Logika gyakorlat – 01
Paradoxonok, logika műveletek

Váratlan akasztás paradoxon:

Egy akasztásra ítélt rab ítéletét azzal súlyosbítják, hogy az ítéletet a következő hét valamely napján váratlanul kell végrehajtani.

Nézzük meg mikor lehet az ítélet végrehajtás váratlan:

- Vasárnap nem lehet, hiszen az a hét utolsó napja. Ha előtte nem történt meg az akasztás, aznap már egyértelműen végre kellene hajtsák, így nem lenne váratlan.
- Hasonlóképpen a szombat sem jó, hiszen a vasárnap már kiesett (aznap biztosan nem lenne váratlan), de ekkor a szombat a lehető legkésőbbi időpont, viszont ha addig nem akasztották fel (és vasárnap már nem tehetik, az előző érvelés miatt), akkor a szombat az egyetlen lehetőség. Így megint csak nem lenne váratlan.
- Hasonló gondolatmenettel a hét mindegyik napjáról belátható, hogy aznap nem lehet váratlanul akasztani.

Az ítéletet tehát nem hajthatják végre.

Ennek ellenére, ha szerdán elviszik a rabot akasztani, meg fog lepődni!

Curry paradoxonja:

Ha ennek a doboznak a tartalma igaz, akkor logikából tanulás nélkül is könnyen ötöst lehet kapni.

1. Feladat Mielőtt a Curry paradoxonnal foglalkoznánk, matematikailag kell megfogalmaznunk a benne lévő *ha ... akkor* kifejezést. Ehhez ismerjük meg a logikai műveletek jelentését, avagy szemantikáját!

Megoldás

Logikai műveletek:

- negáció: $\neg A$
- logikai ÉS (konjunkció): $A \wedge B$
- logikai VAGY (diszjunkció): $A \vee B$
- implikáció: $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
- ekvivalencia: $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2. Feladat Elemezzük a Curry paradoxont!

Megoldás

Két eset lehetséges:

- ha a doboz tartalma hamis, akkor *,,nem igaz az, hogy ha a doboz tartalma igaz, akkor logikából könnyen ötöst lehet kapni tanulás nélkül"*; egy ilyen következtetés akkor hamis, ha a bal oldala igaz, a jobb oldala pedig hamis. Tehát ekkor a doboz tartalma igaz és logikából pedig nem lehet könnyen ötöst kapni tanulás nélkül – de mivel abból indultunk ki, hogy a doboz tartalma hamis, ez az eset nem lehetséges.
- ha a doboz tartalma igaz, akkor *,,ha a doboz tartalma igaz, akkor logikából könnyen ötöst lehet kapni tanulás nélkül"*, tehát (mivel a doboz tartalma igaz) azt kapjuk, hogy logikából könnyen ötöst lehet kapni tanulás nélkül.

Így azt kaptuk, hogy logikából könnyen ötöst lehet kapni tanulás nélkül.

Ennek ellenére. . .

3. Feladat Írjuk fel a Curry paradoxont formálisan!

Megoldás

Legyen X jelentése, hogy a doboz tartalma igaz. És legyen Y jelentése az, hogy logikából tanulás nélkül is könnyen ötöst lehet kapni.

Mivel X a dobozban szereplő állítás, ami szerint Y következik saját maga (azaz X) igazságából, ezt a következőképp írhatjuk le:

$$X \leftrightarrow (X \rightarrow Y)$$

Mi micsoda ebben a formulában?

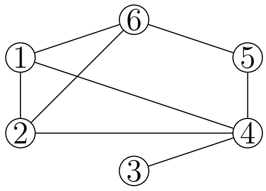
- X és Y változók, akik igazságértéket (azaz $\{0, 1\}$) vehetnek fel
- logikai műveletek

Az ilyen formulákat, amikben csak változók és logikai műveletek szerepelnek ítéletkalkulusbeli vagy ítéletlogikai formuláknak nevezzük. Az ilyen formulákban a változók csak igazságértéket vehetnek fel, ezért ítéletváltozóknak nevezzük őket és általában a $p, q, r, \ldots$ betűkkel jelöljük őket.

4. Feladat Írjuk fel formulával, hogy egy gráfban van teljes párosítás!

Mi az a teljes párosítás? Úgy választunk ki éleket a gráfból, hogy *minden csúcshoz pontosan egy rá illeszkedő élet* vegyünk be a párosításba.

