Bonyolultságelmélet gyakorlat – 06
Gráfos visszavezetések II.

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy a $n/2$-HOSSZÚ KÖR probléma NP-nehéz!

$n/2$-HOSSZÚ KÖR

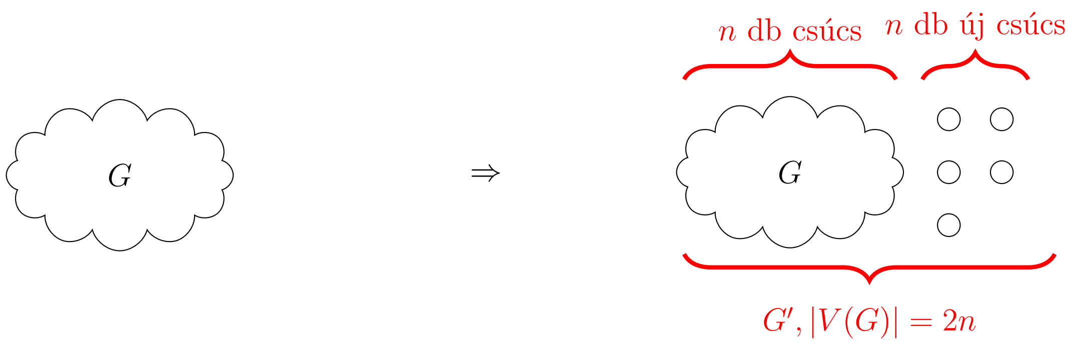
- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf
- **Output**: van-e G-ben a csúcsok felén átmenő kör?

Megoldás

Visszavezetjük a Hamilton-kört erre!

HAMILTON-KÖR	$\leq$	$n/2$-HOSSZÚ KÖR
G	$\longmapsto$	G'
G-ben van Hamilton-kör	$\Leftrightarrow$	G'-ben van a csúcsok felén áthaladó kör

Inputkonverzió:



Ha G-ben van Hamilton-kör, akkor G'-ben az épp a csúcsok felén fog átmenni, hiszen a gráf másik fele izolált pontokból áll.

Fordítva, ha G'-ben van a csúcsok felén áthaladó kör, az csak G-ben lehet az izolált pontok miatt.

2. Feladat Mutassuk meg az $n/100$-Hamilton-kör és $\sqrt{n}$-Hamilton-kör NP-nehézségét!

Megoldás

Visszavezetjük mindkettőre a Hamilton-kört!

- Hamilton-kör $\leq n/100$-Hamilton-kör
  $G' := G$ mellé vegyünk $+99n$ db pontot, ahol $n = |V(G)|$
- Hamilton-kör $\leq \sqrt{n}$-Hamilton-kör
  $G' := G$ mellé vegyünk $+n^2 - n$ db pontot, ahol $n = |V(G)|$

3. Feladat Mutassuk meg, hogy az s-t-Hamilton-út probléma NP-nehéz!

s-t-Hamilton-út

- **Input**: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $s, t \in V(G)$
- **Output**: létezik-e G-ben Hamilton-út s-ből t-be?

Megoldás

Visszavezetjük a Hamilton-utat erre!

Hamilton-út	$\leq$	s-t-Hamilton-út
G	$\longmapsto$	(G', s, t)
G-ben van Hamilton-út	$\Leftrightarrow$	G'-ben van s-ből t-be Hamilton-út

Inputkonverzió:

Ha G-ben van $u \rightsquigarrow v$ Hamilton-út és s-t és t-t mindenkihez bekötjük, akkor G'-ben lesz $s \to u \rightsquigarrow v \to t$ egy s-t-Hamilton-út.

Fordítva, tetszőleges gráfban egy Hamilton-út végpontját elhagyva a maradék részgráf egy Hamilton-útját kapjuk. G'-beli $s \rightsquigarrow t$ Hamilton-útból előbb s, majd t elhagyásával a maradék gráfra (ami G) kapunk Hamilton-utat.

Ha egy gráfból elhagyhatunk

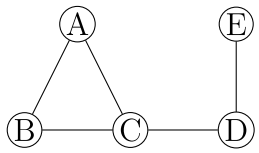
- csúcsokat és éleket tetszőlegesen $\Rightarrow$ egy részgráfot kapunk
- csak csúcsokat (a rájuk illeszkedő élekkel együtt, de további éleket nem) $\Rightarrow$ egy feszített részgráfot kapunk

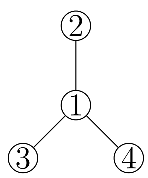
4. Feladat Mutassuk meg, hogy a Részgráf izomorfizmus probléma NP-nehéz!

Részgráf izomorfizmus

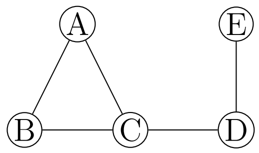
- **Input**: G és H gráfok
- **Output**: G-ben létezik-e H részgráfként? (azaz megkapható-e H a G-ből csúcsok és élek elhagyásával)

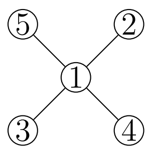
Például:

$G =$ 

$H =$ 

Igen, például $1 \to$ C, $2 \to$ A, $3 \to$ B, $4 \to$ D.

