Logika gyakorlat – 08
Normálformák elsőrendben

Egy formula kiigazított, ha:

- Különböző kvantorok különböző változókat kötnek
- Nincs olyan változó, amely szabadon és kötötten is előfordul.

Minden formulát kiigazíthatunk, pl. átnevezéssel. (Ekvivalencia-tartó módon.)

1. Feladat

Igazítsuk ki: $F = \forall x\ ((\exists y\ p(x,y)) \to q(x)) \land \exists y\ \forall x\ p(x,y) \land \neg q(x)$

Megoldás

Keressük ki a kötött változókat:

$$F = \forall x\ ((\exists y\ p(x,y)) \to q(x)) \land \exists y\ \forall x\ p(x,y) \land \neg q(x)$$

Indexeljük le a **kötött** változókat! (Válasszunk minden kvantor mellé egy tetszőleges indexet: pl. x_1, y_{007}, z_{macska}, majd írjuk ezt be a kvantor melletti változó helyére, és oda, amelyik változót az adott kvantor köti.)

$$F = \forall x_1\ ((\exists y_2\ p(x_1,y_2)) \to q(x_1)) \land \exists y_3\ \forall x_4\ p(x_4,y_3) \land\ \neg q(x)$$

Itt most épp: minden kvantorhoz azt a sorszámot választottuk, ahanyadjára épp találkoztunk vele a formula „olvasása" során. (Fth balról jobbra olvasunk!)

A szabad változót NE bántsuk!

Észrevehetjük: így már minden változóról rögtön el tudjuk dönteni, kvantor köti-e! Mivel a szabad változókhoz nem nyúltunk, viszont a kvantorok által kötött változókhoz indexet rendeltünk, így a szabad változók nevei biztosan nem fognak kötötten se előfordulni. Ez nekünk jó: a formula kiigazított lesz.

Egy formula prenex alakú, ha „a kvantorok az elején vannak”:

Átalakítás (előadás szerint), ha már ki van igazítva:

1. $\rightarrow, \leftrightarrow$: még előtte elimináljuk!
   (Célszerű kiigazítás előtt!)
2. $(\exists x F) \lor G \Rightarrow \exists x(F \lor G)$
3. $(\forall x F) \lor G \Rightarrow \forall x(F \lor G)$
4. $(\exists x F) \land G \Rightarrow \exists x(F \land G)$
5. $(\forall x F) \land G \Rightarrow \forall x(F \land G)$
6. $\neg\exists x F \Rightarrow \forall x \neg F$
7. $\neg\forall x F \Rightarrow \exists x \neg F$

Előtte igazítsuk ki a formulát, mivel ezek a szabályok csak akkor igazak, ha G-ben NINCS x!

2. Feladat Folytassuk az előző formula átalakítását!

Megoldás

Az $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ eliminálása után:

$$F = \forall x_1\ ((\underbrace{\neg\exists y_2\ p(x_1, y_2)}_{\forall y_2\ \neg p(x_1,y_2)})) \lor q(x_1)) \land \underbrace{\exists y_3\ \forall x_4\ p(x_4, y_3) \land \neg q(x)}_{\exists y_3\ \forall x_4\ (p(x_4,y_3) \land \neg q(x))}$$

$\boxed{\text{6. szabály}}$ $\boxed{\text{4-5. szabály}}$

$\boxed{\text{3. szabály}}$ $\forall x_1 \forall y_2\ (\neg p(x_1, y_2) \lor q(x_1))$

$\boxed{\text{4-5. szabály}}$

$$\forall x_1\ \forall y_2\ \exists y_3\ \forall x_4\ \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \lor q(x_1)\big) \land p(x_4, y_3) \land \neg q(x)\Big)$$

Ugyanezt kapjuk, ha:

- az eredeti sorrendben kvantáljuk a változókat (azaz felvesszük a kvantorokat és a hozzájuk tartozó változókat az eredeti formula sorrendjének megfelelően a formulánk elejére!)
- a kvantor fordul ($\forall$-ból $\exists$-be és fordítva), ha páratlan sok $\neg$ belsejében van (**Fontos:** mire ide eljutunk, már NEM LEHET a formulánkban $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$)
- a formula magját (azaz, ami a kvantorok után szerepel) úgy kapjuk, hogy az eredeti formulából kitöröljük a kvantorokat (pl $(\exists x\ p(x)) \lor q(y)$-ból csak $p(x) \lor q(y)$-t kell, leírjuk).

Egy formula Skolem alakú, ha prenex és csak univerzális kvantor ($\forall$) van benne.

Skolem alakra hozás:

- prenex alakra hozzuk
- az összes $\exists x$ változóra:
  - töröljük a $\exists x$-et
  - a magbeli x-ek helyére mindenhol $f(x_1, \ldots, x_n)$ kerül, ahol f új függvényjel és $x_1, \ldots, x_n$ pedig az x előtt deklarált $\forall$ változók

Ha **zárt Skolem** alak kell, akkor még: a szabad változók helyére új konstansjelek kerülnek.