Hogyan mondanánk ítéletlogikában, hogy az alábbi gráfban minden csúcsra pontosan egy élet választunk ki?

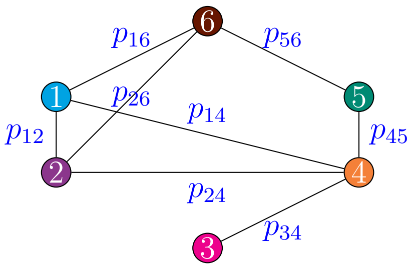


Az első lépés, hogy meghatározzuk, mik legyenek a változók (amik igaz, vagy hamis értéket vehetnek fel).

Mivel az éleket választjuk be a párosításba, célszerű az éleket választani változóknak.

Nevezzük el őket!

Címkézzük fel az éleket változónevekkel például a következőképpen:



Most pedig meg kellene fogalmaznunk azt formálisan, hogy minden csúcsra pontosan egy élet választunk ki. Viszont ilyen operátorunk nincs, ami ezt tudná, de fel tudjuk bontani két esetre: a „pontosan egy” ugyanaz, mintha azt mondanánk, hogy „legalább egy ÉS legfeljebb egy”. Ezeket pedig már az eddigiekből ki tudjuk fejezni!

Írjuk fel a formulát! Kezdjük azzal, hogy minden csúcsra **legalább egy** élet kiválasztunk. Ezt például az 1 csúcsra úgy fogalmazhatjuk meg, hogy *vagy p_{16}-ot, vagy p_{14}-et vagy pedig p_{12}-t* választjuk.

$$(p_{12} \vee p_{14} \vee p_{16}) \wedge (p_{12} \vee p_{24} \vee p_{26}) \wedge (p_{34}) \wedge (p_{14} \vee p_{24} \vee p_{34} \vee p_{45}) \wedge (p_{45} \vee p_{56}) \wedge (p_{16} \vee p_{26} \vee p_{56})$$

Most pedig írjuk fel, hogy minden csúcsra a rá illeszkedőek közül **legfeljebb egyet**! Ezt mondhatjuk úgy is, hogy *„páronként nem választhatjuk őket ki egyszerre”*. Azaz ez az 5-ös csúcsra például azt jelenti, hogy „vagy p_{45}-öt nem választjuk, vagy p_{56}-ot nem választjuk”.

$$\begin{aligned}&\wedge(\neg p_{12} \vee \neg p_{14}) \wedge (\neg p_{12} \vee \neg p_{16}) \wedge (\neg p_{14} \vee \neg p_{16}) \wedge (\neg p_{12} \vee \neg p_{24}) \wedge (\neg p_{12} \vee \neg p_{26}) \wedge (\neg p_{24} \vee \neg p_{26})\\ &\wedge (\neg p_{14} \vee \neg p_{24}) \wedge (\neg p_{14} \vee \neg p_{34}) \wedge (\neg p_{14} \vee \neg p_{45}) \wedge (\neg p_{24} \vee \neg p_{34}) \wedge (\neg p_{24} \vee \neg p_{45}) \wedge (\neg p_{34} \vee \neg p_{45})\\ &\wedge (\neg p_{45} \vee \neg p_{56}) \wedge (\neg p_{16} \vee \neg p_{26}) \wedge (\neg p_{16} \vee \neg p_{56}) \wedge (\neg p_{26} \vee \neg p_{56})\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyébként ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned}&\wedge\neg(p_{12} \wedge p_{14}) \wedge \neg(p_{12} \wedge p_{16}) \wedge \neg(p_{14} \wedge p_{16}) \wedge \neg(p_{12} \wedge p_{24}) \wedge \neg(p_{12} \wedge p_{26}) \wedge \neg(p_{24} \wedge p_{26})\\ &\wedge \neg(p_{14} \wedge p_{24}) \wedge \neg(p_{14} \wedge p_{34}) \wedge \neg(p_{14} \wedge p_{45}) \wedge \neg(p_{24} \wedge p_{34}) \wedge \neg(p_{24} \wedge p_{45}) \wedge \neg(p_{34} \wedge p_{45})\\ &\wedge \neg(p_{45} \wedge p_{56}) \wedge \neg(p_{16} \wedge p_{26}) \wedge \neg(p_{16} \wedge p_{56}) \wedge \neg(p_{26} \wedge p_{56})\end{aligned}$$