Logika gyakorlat – 07
Az elsőrendű logika szemantikája, CNF elsőrendben

Egy elsőrendű logikai formula például a következő:

köti

$$F = \forall x\ (x = c \vee \exists y\ (f(y) = x))$$

$= (x, c)$ $\qquad$ $= (f(y), x)$

$= (x, c())$

konstans

Mivel a formulában minden változóelőfordulás kötött, ilyenkor mondatnak nevezzük.

Ekkor nem kell megadnunk φ-t.

Viszont ez így önmagában nem jelent semmit. Ahhoz, hogy ki tudjuk értékelni, szükségünk van egy struktúrára.

Ez a struktúra lehet például: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, I, \varphi)$, ahol:

- $I(c) = 0$
- $I(f)(n) = n + 1$
- $I(=)$: mindig az egyenlőség

Ha ebben a struktúrában értékeljük ki az F formulát, akkor a jelentése a következő:

$\mathcal{A}(F) =$ *„minden $a \in \mathbb{N}_0$-ra igaz, hogy $a = 0$ vagy van olyan $b \in \mathbb{N}_0$, amire: $b + 1 = a$”*

Ez épp igaz.

A gond: automatikusan kéne ezt csinálni

A nagy gond: Nincs olyan algoritmus, ami KIÉRTÉKELNE egy formulát

Olyan van, ami megmondja egy formuláról, hogy kielégíthetetlen (minden struktúrában hamis.)

1. Feladat Értékeljük ki a következő formulát

$$\forall x\ p(x, f(x)) \wedge \forall x \forall y \forall z\ (p(y, x) \wedge p(z, x) \to y = z) \wedge \exists x \forall y\ \neg p(y, x) \wedge \forall x\ (x \neq f(x))$$

az $A = \{falusiak\}$, $I(p)(a, b)$: a kedveli b-t, $I(f)(a)$: akire a szavaz struktúrában!

Megoldás

Ebben a struktúrában kiértékelve a formulát a jelentése:

- *„mindenki kedveli azt, akire szavaz”* és
- *„senkit sem kedvel több ember”* és
- *„van, akit senki sem kedvel”* és
- *„senki sem szavaz magára”*

Számoljuk össze, hogy hány olyan (a, b) pár van úgy, hogy a kedveli b-t, ha n ember lakik a faluban:

- Az első pont szerint minden a kedvel legalább egy b-t, tehát legalább n ilyen pár van.
- A második pont szerint minden b-re legfeljebb egy őt kedvelő a van, azaz legfeljebb n ilyen pár van.
- És a harmadik pont szerint ez az n el sem érhető, hanem legfeljebb $n-1$ lehet.

És egyszerre nem lehet legalább n és legfeljebb $n-1$ is, tehát a mondat nem igaz a falusiakra.

Ha egy faluban lakhatnának végtelen sokan, akkor akár igaz is lehet: ha a faluban lakik az összes természetes szám, és mindenki a nála eggyel nagyobbat kedveli (akire szavaz), akkor a mondat igaz lesz.

2. Feladat

Hozzuk CNF-re a következő (kvantormentes) elsőrendű logikai formulát:

$$(p(x, f(y)) \to q(y)) \leftrightarrow p(f(y), f(x))$$

Megoldás

1. Nyilak eliminálása:

$$\begin{aligned}
&(p(x, f(y)) \to q(y)) \leftrightarrow p(f(y), f(x)) \\
\equiv &\Big(\neg(p(x, f(y)) \to q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big((p(x, f(y)) \to q(y)) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big) \\
\equiv &\Big(\neg(\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big((\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big)
\end{aligned}$$

2. Negáció bevitele:

$$\begin{aligned}
&\Big(\neg(\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big((\neg p(x, f(y)) \vee q(y)) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big) \\
\equiv &\Big((p(x, f(y)) \wedge \neg q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big(\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big)
\end{aligned}$$

3. Disztributivitás:

$$\begin{aligned}
&\Big((p(x, f(y)) \wedge \neg q(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big(\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big) \\
\equiv &\Big(p(x, f(y)) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big(\neg q(y) \vee p(f(y), f(x))\Big) \wedge \Big(\neg p(x, f(y)) \vee q(y) \vee \neg p(f(y), f(x))\Big)
\end{aligned}$$