Logika gyakorlat – 10
Helyettesítés, egyesítés

Helyettesítés és egyesítés:

Ha $s = [x_1/t_1][x_2/t_2]\dots[x_n/t_n]$ egy helyettesítés, C egy literálhalmaz, akkor $C \cdot s$-t úgy kapjuk, hogy C-ben az összes x_1-et t_1-re, aztán az összes x_2-et t_2-re, stb. cseréljük.

A sorrend számít:

$$C = \{p(x,y), p(f(y),z)\}[x/f(y)][y/c] = \{p(f(c),c), p(f(c),z)\}$$

$$C = \{p(x,y), p(f(y),z)\}[y/c][x/f(y)] = \{p(f(y),c), p(f(c),z)\}$$

Egy s helyettesítés akkor egyesíti C-t, ha $|C \cdot s| \leq 1$ //mindenkinek ugyanaz a képe

Egyesítési algoritmus:

Input: literálok C halmaza

Output: Egyesíthető-e C? (Változók helyére termek írásával lehetnek-e egyformák C elemei?) Ha igen, hogyan?

Pl: $C = \{p(x, f(x)), p(a, z)\}$
Egy egyesítője: $[x/a][z/f(a)]$
Eredmény: $\{p(a, f(a))\}$

Algoritmus:

- $s := [\,]$ (üres helyettesítés)
- amíg $|C| > 1$:
  - válasszunk ki két literált C-ből (ha kettő nem egyesíthető, akkor ha több literál van sem lesz az)
  - keressük az első eltérést
  - ha itt az egyikben egy x változó, a másikban egy t term kezdődik, amiben nincs x:

    $$s := s[x/t],\ C := C[x/t],$$

  - különben NEM egyesíthető
- Ha sikerült, return s

1. Feladat

Egyesítsük $C = \{p(x, f(x)), p(a, z)\}$

Megoldás

Az első eltérés: $\{p(x, f(x)), p(a, z)\}$

- $s = [x/a]$
- $C = \{p(a, f(a)), p(a, z)\}$

Az $[x/a]$ jelentése: a formulahalmazban MINDEN x helyére írjunk a-t

A második eltérés az új C-ben: $\{p(a, f(a)), p(a, z)\}$

- $s = [x/a][z/f(a)]$
- $C = \{p(a, f(a))\}$

2. Feladat

Egyesítsük $C = \{p(x, f(x), z), p(y, z, c)\}$

Megoldás

Az első eltérés: $\{p(x, f(x), z), p(y, z, c)\}$

- $s = [x/y]$
- $C = \{p(y, f(y), z), p(y, z, c)\}$

Az x és y változók. Bármelyik helyettesíthető a másikba.

A második eltérés az új C-ben: $\{p(y, f(y), z), p(y, z, c)\}$

- $s = [x/y][z/f(y)]$
- $C = \{p(y, f(y), f(y)), p(y, f(y), c)\}$

A z változó, az $f(y)$ term, amiben nincs $z \Rightarrow$ helyettesíthető.

A harmadik eltérés: $\{p(y, f(y), f(y)), p(y, f(y), c)\}$

- sem $f(y)$ sem c nem változó $\Rightarrow$ nem egyesíthető

3. Feladat

Egyesítsük $C = \{p(x, f(y), z), p(g(y, c), f(x), c)\}$

Megoldás

Az első eltérés: $\{p(x, f(y), z), p(g(y, c), f(x), c)\}$

- $s = [x/g(y, c)]$
- $C = \{p(g(y, c), f(y), z), p(g(y, c), f(g(y, c)), c)\}$

Az x változó, a $g(y, c)$ term, amiben nincs $x \Rightarrow$ helyettesíthető

A második eltérés az új C-ben: $\{p(g(y, c), f(y), z), p(g(y, c), f(g(y, c)), c)\}$

- Az y változó, a $g(y, c)$ term, de szerepel benne $y \Rightarrow$ nem egyesíthető

Ha ilyet lehetne csinálni, végtelen ciklust generálnánk, mivel MINDEN y helyére $g(y, c)$-t kellene helyettesíteni.

4. Feladat Egyesítsük $C = \{p(x, f(x, y), z), p(g(y), f(z, c), c)\}$

Megoldás

Az első eltérés: $\{p(x, f(x, y), z), p(g(y), f(z, c), c)\}$

- $s = [x/g(y)]$
- $C = \{p(g(y), f(g(y), y), z), p(g(y), f(z, c), c)\}$

A második eltérés az új C-ben: $\{p(g(y), f(g(y), y), z), p(g(y), f(z, c), c)\}$

- $s = [x/g(y)][z/g(y)]$
- $C = \{p(g(y), f(g(y), y), g(y)), p(g(y), f(g(y), c), c)\}$

A harmadik eltérés: $\{p(g(y), f(g(y), y), g(y)), p(g(y), f(g(y), c), c)\}$

- $s = [x/g(y)][z/g(y)][y/c]$
- $C = \{p(g(c), f(g(c), c), g(c)), p(g(c), f(g(c), c), c)\}$

A negyedik eltérés: $\{p(g(c), f(g(c), c), g(c)), p(g(c), f(g(c), c), c)\}$

- sem $g(c)$ sem c nem változó $\Rightarrow$ nem egyesíthető

Helyettesítés:

Legyenek u, t termek, x változó. Ekkor az $u[x/t]$ termet az u felépítése szerint indukcióval adjuk meg.

