Logika gyakorlat – 04
Teljes rendszerek

Teljes rendszer: olyan Boole függvény(ek) (logikai művelet(ek)), amelyekkel kifejezhető az összes többi is.

Az alábbiak például teljes rendszerek:

- $\{\vee, \wedge, \neg\}$, mert mindent CNF-re lehet hozni
- $\{\wedge, \neg\}$, mert ha már egy ismert teljes rendszer összes jelét ki tudjuk velük fejezni, ő is teljes rendszert alkot.

$\{\vee, \wedge, \neg\}$ teljes:

$$x \wedge y \equiv x \wedge y$$
$$\neg x \equiv \neg x$$
$$x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$$

- $\{\vee, \neg\}$ is teljes, mert:

$\{\vee, \wedge, \neg\}$ teljes:

$$x \vee y \equiv x \vee y$$
$$\neg x \equiv \neg x$$
$$x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$$

- $\{\rightarrow, \neg\}$ is teljes, mert:

$\{\vee, \neg\}$-et fejezzük ki:

$$\neg x \equiv \neg x$$
$$x \vee y \equiv (\neg x) \rightarrow y$$

- $\{\rightarrow, \downarrow\}$ is teljes, mert:

$\{\rightarrow, \neg\}$-et fejezzük ki:

$$x \rightarrow y \equiv x \rightarrow y$$
$$\neg x \equiv x \rightarrow \downarrow$$

- $\{\bigcirc\!\!\!\!\wedge\}$ (NAND) is teljes, mert: $//x \bigcirc\!\!\!\!\wedge y \equiv \neg(x \wedge y)$

$\{\wedge, \neg\}$ teljességéből:

$$\neg x \equiv \neg(x \wedge x) \equiv x \bigcirc\!\!\!\!\wedge x$$
$$x \wedge y \equiv \neg(\neg(x \wedge y)) \equiv (x \bigcirc\!\!\!\!\wedge y) \bigcirc\!\!\!\!\wedge (x \bigcirc\!\!\!\!\wedge y)$$

- $\{\varovee\}$ (NOR) is teljes, mert: $// x \varovee y \equiv \neg(x \lor y)$

$$\{\lor, \neg\} \text{ teljességéből:}$$

$$\neg x \equiv \neg(x \lor x) \equiv x \varovee x$$
$$x \lor y \equiv \neg(\neg(x \lor y)) \equiv (x \varovee y) \varovee (x \varovee y)$$

1. Feladat

Mutassuk meg, hogy az $\{\land, \lor\}$ nem teljes rendszer!

Megoldás

Ez a feladattípus azért nehezebb, mert mutatnunk kell egy olyan Boole-függvényt, amit nem lehet kifejezni. Erre a rendszerre például a $\neg x$ függvény ilyen lesz. (Ezt pl. onnan lehet tudni, hogy ha kifejezhető lenne, akkor a $\{\land, \lor, \neg\}$ teljes rendszer minden művelete kifejezhető lenne, és akkor $\{\lor, \land\}$ is teljes lenne.)

Hogy $\neg x$ nem kifejezhető, azt pl. megmutathatjuk úgy, hogy megnézzük az x-ből $\land$-sel és $\lor$-gyal kifejezhető összes egyváltozós függvényt: mivel $x \land x \equiv x$ és $x \lor x \equiv x$, ezért az egyváltozós függvények közül csak az x fejezhető ki, a $\neg x$ az nem.

2. Feladat

Mutassuk meg, hogy a $\{\oplus, \uparrow\}$ nem teljes rendszer! Itt $\oplus$ a XOR (kizáró vagy) művelet.

Megoldás

Itt az előző érveléssel azt kapjuk, hogy x-ből $x \oplus \uparrow \equiv \neg x$, tehát x is és $\neg x$ is kifejezhető, valamelyik másik művelet kell legyen nem kifejezhető. Mivel az $\{\land, \neg\}$ rendszerről már tudjuk, hogy teljes, így például a $\land$ művelet nem lehet kifejezhető (ha a $\{\oplus, \uparrow\}$ tényleg nem teljes).

Erre is egy módszer, hogy felírjuk az összes kétváltozós, x-ből és y-ból kifejezhető függvényt, és látni fogjuk, hogy $\land$ nincs köztük:

$$\begin{array}{ccc}
x \oplus \uparrow \equiv \neg x & y \oplus \uparrow \equiv \neg y & \\
\uparrow \oplus \uparrow \equiv \downarrow & x \oplus x \equiv \downarrow & y \oplus y \equiv \downarrow \\
x \oplus \neg x \equiv \uparrow & y \oplus \neg y \equiv \uparrow & \uparrow \oplus \downarrow \equiv \uparrow \\
x \oplus \neg y \equiv x \oplus y \oplus \uparrow & \neg x \oplus y \equiv x \oplus y \oplus \uparrow & \neg x \oplus \neg y \equiv x \oplus y
\end{array}$$

és a fentiek bármilyen kombinációja az $\{x, y, \neg x, \neg y, x \oplus y, x \oplus y \oplus \uparrow, \uparrow, \downarrow\}$ műveletek valamelyikét adja eredményül (amik közt nincs az $x \land y$-nal ekvivalens). Tehát $x \land y$ nem kifejezhető.

Egy másik módszer lenne, hogy belátjuk, hogy minden x-ből és y-ból kifejezhető függvény az x, y és $\uparrow$ közül néhánynak az $\oplus$-a (azzal, hogy $\downarrow$ az eredmény, ha nem választunk ki egyet sem); két ilyen összeg $\oplus$-jában az azonosak kiütik egymást, pl. $(x \oplus y) \oplus (x \oplus \uparrow) \equiv (x \oplus x \oplus y \oplus \uparrow) \equiv (y \oplus \uparrow)$.