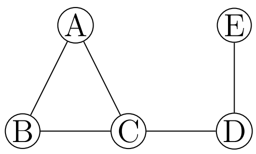
Bonyolultságelmélet gyakorlat – 05
Gráfos visszavezetések I.

Független Csúcshalmaz

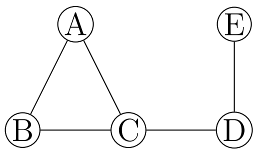
- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $0 < k < |V(G)|$ szám (ahol $V(G)$ a G gráf csúcsainak halmaza)
- **Output**: van-e G-ben k db olyan csúcs, amik páronként nem szomszédosak?

Például:



, 3

Nem (pl. mert A,B,C közül max egyet tudunk kiválasztani és D,E közül is max egyet)



, 2

Igen, például C és E.

A Független csúcshalmaz NP-teljes.

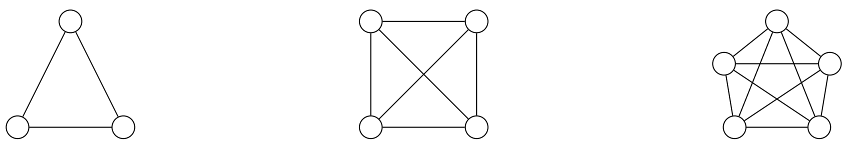
1. Feladat Mutassuk meg, hogy a Klikk probléma NP-nehéz[1]!

Klikk

- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $0 < k < |V(G)|$ szám
- **Output**: van-e G-ben k db olyan csúcs, amik páronként szomszédosak?

Klikk: teljes gráf, vagyis olyan gráf, ahol minden csúcs minden másikkal össze van kötve.

Például: (K_3, K_4 és K_5)



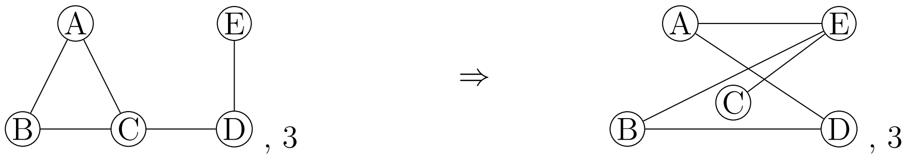
[1] minden mai problémánk könnyen láthatóan NP-ben van, ezért ezt nem nézzük meg külön, de mindegyik NP-teljes is.

Megoldás

Visszavezetjük a Független csúcshalmazt (FCSH) erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{FCSH} & \leq & \text{Klikk} \\ (G,k) & \longmapsto & (G',k') \\ G\text{-ben van } k \text{ elemű FCSH} & \Leftrightarrow & G'\text{-ben van } k' \text{ elemű Klikk} \end{array}$$

Inputkonverzió: $G' = \bar{G}$ (azaz G komplementere) és $k' = k$



Ahhoz, hogy lássuk ennek helyességét elég azt meggondolni, hogy ha az inputhoz kapunk egy tanút is, abból tudunk készíteni tanút az inputkonverzió outputjában, és fordítva.

Itt például az inputhoz egy tanú egy k-csúcsú független csúcshalmaz, az outputban ugyanaz a csúcshalmaz egy k-csúcsú klikké, vagyis ottani tanúvá válik, és az output-beli k-csúcsú klikk (az ottani tanú) pedig eredetileg egy k-csúcsú FCSH kellett legyen.

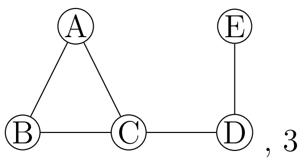
2. Feladat

Mutassuk meg, hogy a Csúcslefedés probléma NP-nehéz!

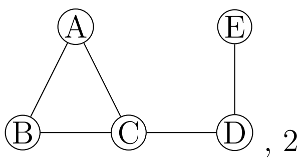
Csúcslefedés

- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $0 < k < |V(G)|$ szám
- **Output**: lefogható-e minden G-beli él legalább egyik végpontja max k db csúccsal?

Például:



Igen, például {A,C,D}.