- $u[x/t] = \begin{cases} t, \text{ha } u = x \\ u \text{ különben} \end{cases}$ ha u változó
- $u[x/t] = f(u_1[x/t], \ldots, u_n[x/t])$, ha $u = f(u_1, \ldots, u_n)$.

Legyen F formula, t term, x változó. Az $F[x/t]$ formulát a következő módon definiáljuk:

- Ha $F = p(t_1, \ldots, t_n)$ atomi formula, akkor $F[x/t] = p(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.
- Ha $F =\uparrow$ vagy $F =\downarrow$, akkor a két esetnek megfelelően $F[x/t] =\uparrow$ vagy $F[x/t] =\downarrow$.
- Ha $F = \neg G$, akkor $F[x/t] = \neg(G[x/t])$
- Ha $F = G \circ H$, ahol $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, akkor $F[x/t] = G[x/t] \circ H[x/t]$
- Ha $F = QxG$, ahol $Q \in \{\exists, \forall\}$, akkor $F[x/t] = F$.
- Ha $F = QyG$, ahol $Q \in \{\exists, \forall\}$ és $y \neq x$, akkor:
  1. Ha y nem fordul elő t-ben, akkor $F[x/t] = Qy(G[x/t])$.
  2. Ellenkező esetben legyen z az első olyan változó, mely nem fordul elő t-ben és F-ben. Ekkor $F[x/t] = Qz(G[y/z][x/t])$.

5. Feladat

Helyettesítsük: $F = [\forall y(\neg p(x, y)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \rightarrow q(x, f(c)))][x/g(y, c)]$

Megoldás

1. lépés: alkalmazzuk a helyettesítést a $\wedge$ mindkét oldalára:

$$\forall y(\neg p(x, y))[x/g(y, c)] \wedge ((\forall x r(f(x))) \rightarrow q(x, f(c)))[x/g(y, c)]$$

2. lépés: alkalmazzuk az első oldalra: ott y-t kvantor köti, $y \neq x$ és az x helyére kerülő termben $(g(y, c))$ szerepel y:

Új változót vezetünk be a formulában y helyére (pl z), majd elvégezzük a helyettesítést

$$\forall z(\neg p(g(y, c), z)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \rightarrow q(x, f(c)))[x/g(y, c)]$$

3. lépés: a másik oldalon alkalmazzuk a $\Rightarrow$ mindkét oldalára a helyettesítést

$$\forall z(\neg p(g(y, c), z)) \wedge ((\forall x r(f(x)))[x/g(y, c)] \rightarrow q(x, f(c)))[x/g(y, c)]$$

4. lépés: $(\forall x r(f(x)))[x/g(y, c)]$ helyettesítése:

A kötött változó az, amit helyettesíteni szeretnénk. Ilyenkor egyszerűen az eredeti formájában hagyjuk meg a formulát

$$\forall z(\neg p(g(y, c), z)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \rightarrow q(x, f(c)))[x/g(y, c)]$$

5. lépés: alkalmazzuk a helyettesítést $q(x, f(c))$ részformulára

Az x változót nem köti kvantor, a helyettesítés egyszerűen elvégezhető

$$\forall z(\neg p(g(y,c),z)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \to q(g(y,c), f(c)))$$

Ugyanez röviden:

Ha F egy formula, x egy változó, t term, akkor $F[x/t]$-t a következőképpen kapjuk:

- a szabad x-eket írjuk át F-ben t-re (azt a részformulát, ahol kötött, hagyjuk úgy)
- ha ilyenkor egy t-beli változó „lekötődik", akkor a kvantor változóját átnevezzük valami újra

Az előző ekkor:

$$F = [\forall y(\neg p(x,y)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \to q(x, f(c)))][x/g(y,c)]$$

x szabad $\Rightarrow g(y,c)$

x szabad $\Rightarrow g(y,c)$

A kvantor utáni változóhoz NEM nyúlunk! A másik x kötött, ez a részformula így marad

De így $g(y,c)$-ben y lekötődik. A kvantor y-ját cseréljük z-re

$$F = \forall z(\neg p(g(y,c),z)) \wedge ((\forall x r(f(x))) \to q(g(y,c), f(c)))$$