Logika gyakorlat – 11
Elsőrendű rezolúció

Elsőrendű rezolúció:

Input: Σ formulahalmaz

Output: Kielégíthetetlen-e Σ?

Algoritmus:

- a formulákat zárt Skolem-re, a magokat CNF-re hozzuk
- a klózokat egy Σ' formulahalmazba gyűjtjük
- Listát vezetünk a klózokról. A listára felvehetjük:
  - Σ' halmaz elemeit
  - két korábbi, már a listán lévő klóz (C_1 és C_2) elsőrendű rezolvensét

  1. A változókat átnevezzük, hogy C_1-ben és C_2-ben ne legyen két egyforma
  2. C_1-ből egy vagy több pozitív literált (pl $\{l_1, \ldots, l_n\}$, ahol $n \geq 1$), C_2-ből egy vagy több negatív literált (pl $\{\neg k_1, \ldots, \neg k_m\}$, ahol $m \geq 1$), választunk, ahol a predikátumnak egyformának kell lennie!
  3. Futtatjuk az egyesítési algoritmust a kiválasztott literálok előjel nélküli változataira.
  4. Ha az egyesítés sikeres, felvesszük:

  $$((C_1 - \{l_1, \ldots, l_n\}) \cup (C_2 - \{\neg k_1, \ldots, \neg k_m\})) \cdot s$$

  ahol s az egyesítési algoritmus által visszaadott egyesítő

- ha kijön az üres klóz, akkor Σ kielégíthetetlen

1. Feladat Döntsük el elsőrendű rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e

$$F = \forall x \forall y \ (p(x) \land (p(f(y)) \to r(y)) \land \neg r(g(x,y)))$$

Megoldás

A formula már Skolemben van. Hozzuk **CNF**-re a magot:

$$\forall x \forall y \ (p(x) \land (\neg p(f(y)) \lor r(y)) \land \neg r(g(x,y)))$$

Gyűjtsük össze a klózokat:

$\Sigma' = \{\{p(x)\}, \{\neg p(f(y)), r(y)\}, \{\neg r(g(x,y))\}\}$

Rezolúció: (célszerű azzal kezdeni, hogy felvesszük Σ' összes elemét)

1. $\{p(x)\}$ $\in \Sigma'$
2. $\{\neg p(f(y)), r(y)\}$ $\in \Sigma'$
3. $\{\neg r(g(x,y))\}$ $\in \Sigma'$
4. //próba: 1. klóz és 2. klóz:
   - átnevezés: nincs változónév ütközés, nem kell átnevezni
   - kiválasztás: Egyforma predikátumot választunk: 1. klóz teljesen, 2. klóz 1. literál
   - $C = \{p(x), p(f(y))\}$
   - egyesítő: $s = [x/f(y)]$
   - megmarad: $\{p(x)\} - \{p(x)\} \cup \{\neg p(f(y)), r(y)\} - \{\neg p(f(y))\} = \{r(y)\}$
   - rezolvens: $\{r(y)\} \cdot s = \{r(y)\}$ $\quad$ $\mathrm{Res}(1,2)$
5. //próba: $4 - 3$ klózok:
   - átnevezés: mindkettőben van y! Nevezzük át a 4. klózban y-t. $\{r(y)\} \cdot [y/z] = \{r(z)\}$
   - kiválasztás: Mindkét klózból az egészet választjuk
   - $C = \{r(z), r(g(x,y))\}$
   - egyesítő: $s = [z/g(x,y)]$
   - megmarad: $\{r(y)\} - \{r(y)\} \cup \{\neg r(g(x,y))\} - \{\neg r(g(x,y))\} = \emptyset$
   - rezolvens: $\Box \Rightarrow F \vDash \downarrow$ $\quad$ $\mathrm{Res}(3,4)$

2. Feladat Döntsük el elsőrendű rezolúcióval, hogy kielégíthetetlen-e

$F = \forall z \forall x\ ((\neg p(z,a) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(x,z)) \wedge (p(z,f(z)) \vee p(z,a)) \wedge (p(f(z),z) \vee p(z,a)))$

Megoldás

A formula már Skolemben és CNF-ben van.

Gyűjtsük össze a klózokat:

$\Sigma' = \{\{\neg p(z,a), \neg p(z,x), \neg p(x,z)\}, \{p(z,f(z)), p(z,a)\}, \{p(f(z),z), p(z,a)\}\}$

Rezolúció:

1. $\{\neg p(z,a), \neg p(z,x), \neg p(x,z)\}$ $\in \Sigma'$
2. $\{p(z,f(z)), p(z,a)\}$ $\in \Sigma'$
3. $\{p(f(z),z), p(z,a)\}$ $\in \Sigma'$
4. //próba: 1-2 klózok
   - átnevezés: mindkettőben van z! Nevezzük át a 2-ban z-t: $\{p(z,f(z)), p(z,a)\} \cdot [z/w] = \{p(w,f(w)), p(w,a)\}$
   - kiválasztás: válasszuk az elsőből az összes literált (ők mind egyesíthetőek, az a cél, hogy minél kevesebb maradjon meg a rezolvens képzés végére klózból), a 2-ból pedig a 2. literált. (Az elsőt azért nem, mert a 2. helyen álló a konstans egyesítésnél összeakadna az $f(z)$-vel.)
   - $C = \{p(z,a), p(z,x), p(x,z), p(w,a)\}$

     Válasszuk az első két literált: $s = [x/a]$

     $C = \{p(z,a), p(a,z), p(w,a)\}$

     Válasszuk ebből is az első két literált: $s = [x/a][z/a]$

     $C = \{p(a,a), p(w,a)\}$
   - egyesítő: $s = [x/a][z/a][w/a]$
   - megmaradt: $p(w,f(w)) \cdot [z/a][x/a][w/a]$
   - rezolvens: $\{p(a,f(a))\}$ Res(1, 2)
5. //próba: $1 - 4$ klózok (az 1-est muszáj, egyelőre csak abban van negatív literál!)
   - átnevezés: nincs névütközés (konstans nem baj)
   - kiválasztás: válasszuk 1-ből 3. literált, 4-es egész
   - $C = \{p(x,z), p(a,f(a))\}$
   - egyesítő: $s = [x/a][z/f(a)]$
   - megmarad: $\{\neg p(z,a), \neg p(z,x)\} \cdot s$
   - rezolvens: $\{\neg p(f(a),a)\}$ Res(1, 4)

     (A két literál pont ugyanaz lesz behelyettesítés után! Elég egyszer leírni!)

6. //próba: $3-5$ klózok: (5-ös már csak egy elemű, próbáljunk meg még kisebbet gyártani vele. A 3-asban ott a „párja”!)

   - átnevezés: nincs névütközés
   - kiválasztás: válasszuk a 3-ból 1. literált, 5-ből az egészet
   - $C = \{p(f(z), z), p(f(a), a)\}$
   - egyesítő: $s = [z/a]$
   - megmarad: $p(z, a) \cdot s$
   - rezolvens: $\{p(a, a)\}$ Res$(3, 5)$

7. //próba $1-6$ klózok: (A 6-os klóz negatív párja lehet bármelyik az 1-esben lévők közül!)

   - átnevezés: nincs névütközés
   - kiválasztás: válasszuk mindkét klózból az összes literált
   - $C = \{p(z, a), p(z, x), p(x, z), p(a, a)\}$
   - egyesítő: $s = [x/a][z/a]$
   - megmarad: $\emptyset$
   - rezolvens: $\square \Rightarrow F \vDash \downarrow$ Res$(1, 6)$