Bonyolultságelmélet gyakorlat – 09
Formulás visszavezetések III.

1. Feladat

Adjuk meg a FormSAT $\leq$ SAT visszavezetést!

FormSAT

- **Input**: φ tetszőleges ítéletkalkulusbeli formula
- **Output**: kielégíthető-e?

Megoldás

Tudjuk, hogy SAT $\leq$ FormSAT, hiszen jó visszavezetés az identikus függvény ($\varphi \mapsto \varphi$), azaz a FormSAT NP-nehéz.

Ahogy a SAT esetében is, egy helyes nemdeterminisztikus algoritmus rá, ha először nemdeterminisztikusan generálunk változóértékadást, majd determinisztikusan ellenőrizzük, hogy kielégíti-e, tehát a FormSAT is $\in$ NP. Így a FormSAT is NP-teljes.

A feladat tehát a következő:

$$\begin{array}{ccc} \text{FormSAT} & \leq & \text{SAT} \\ \varphi \text{ Boole formula} & \longmapsto & \varphi' \text{ CNF} \\ \varphi \text{ kielégíthető} & \Leftrightarrow & \varphi' \text{ kielégíthető} \end{array}$$

Inputkonverzió:

Ötlet: hozzuk CNF-re

Ehhez először elimináljuk az implikációt és ekvivalenciát, majd a negálásokat vigyük be zárójelen belülre. Végül pedig alkalmazzuk a disztributivitás szabályait.

$$\begin{array}{rcl} F \rightarrow G & \mapsto & \neg F \vee G \\ F \leftrightarrow G & \mapsto & (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G) \\ \neg(F \wedge G) & \mapsto & (\neg F \vee \neg G) \\ \neg(F \vee G) & \mapsto & (\neg F \wedge \neg G) \\ \neg\neg F & \mapsto & F \\ F \vee (G \wedge H) & \mapsto & (F \vee G) \wedge (F \vee H) \end{array}$$

Példa:

$$\underbrace{(x_1 \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_2)} \vee (x_3 \wedge y_3) \vee \ldots \vee (x_n \wedge y_n)$$

$$\underbrace{((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee x_2) \wedge (y_1 \vee y_2)) \vee (x_3 \wedge y_3)} \vee \ldots \vee (x_n \wedge y_n)$$

$((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee y_2 \vee x_3) \wedge (y_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee y_3) \wedge (x_1 \vee y_2 \vee y_3)$
$\wedge (y_1 \vee x_2 \vee y_3) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3)) \vee (x_4 \wedge y_4) \vee \ldots \vee (x_n \wedge y_n)$

Ez így n darab klózból 2^n darab klózt készít, viszont a visszavezetés definíciója szerint egy polinomidejű visszavezetést kell csináljunk. Ilyen sok klózt kiírni sincs időnk!

Ennek a formulának viszont ennél rövidebb ekvivalens CNF-je nincs is!

De ez nem baj, mert nem kell, hogy $\varphi \equiv \varphi'$ legyen, elég csak ha $\varphi \equiv_s \varphi'$ (azaz nem kell, hogy ekvivalens legyen, csak az a feladat, hogy kielégíthetőből kielégíthetőt, kielégíthetetlenből meg kielégíthetetlent kell gyártanunk).

Itt például mondhatjuk, hogy $(x_i \wedge y_i) = z_i$ új változókat vezetünk be minden i-re. Azaz az átalakított formula:(az $=$ logikában kifejezhető a $\leftrightarrow$ kapcsolattal, azaz az $(x_i \wedge y_i) \leftrightarrow z_i$ formulák CNF-jeit kell éseljük:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\neg z_i \vee x_i) \wedge (\neg z_i \vee y_i) \wedge (z_i \vee \neg x_i \vee \neg y_i)\Big) \wedge (z_1 \vee z_2 \vee \ldots \vee z_n)$$

Ez így most jó is, de ezt általánosan kellene bármilyen formulára.

Inputkonverzió: minden F részformulára készítsünk egy x_F változót és „kényszerítsük” az értékét.

