Bonyolultságelmélet gyakorlat – 07
Formulás visszavezetések I.

SAT

- **Input**: φ konjunktív normálformájú formula (továbbiakban CNF)
- **Output**: kielégíthető-e? (Azaz lehet-e úgy értéket adni a változóinak, hogy a formula igazra értékelődjön ki?)

A SAT NP-teljes.

1. Feladat Mutassuk meg, hogy az 1-híján SAT probléma NP-nehéz!

1-híján SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: kielégíthető-e max egy kivételével egyszerre φ összes klóza?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-t erre!

SAT	$\leq$	1-híján SAT
φ	$\longmapsto$	φ'
φ kielégíthető	$\Leftrightarrow$	van olyan T értékadás, ami mellett φ'-ben max egy klóz értéke lesz 0

Inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \wedge x \wedge \neg x$$

Ez így jó is lesz: $\varphi \mapsto \varphi \wedge x \wedge \neg x$ Ha van egy olyan T értékadás, amire $T(\varphi) = 1$, akkor T φ'-ben pontosan x-et vagy $\neg x$-et állítja hamisra, azaz maximum egy klóz lesz hamis.

Fordítva, ha T egy olyan értékadás, hogy φ'-ben csak egy klóz hamis, akkor az csak x vagy $\neg x$ lehet, tehát φ-ben a klózok mind igazra kell kiértékelődjenek.

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (w) \wedge (\neg w)$$

2. Feladat Mutassuk meg az 2-HÍJÁN SAT NP-nehézségét!

Megoldás

Visszavezetjük rá a SAT-ot!

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \leq & \text{2-HÍJÁN SAT} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \varphi' \text{van olyan } T \text{ értékadás, ami mellett} \\ & & \varphi'\text{-ben max két klóz értéke lesz } 0 \end{array}$$

Inputkonverzió: (az előző alapján)

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \wedge x \wedge \neg x \wedge y \wedge \neg y$$

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (w) \wedge (\neg w) \wedge (w_2) \wedge (\neg w_2)$$

3. Feladat Mutassuk meg, hogy a 2/3-SAT probléma NP-nehéz!

2/3-SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: kielégíthető-e egyszerre φ klózainak 2/3-a?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-t erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \leq & \text{2/3-SAT} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \varphi'\text{-ben a klózok 2/3-a kielégíthető egyszerre} \end{array}$$

Inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = \underbrace{\underbrace{c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n}_{n \text{ darab}} \wedge \underbrace{x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge \neg x_1 \wedge \ldots \wedge \neg x_n}_{\text{pontosan } n \text{ darab kielégíthető}}}_{3n \text{ klóz, amiből } n+n \text{ db kielégíthető}}$$

Ha van egy olyan T értékadás, amire $T(\varphi) = 1$, akkor $T(\varphi')$-ben pontosan $2n$ db klóz kielégíthető, mivel $c_1, \ldots, c_n$ kielégíthetőek, $x_1, \ldots, x_n$ és $\neg x_1, \ldots, \neg x_n$ közül pedig pontosan n db lesz kielégíthető.

Fordítva, ha T egy olyan értékadás, hogy φ'-ben a klózok kétharmada igaz, akkor az csak úgy lehet, hogy az $x_1, \ldots, x_n, \neg x_1, \ldots, \neg x_n$ egységklózoknak pontosan a fele (n db) igaz és még $c_1, \ldots, c_n$ igaz, tehát φ-ben a klózok mind igazra kell kiértékelődjenek.

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (w_1) \wedge (w_2) \wedge (w_3) \wedge (\neg w_1) \wedge (\neg w_2) \wedge (\neg w_3)$$

4. Feladat

Mutassuk meg, hogy a 3/5-SAT probléma NP-nehéz!

3/5-SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: kielégíthető-e egyszerre φ klózainak 3/5-e?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-t erre!

SAT	$\leq$	3/5-SAT
φ	$\longmapsto$	φ'
φ kielégíthető	$\Leftrightarrow$	φ'-ben a klózok 3/5-a kielégíthető egyszerre

Inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge \neg x_1 \wedge \ldots \wedge \neg x_k$$

Hogyan lehet kiszámolni, hogy ez a k mekkora? Nézzük:

Összesen $n + 2k$ klózunk van, ebből $n + k$ lehet maximum kielégíthető. Tehát a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{n+k}{n+2k} = \frac{3}{5}$$

$$5n + 5k = 3n + 6k$$

$$2n = k$$

Tehát a helyes inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = \underbrace{\underbrace{c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n}_{n \text{ darab}} \wedge \underbrace{x_1 \wedge \ldots \wedge x_{2n} \wedge \neg x_1 \wedge \ldots \wedge \neg x_{2n}}_{\text{pontosan } 2n \text{ darab kielégíthető}}}_{5n \text{ klóz, amiből } n+2n \text{ db kielégíthető}}$$

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 \wedge w_5 \wedge w_6 \wedge \neg w_1 \wedge \neg w_2 \wedge \neg w_3 \wedge \neg w_4 \wedge \neg w_5 \wedge \neg w_6$$

5. Feladat

Mi az 1/2-SAT probléma bonyolultsága?

1/2-SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: kielégíthető-e egyszerre φ klózainak 1/2-e?

Megoldás

Ha az előző alapján számolunk mennyi lenne k a visszavezetésben?

$$\frac{n+k}{n+2k} = \frac{1}{2}$$
$$2n + 2k = n + 2k$$
$$n = 0$$

Ez pedig nem lehetséges, hiszen φ klózainak száma n, ami sosem lesz nulla. A visszavezetés nem fog így menni.

Méghozzá azért, mert ez a probléma P-ben van! (note: emlékezzünk vissza, hogy a mi input CNF-jeinkben nincs üres klóz)

Adjunk rá egy hatékony algoritmust!

Ha van egy $\varphi = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$ alakú formulánk, abban a

- konstans 1 értékadás pontosan azokat a klózokat elégíti ki, amikben van pozitív literál
- konstans 0 értékadás pontosan azokat a klózokat elégíti ki, amikben van negatív literál

```
bool 1/2-SAT(CNF φ){
    return TRUE;
}
```

Tehát valamelyik a kettő közül mindig jó lesz!