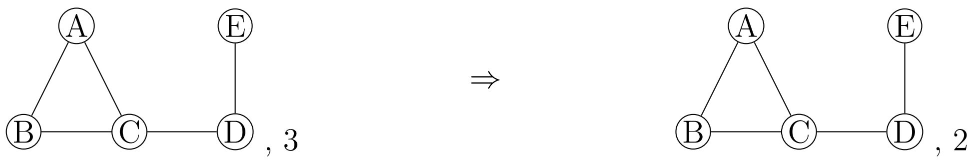
Nem, mert a háromszöghöz legalább 2 a |-hoz pedig legalább 1 kell.

Megoldás

Visszavezetjük a Független csúcshalmazt (FCSH) erre!

FCSH	$\leq$	Csúcslefedés
(G,k)	$\longmapsto$	(G',k')
G-ben van k elemű FCSH	$\Leftrightarrow$	G'-ben az élek lefedhetők k' darab csúccsal

Inputkonverzió: $G' = G$ és $k' = |V(G)| - k$



Vegyük észre, hogy az inputban egy $\mathcal{X}$ független csúcshalmaz (=tanú) épp azt jelenti, hogy köztük nem megy él, vagyis minden élnek legalább az egyik végpontja $V(G) - \mathcal{X}$-ben van, ami pont azt jelenti, hogy $V(G) - \mathcal{X}$ egy lefogó csúcshalmaz, elemszáma pedig épp k'.

A másik irányba pedig hasonlóan, egy k'-elemű lefogó csúcshalmaz komplementere egy k-elemű FCSH lesz. Tehát megint tanúból tanút tudunk készíteni, így a (nyilván polinomidejű) visszavezetés tartja a választ.

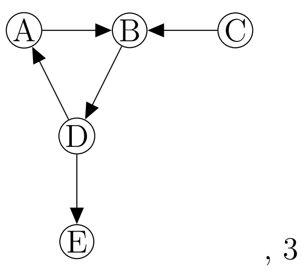
3. Feladat

Mutassuk meg, hogy a Domináns csúcshalmaz probléma NP-nehéz!

Domináns csúcshalmaz

- **Input**: $\vec{G} = (V,E)$ irányított gráf, $0 < k < |V(G)|$ szám
- **Output**: van-e G-ben olyan k elemű csúcshalmaz, amiből az összes többi csúcs egy lépésben elérhető? $\forall x \notin \mathcal{X} \quad \exists y \in \mathcal{X} \quad (y,x) \in E(G)$

Például:



Igen, például $\mathcal{X}$={C,D}.

Vegyük észre: a forrás csúcsokat (amikbe nem megy él) ilyenkor mindig ki kell választanunk, a nyelő csúcsokat (amikből nem jön ki él) viszont felesleges kiválasztanunk, hasznosabb, ha egy ősüket választjuk inkább.

Megoldás

Visszavezetjük a Csúcslefedést erre!

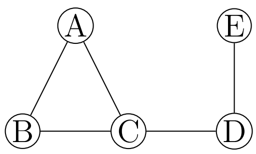
$$\begin{array}{ccc} \textsc{Csúcslefedés} & \leq & \textsc{Domináns csúcshalmaz} \\ (G,k) & \longmapsto & (\vec{G}',k') \\ G\text{-ben van } k \text{ elemű lefogó} & \Leftrightarrow & \vec{G}'\text{-ben van } k \text{ elemű domináns} \end{array}$$

Inputkonverzió(v1):

Megjegyzés: itt nem lesz elég csúcsokból csúcsokat csinálni. A Csúcslefedés esetén csúcsokkal éleket fogunk le, itt viszont csúcsokkal kéne csúcsokat.

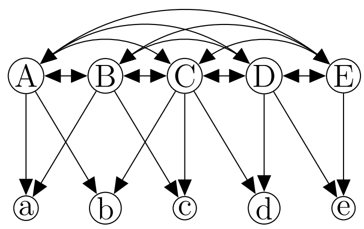
Ötlet: legyenek $\vec{G}'$ csúcsai a G csúcsai és élei

1. ha G-ben c-re illeszkedik e él $\Rightarrow$ $c \to e$ legyen él $\vec{G}'$-ben
2. $\forall A, B$ csúcsok között is $A \to B$ is legyen él
3. $k' := k$



, 3

$\Rightarrow$



, 3

Ha G-ben $\mathcal{X}$ egy lefogó ponthalmaz:

