Logika gyakorlat – 05
Hilbert rendszere

A formulákban most csak:

- változók
- $\rightarrow$
- $\downarrow$

szerepelhetnek.

Pl: $(p \rightarrow (p \rightarrow \downarrow)) \rightarrow q$

Minden formulát ilyen alakra lehet hozni, mivel $\{\rightarrow, \downarrow\}$ teljes rendszer

Hilbert rendszere:

Input: egy Σ formulahalmaz és egy $\mathcal{F}$ célformula

Output: igaz-e, hogy $\Sigma \vDash F$?

Lépések: Listát vezetünk formulákról. A listára felkerülhetnek:

- Σ elemei
- Axiómapéldányok ízlés szerint: a három közül kiválasztunk egyet, aztán F, G, H helyére tetszőleges formulákat írhatunk
- *Modus ponens:* ha F és $F \rightarrow G$ is megvan a listán, akkor felvehetjük G-t is

  Leválasztási következtetés: $\{F,\ F \rightarrow G\} \vDash G$

Axiómák:

1. $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$
2. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$
3. $((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow F$

Folytatjuk a formulák felvételét, amíg $\mathcal{F}$, a célformula a listán nem lesz (jele: $\Sigma \vdash \mathcal{F}$), amivel igazoltuk, hogy $\Sigma \vDash \mathcal{F}$.

Tétel: $\Sigma \vdash \mathcal{F} \ \Leftrightarrow\ \Sigma \vDash \mathcal{F}$

1. Feladat Mutassuk meg, hogy $\vdash\ \downarrow\to p$! Az első lépés: $\mathrm{Ax1}[F/\downarrow, G/(p\to\downarrow)\to\downarrow, H/p]$.

Megoldás

Σ üres, szóval csak axiómapéldányt és modus ponenst fogunk használni.

Mindig nézzük meg, mi az, amit le akarunk vezetni:

- Σ-beli-e?
- axiómapéldány?
- $G\to F$ alakú-e, ahol F-et le tudjuk vezetni?
  - F-et levezetjük
  - $F\to(G\to F)$ //a 2. axiómába behelyettesítéssel
  - modus ponens ezeket: $G\to F$ //a 2. axióma pont erre lesz jó

1. $\mathrm{Ax1}[F/\downarrow, G/(p\to\downarrow)\to\downarrow, H/p]$

   $$\underbrace{(\downarrow\to(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p))}_{\text{először ezzel vágunk}} \to (\underbrace{(\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow))}_{\text{majd ezzel}} \to \underbrace{(\downarrow\to p)}_{\text{célformula}})$$

   csak külső jel mentén vágunk!

2. A formula közepe most épp egy axiómapéldány. Levezethetjük, később jól jön, de középről nem vágunk!

   $\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow)$ $\quad$ $\mathrm{Ax2}[F/\downarrow, G/p\to\downarrow]$

3. $((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p$ $\quad$ $\mathrm{Ax3}[F/p]$

   //Ez az 1. elejének jobb oldala

4. $(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p)\to(\downarrow\to(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p))$ $\quad$ $\mathrm{Ax2}[F/(3), G/\downarrow]$

   Megvan a 3. formula, de kéne elé egy $\downarrow$, hogy pont az 1. eleje legyen, amivel vágni szeretnénk. Erre jó az Ax2.

5. $\downarrow\to(((p\to\downarrow)\to\downarrow)\to p)$ $\quad$ $\mathrm{MP}(3,4)$

   Az előző elejét leválaszthatjuk (az volt a 3.), így pont azt a részformulát kapjuk, amit szerettünk volna legyártani.

6. $(\downarrow\to((p\to\downarrow)\to\downarrow))\to(\downarrow\to p)$ $\quad$ $\mathrm{MP}(1,5)$

7. $\downarrow\to p$ $\quad$ $\mathrm{MP}(2,6)$

Tehát $\vdash\ \downarrow\to p$

Sokszor segít a dedukciós tétel:

$$\boxed{\Sigma\vdash F\to G \;\Leftrightarrow\; \Sigma\cup\{F\}\vdash G}$$

2. Feladat Mutassuk meg dedukcióval, hogy $\vdash\ \downarrow\rightarrow p$!

Megoldás

Alkalmazzuk a dedukciós tételt, a feladat új alakja: $\downarrow\ \vdash p$

1. $\downarrow$ $\quad\in \Sigma$
2. $((p \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow) \rightarrow p$ $\quad$ Ax3$[F/p]$

   Van $\downarrow$, kéne $(p \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow$. Tegyük be elé az Ax2-vel
3. $\downarrow\rightarrow ((p \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow)$ $\quad$ Ax2$[F/\downarrow, G/p \rightarrow\downarrow]$
4. $(p \rightarrow\downarrow) \rightarrow\downarrow$ $\quad$ MP$(1, 3)$ //Ez pont a 2. bal oldala
5. p $\quad$ MP$(2, 4)$

3. Feladat Mutassuk meg, hogy $\{p \rightarrow q\} \vdash p \rightarrow (r \rightarrow q)$!

Megoldás

Dedukcióval kétszer:

Alkalmazzuk a dedukciós tételt. Az új alak: $\{p \rightarrow q, p\} \vdash r \rightarrow q$

Alkalmazzuk a dedukciós tételt még egyszer. Az új alak: $\{p \rightarrow q, p, r\} \vdash q$

1. $p \rightarrow q$ $\quad\in \Sigma$
2. p $\quad\in \Sigma$
3. q $\quad$ MP$(1, 2)$

Dedukcióval egyszer:

Alkalmazzuk a dedukciós tételt. Az új alak: $\{p \rightarrow q, p\} \vdash r \rightarrow q$

1. $p \rightarrow q$ $\quad\in \Sigma$
2. p $\quad\in \Sigma$
3. q $\quad$ MP$(1, 2)$ $//r \rightarrow q$ kell, q van
4. $q \rightarrow (r \rightarrow q)$ $\quad$ Ax2$[F/q, G/r]$
5. $r \rightarrow q$ $\quad$ MP$(3, 4)$

Dedukcióval kétszer, majd vissza:

Alkalmazzuk a dedukciós tételt. Az új alak: $\{p \rightarrow q, p\} \vdash r \rightarrow q$

Alkalmazzuk a dedukciós tételt még egyszer. Az új alak: $\{p \rightarrow q, p, r\} \vdash q$

Alkalmazzuk a dedukciós tételt visszafelé. Az új alak: $\{p \rightarrow q, r\} \vdash p \rightarrow q$

1. $p \rightarrow q$ $\quad\in \Sigma$

4. Feladat Mutassuk meg Hilbert rendszerében, hogy $\{p \to ((q \to (r \to q)) \to s)\} \vdash p \to s$!

Megoldás

Alkalmazzuk a dedukciós tételt. Az új alak: $\{p \to ((q \to (r \to q)) \to s), p\} \vdash s$

1. p	$\in \Sigma$
2. $p \to ((q \to (r \to q)) \to s)$	$\in \Sigma$
3. $(q \to (r \to q)) \to s$	$\mathrm{MP}(1, 2)$
4. $q \to (r \to q)$	$\mathrm{Ax2}[F/q, G/r]$
5. s	$\mathrm{MP}(3, 4)$