F	x_F	CNF
x_i	x_i	x_i
$\neg G$	$x_F \leftrightarrow (\neg x_G)$	$(\neg x_F \vee \neg x_G) \wedge (x_F \vee x_G)$
$G \wedge H$	$x_F \leftrightarrow (x_G \wedge x_H)$	$(\neg x_F \vee x_G) \wedge (\neg x_F \vee x_H) \wedge (x_F \vee \neg x_G \vee \neg x_H)$
$G \vee H$	$x_F \leftrightarrow (x_G \vee x_H)$	$(\neg x_F \vee x_G \vee x_H) \wedge (x_F \vee \neg x_G) \wedge (x_F \vee \neg x_H)$
$G \rightarrow H$	$x_F \leftrightarrow (x_G \rightarrow x_H)$	$(\neg x_F \vee \neg x_G \vee x_H) \wedge (x_F \vee x_G) \wedge (x_F \vee \neg x_H)$
$G \leftrightarrow H$	$x_F \leftrightarrow (x_G \leftrightarrow x_H)$	$(\neg x_F \vee \neg x_G \vee x_H) \wedge (\neg x_F \vee x_G \vee \neg x_H) \wedge$ $(x_F \vee \neg x_G \vee \neg x_H) \wedge (x_F \vee x_G \vee x_H)$

És az egész formulának is igaznak kell lennie, tehát $\wedge x_F$, ahol F az egész formula.

Példa2.

$$F = x \vee (y \wedge \neg(z \vee x))$$

A formula		CNF output
$(x_1 \leftrightarrow (z \vee x))$		$(\neg x_1 \vee z \vee x) \wedge (x_1 \vee \neg z) \wedge (x_1 \vee \neg x)$
$\wedge(x_2 \leftrightarrow (\neg x_1))$		$\wedge(\neg x_2 \vee \neg x_1) \wedge (x_2 \vee x_1)$
$\wedge(x_3 \leftrightarrow (y \wedge x_2))$	$\mapsto$	$\wedge(\neg x_3 \vee y) \wedge (\neg x_3 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg y \vee \neg x_2)$
$\wedge(x_4 \leftrightarrow (x \vee x_3))$		$\wedge(\neg x_4 \vee x \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x) \wedge (x_4 \vee \neg x_3)$
$\wedge x_4$		$\wedge x_4$

2. Feladat Mutassuk meg a FESZÍTŐFA MEGADOTT HALMAZBA ESŐ LEVELEKKEL NP-nehézségét!

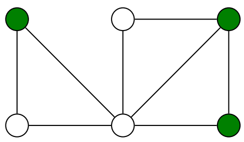
Definíció

Egy gráf feszítőfája a gráf éleinek egy részhalmaza, úgy, hogy még összefüggő maradjon a gráf (tehát minden pont egymásból elérhető legyen benne) és fa legyen (azaz körmentes).

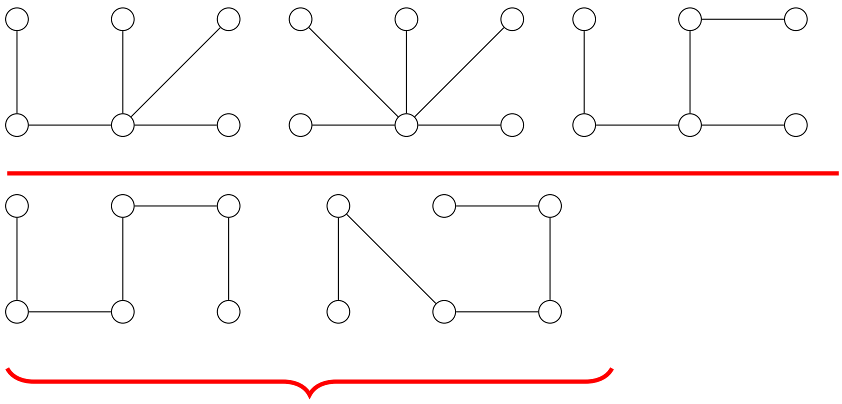
FESZÍTŐFA MEGADOTT HALMAZBA ESŐ LEVELEKKEL

- **Input**: G gráf, és csúcsainak $A \subseteq V(G)$ halmaza
- **Output**: van-e olyan feszítőfája G-nek, aminek levelei épp A-ba esnek?

Például:



Ahol A a zöld csúcsok halmaza. Ez épp egy igen példány. A 3. feszítőfa épp ilyen.



Ha egy gráfban van Hamilton út, az épp egy 2 levelű feszítőfa.

Ha egy feszítőfának éppen 2 levele van, az egy Hamilton út is (mégpedig a két levél között menő).

Megoldás

Visszavezetjük rá a S-T HAMILTON UTat!

$$\begin{array}{ccc} \text{S-T HAMILTON ÚT} & \leq & \text{HALMAZBA ESŐ LEVELŰ FESZÍTŐFA} \\ (G, s, t) & \longmapsto & (G', A) \\ \exists\ G\text{-ben } s \rightsquigarrow t \text{ Hamilton út} & \Leftrightarrow & G\text{-ben van } A \text{ levelű feszítőfa} \end{array}$$

Inputkonverzió: