Logika gyakorlat – 06
Az elsőrendű logika szintaxisa és szemantikája

Falusi borbély paradoxonja:

> *„A falusi borbély pontosan azokat a falusiakat borotválja, akik maguk nem borotválkoznak."*

A borbély borotválkozik-e?

- Ha nem borotválkozik, akkor meg kell borotválja magát, tehát akkor borotválkozik.
- Ha pedig borotválkozik, azt meg azért, mert nem borotválkozik.

Tehát *„A borbély pontosan akkor borotválkozik, ha nem borotválkozik."* $\Rightarrow$ Ilyen falu nincs.

Ezt a paradoxont formalizálja a következő formula:

$$F = \exists x \forall y (p(x, y) \leftrightarrow \neg p(y, y))$$

Mi micsoda a formulákban?

- $\forall$: univerzális kvantor („bármely")
- $\exists$: egzisztenciális kvantor („van olyan")
- x, y : változók (valamilyen alaphalmazból / univerzumból. Ennek jele általában A lesz.)
- $p(x, y)$: predikátumjel (ez épp bináris) és a „jelentése" objektumból igazságértéket képez
- lesz még függvényjel is: $f(x)$, aminek a „jelentése" objektumból objektumot képez

Ennek a kiértékeléséhez szükségünk van egy struktúrára!

Az elsőrendű logika szemantikája:

Struktúra: $\mathcal{A} = (A, I, \varphi)$ hármas, ahol:

- A az alaphalmaz, nem üres
- I az interpretációs függvény:
  - f/n-hez egy $A^n \to A$ függvényt rendel
  - p/n-hez egy $A^n \to \{0, 1\}$ predikátumot rendel
- φ minden változóhoz egy A-beli elemet rendel:
  - változóértékadás: $X \to A$
  - $\forall x$, $\exists x$-el felülírjuk

Ez alapján itt az alaphalmaz, vagyis $A =$ falusiak és $p(a, b) = 1$, ha a borotválja b-t.

„Van olyan x falusi, akire igaz, hogy mindegyik y falusit x borotválja $\leftrightarrow$ y nem borotválkozik."

Elsőrendű logika két szintaktikus kategóriája:

Termek: (Objektumértékük lesz.)

- az összes változó; (Rögzített halmaz $X = \{x, y, z, x_1, x_2, x_{127}, y_4, y', z'', \ldots\}$.)
- ha f/n egy n-változós függvényjel, $t_1, \ldots, t_n$ pedig termek, akkor $f(t_1, \ldots, t_n)$ is term
- másféle term nincs.

Formulák: (Igazságértékűek.)

- ha p/n egy n-változós predikátumjel, $t_1, \ldots, t_n$ pedig termek, akkor $p(t_1, \ldots, t_n)$ egy atomi formula;
- ha F, G formulák, $x \in X$ pedig változó, akkor formula még $(F \vee G), (F \wedge G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G), (\neg F), (\forall x F)$ és $(\exists x F)$ is;
- $\downarrow$ és $\uparrow$ is formulák.
- másféle formula nincs.

1. Feladat Ha $f/1$ függvényjel, $p/1$ predikátumjel, x változó, akkor a következők formulák-e, termek-e?

Megoldás

$\exists x f(p(x))$

- nem term, mert abban nem lehet kvantor
- nem formula, mert f termet vár, $p(x)$ pedig nem term

$\exists x p(f(x))$

- nem term
- formula igen (haladjunk belülről kifelé):
  - f termet vár, x pedig változó, ami term
  - p termet vár, $f(x)$ pedig term
  - kvantor után formula kell szerepeljen, $p(f(x))$ pedig formula

$\exists x f(f(x))$

- nem term
- nem formula, mert a kvantor után formula kell szerepeljen, $f(f(x))$ pedig term.

$\exists x p(p(x))$

- nem term
- nem formula, mert p termet vár, $p(x)$ pedig formula.

$\exists x \forall x (p(x))$

- nem term
- formula igen (haladjunk belülről kifelé):
  - p termet vár, x pedig változó, ami term
  - a $\forall$ kvantor után formula kell álljon, $p(x)$ pedig formula
  - az $\exists$ kvantor után formula kell álljon, $\forall x p(x)$ pedig formula