$G =$ 

$H =$ 

Nem, mert ≥ 4 fokú csúcs nincs G-ben.

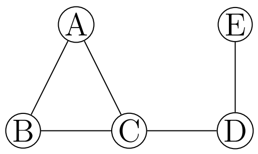
Megoldás

Visszavezetjük rá a Hamilton-utat, a Hamilton-kört, a Klikket és a Független csúcshalmazt!

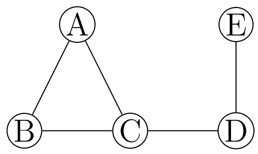
Inputkonverziók:

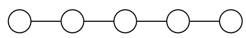
- Hamilton-út $\leq$ RGI

  $G \mapsto (G, P_n)$, ahol P_n az $n = |V(G)|$ csúcsú út



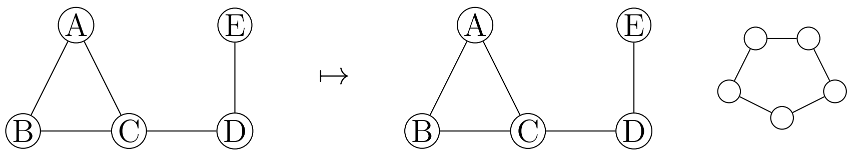
$\mapsto$





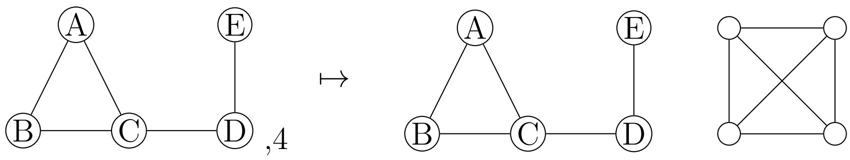
- Hamilton-kör $\leq$ RGI

  $G \mapsto (G, C_n)$, ahol C_n az $n = |V(G)|$ csúcsú kör



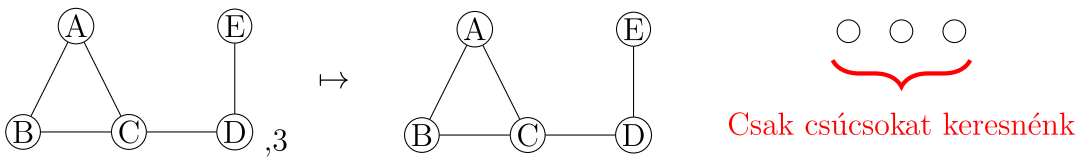
- Klikk $\leq$ RGI

  $(G, k) \mapsto (G, K_k)$, ahol K_k a k csúcsú klikk (teljes gráf)



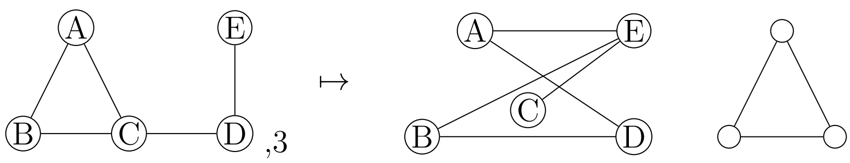
- Független csúcshalmaz $\leq$ RGI

  $G \mapsto$ (G és k db csúcs) $\rightarrow$ Ez így nem lesz jó!



  De kihasználhatjuk, hogy a Független csúcshalmaz visszavezethető a Klikkre, ami pedig az RGI-re, és hogy a hatékony visszavezetés tranzitív.

  Tehát kapjuk a FCSH $\leq$ Klikk $\leq$ RGI alapján, hogy egy helyes inputkonverzió $(G, k) \mapsto (\bar{G}, K_k)$, ahol $\bar{G}$ a G komplementere és K_k a k csúcsú klikk.

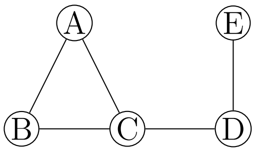


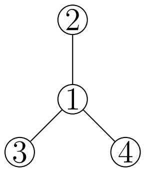
5. Feladat Mutassuk meg, hogy a Feszített részgráf izomorfizmus probléma NP-nehéz!

Feszített Részgráf izomorfizmus

- **Input**: G és H gráfok
- **Output**: G-ben létezik-e H feszített részgráfként? (azaz van-e $f : V(H) \rightarrow V(G)$ injektív függvény, hogy $(u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(G)$)

Például:

$G =$ 

$H =$ 

Nem, mert az AB él nem lehetne benne G-ben.

Megoldás

Visszavezetjük rá a Klikket!

Inputkonverzió: $\textsc{Klikk} \leq \text{RGI}$

$(G, k) \mapsto (G, K_k)$, ahol K_k a k csúcsú klikk (teljes gráf)