva a maradék gráf 3-színezhető.