- $\vec{G}'$-ben dominálja a többi csúcsot is a 2. átalakítás miatt
- dominálja az éleket is (mert lefogó)

Ha $\vec{G}'$-ben $\mathcal{X}$ egy domináns ponthalmaz:

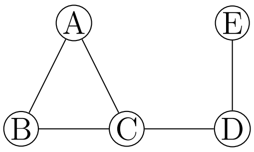
- az „él" csúcsok helyett az ősüket vegyük be, még mindig domináns
- G-ben ez már lefogó lesz

Inputkonverzió(v2):

Megjegyzés: Ha észrevesszük azt, hogy a felső csúcsokat mindenképp dominálnunk kell egy csúccsal, megtehetjük, hogy veszünk egy új csúcsot, ami mindegyiknek őse (azaz, ha kiválasztjuk, dominálja őket, és ki is kell válasszuk, mert forrás).

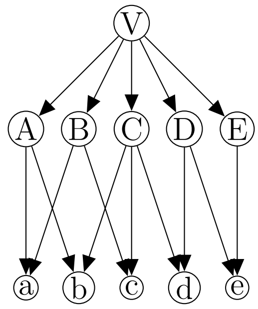
Ötlet: legyenek $\vec{G}'$ csúcsai a G csúcsai és élei

1. ha G-ben c-re illeszkedik e él $\Rightarrow$ $c \to e$ legyen él $\vec{G}'$-ben
2. Veszünk egy új V csúcsot, majd minden G-beli X csúcsra $V \to X$ is legyen él
3. $k' := k + 1$ (mert az új forrást biztosan be kell választanunk)



, 3

$\Rightarrow$



, 4

Ha G-ben $\mathcal{X}$ egy lefogó ponthalmaz:

- $\vec{G}'$-ben $V \cup \mathcal{X}$ domináns lesz, mert V dominálja az összes csúcsot, X pedig dominálja az összes élt (mert lefogó ponthalmaz)
- $V \cup \mathcal{X}$ pont k'-elemű

Ha $\vec{G}'$-ben $\mathcal{Y}$ egy domináns ponthalmaz:

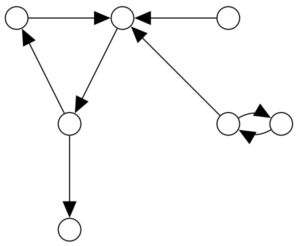
- ekkor $\mathcal{Y}$-ban benne van V (mert forrás)
- ahogy korábban is, feltehetjük, hogy $\mathcal{Y}$-ban nincs nyelő („él" csúcs), tehát $\mathcal{Y} = V \cup \mathcal{X}$ alakú valamilyen $\mathcal{X} \subseteq V(G)$ halmazra, ez az $\mathcal{X}$ tehát dominálja az összes „él" csúcsát $\vec{G}'$-nek
- G-ben ez már egy k elemű lefogó lesz

4. Feladat Mi a helyzet a Domináns csúcshalmaz több lépésben probléma bonyolultságával?

Domináns csúcshalmaz több lépésben

- **Input**: $\vec{G} = (V, E)$ irányított gráf, $0 < k < |V(G)|$ szám
- **Output**: van-e G-ben olyan k elemű csúcshalmaz, amiből az összes többi csúcs elérhető?

Például:



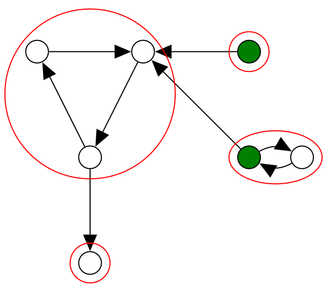
, 2

Ez P-ben van. Adjunk rá hatékony algoritmust!

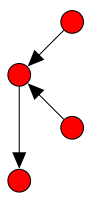
Megoldás

Algoritmus:

1. Keressük meg az erősen összefüggő komponenseket (SCC) (ez megy lineáris időben)
2. Komponensenként elég ≤ 1 csúcsot kiválasztani
3. Elég a komponensgráf forráscsúcsait kiválasztani



Az SCC-kben mindent pont minden másikból elérhető $\Rightarrow$ redukálhatjuk a gráfot



Ez az eredeti gráf komponensgráfja.

Innen már elég csak a 0 befokú csúcsokat kiválasztani és azokat kell is.