Bonyolultságelmélet gyakorlat – 08
Formulás visszavezetések II.

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy a 3xSAT probléma NP-nehéz!

3xSAT

- **Input**: φ CNF, minden változó max 3-szor fordul elő
- **Output**: kielégíthető-e?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-ot erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \leq & \text{3xSAT} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi', \text{ minden változó max 3-szor fordul elő} \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \varphi' \text{ kielégíthető} \end{array}$$

Inputkonverzió:

- Indexeljük le azokat a változókat, amik több, mint 3x fordulnak elő.
  - $+$ így minden változó max 3x lesz
  - $-$ az x_i leindexelt változók között nincs összefüggés

  $\Downarrow$

- Tegyük őket egyenlővé

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (x \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$

- Indexelés:

$$(x_1 \vee y) \wedge (\neg x_2 \vee \neg y) \wedge (x_3 \vee z) \wedge (x_4 \vee \neg y \vee \neg z)$$

- Egyenlővé tétel:
  - $\wedge (x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3) \wedge (x_3 \leftrightarrow x_4) \wedge (x_4 \leftrightarrow x_1)$
    - $\wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_1) \wedge (x_4 \vee \neg x_1)$
    - Így mindenki 5x lesz $\Rightarrow$ 5x SAT NP-teljes
  - $\wedge (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow x_4) \wedge (x_4 \rightarrow x_1)$
    - $\wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_1)$
    - Így mindenki 3x fordul elő! Jó lesz!

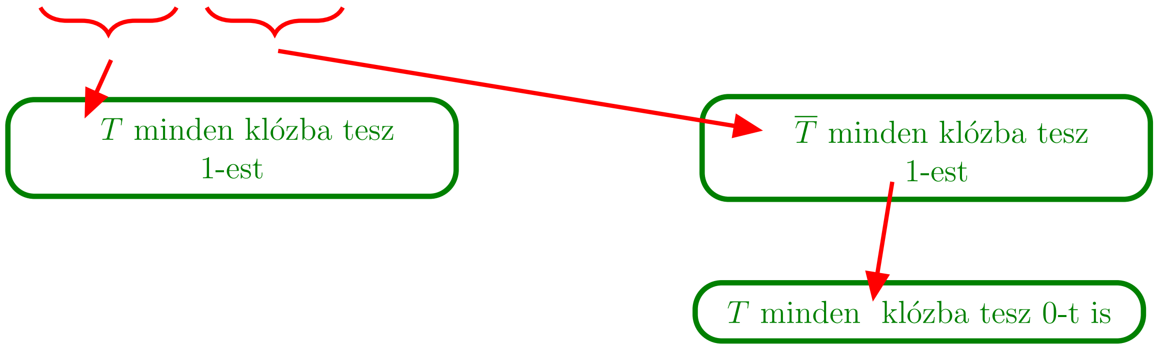
2. Feladat Mutassuk meg az KOMPLEMENTER SAT NP-nehézségét!

KOMPLEMENTER SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: van-e olyan T értékadás, amire $T(\varphi) = \overline{T}(\varphi) = 1$?

Megoldás

- ha φ-ben T minden klózt vegyesen állít 0/1-re, akkor $\overline{T}$ is (és akkor T is és $\overline{T}$ is kielégíti, mert minden klózba tesznek 1-est)
- ha $T(\varphi) = 1$ és $\overline{T}(\varphi) = 1$



Ez a probléma ugyanaz, mint:

3. Feladat Mutassuk meg, hogy a NEMMINDEGYENLŐ SAT probléma NP-nehéz!

NEMMINDEGYENLŐ SAT

- **Input**: φ CNF
- **Output**: van-e olyan értékadás, ami minden klózban állít 0-ra és 1-re is literált?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-t erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \leq & \text{NEMMINDEGYENLŐ SAT} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \exists T\ T(\varphi') = \overline{T}(\varphi') = 1 \end{array}$$

Inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = (c_1 \vee x) \wedge (c_2 \vee x) \wedge \ldots \wedge (c_n \vee x) \text{ ahol } x \text{ új változó}$$

Ha van egy olyan T értékadás, amire $T(\varphi) = 1$, akkor egyrészt $(T, x = 0)$ értékadás jó lesz, mert T minden klózba tesz 1-est, így hogy mindenhol legyen 0 azt az $x = 0$ választással biztosíthatjuk.

Fordítva, ha T és $\overline{T}$ is kielégíti φ'-t, akkor amelyikben $x = 0$, az kielégíti φ-t

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y \vee w) \wedge (\neg y \vee z \vee w) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z \vee w)$$

4. Feladat

Mutassuk meg, hogy a Másik SAT probléma NP-nehéz!

Másik SAT

- **Input**: φ CNF és egy kielégítő értékadás
- **Output**: van-e másik kielégítő értékadás?

Megoldás

Visszavezetjük a SAT-t erre!

$$\begin{array}{ccc} \text{SAT} & \leq & \text{Másik SAT} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \text{ CNF, } T \text{ kielégítő értékadás} \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \exists T'\ T'(\varphi') = 1 \text{ és } T' \neq T \end{array}$$

Inputkonverzió:

$$\varphi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = (c_1 \vee x) \wedge (c_2 \vee x) \wedge \ldots \wedge (c_n \vee x) \text{ ahol } x \text{ új változó}$$

De emellé le kellene gyártanunk egy kielégítő értékadást is!
Az $x = 1$ kielégíti, de mi legyen a többi változó értéke?
Ha az $x = 1$, hogy lehet elérni, hogy mindenki más is 1 legyen?

$\wedge(x \rightarrow x_1) \wedge (x \rightarrow x_2) \wedge \ldots \wedge (x \rightarrow x_k)$

azaz CNF-ben: $\wedge(\neg x \vee x_1) \wedge (\neg x \vee x_2) \wedge \ldots \wedge (\neg x \vee x_k)$

- x új, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ a régi változók
- $T = (konstans\ 1)$ kielégíti, ez lesz az értékadás

Ha $T(\varphi) = 1$, akkor $T' = (T, x = 0)$ értékadás kielégíti, és nem lehet ugyanaz, mint a megadott konstans 1 (mert $x = 0$).

Fordítva, ha egy $T' \neq$ (*konstans* 1) értékadás is kielégíti φ'-t, akkor abban x nem lehet 1 (mert a kék klózok miatt akkor minden más változó értéke is 1 lesz, így $T' = T$), tehát $T'(x) = 0$. Akkor viszont T' kielégíti φ-t.

Példa:

$$\varphi = (x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi' = (x \vee y \vee w) \wedge (\neg y \vee z \vee w) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z \vee w) \wedge (\neg w \vee x) \wedge (\neg w \vee y) \wedge (\neg w \vee z)$$

és T pedig a
$$x = y = z = w = 1$$
értékadás.