3. Feladat

Hozzuk zárt Skolem normálformára az előző feladat formuláját!

Megoldás

$$\forall x_1\ \forall y_2\ \exists y_3\ \forall x_4\ \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1)\big) \wedge p(x_4, y_3) \wedge \neg q(x)\Big)$$

- töröljük a kvantort:

$$\forall x_1\ \forall y_2\ \forall x_4\ \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1)\big) \wedge p(x_4, y_3) \wedge \neg q(x)\Big)$$

- írjuk át y_3-at a megfelelő helyen:
  - kell egy ÚJ függvényjel: mivel eddig még semmi nem volt, jó lesz f
  - x_1 és y_2 előtte volt univerzálisan kvantálva: ők lesznek f-ben
  - $\exists y_3 \Rightarrow f(x_1, y_2)$

$$\forall x_1\ \forall y_2\ \forall x_4\ \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1)\big) \wedge p(x_4, f(x_1, y_2)) \wedge \neg q(x)\Big)$$

- lezárás:

  a szabad változó (x) helyére egy ÚJ konstans szimbólumot kell választanunk: mivel még egy sincs, jó lesz c

$$\forall x_1\ \forall y_2\ \forall x_4\ \Big(\big(\neg p(x_1, y_2) \vee q(x_1)\big) \wedge p(x_4, f(x_1, y_2)) \wedge \neg q(c)\Big)$$

4. Feladat

Hozzuk zárt Skolem-alakra: $(\exists y \forall x\ p(x, g(f(x), z))) \rightarrow \exists y\ \neg r(y)$

Megoldás

Haladjunk végig az egyes lépéseken sorban:

1. **Implikáció eltüntetése:** (ugyan a kiigazításhoz még nem szükséges, de a prenex alakban már úgysem szerepelhet, szóval legyünk túl rajta minél hamarabb, így biztos nem felejtjük el.)

$$\neg(\exists y \forall x\ p(x, g(f(x), z))) \vee \exists y\ \neg r(y)$$

2. **Kiigazítás:**

$$\neg(\exists y_1 \forall x_2\ p(x_2, g(f(x_2), z))) \vee \exists y_3\ \neg r(y_3)$$

3. **Prenex alak:**

$$\forall y_1 \exists x_2 \exists y_3\ \Big(\neg(p(x_2, g(f(x_2), z))) \vee \neg r(y_3)\Big)$$

4. **Skolem alak:**

   - x_2 és y_3 szerepel egzisztenciális kvantor után
   - Két új függvényjel kell: g és f foglaltak! Választhatjuk h-t és i-t.
   - Mindkét esetben egy (az y_1) változó áll előtte univerzális kvantorral. Ne felejtsük el beletenni a függvényjelünkbe!
   - Így: x_2-t cseréljük $h(y_1)$-re és y_3-t pedig $i(y_1)$-re
   - Vegyük észre: ha az egzisztenciális kvantor a formula legelső eleme (vagy nincs előtte univerzális kvantor) akkor egy 0 változós új függvényjelet kell bevezetnünk, ez pedig nem más, mint egy konstans!

$$\forall y_1\ \Big(\neg(p(h(y_1), g(f(h(y_1)), z))) \vee \neg r(i(y_1))\Big)$$

5. **Lezárás:** van egy szabad változónk (z), vezessünk be helyette egy c konstanst

$$\forall y_1\ \Big(\neg(p(h(y_1), g(f(h(y_1)), c))) \vee \neg r(i(y_1))\Big)$$

6. **Skolem alak v2:** jól látjuk, a prenex alak y_1 kötött változója nem szerepel a formulában, így törölhetjük. Ezt a formulát is elég Skolem alakra hoznunk:

$$\exists x_2 \exists y_3\ \Big(\neg(p(x_2, g(f(x_2), z))) \vee \neg r(y_3)\Big)$$

   Ekkor még mindig két új függvényjelet kell használnunk az $\exists x_2 \exists y_3$ eliminálásához, az előzőek alapján ez lehet az $h()$ és $i()$, de vegyük észre, hogy ezek nulla aritású függvényjelek, amik épp a konstanszimbólumok! Így: x_2-t cseréljük a-ra és y_3-t pedig b-re,

$$\neg(p(a, g(f(a), c))) \vee \neg r(b)$$

5. Feladat Hozzuk zárt Skolem-alakra: $((\exists x\ q(z,x,c)) \wedge \exists y\ p(f(z),y)) \to \forall x \exists y\ r(g(x,y))$

Megoldás

Haladjunk végig az egyes lépéseken sorban:

1. **Implikáció eltüntetése:**

$$(\neg((\exists x\ q(z,x,c)) \wedge \exists y\ p(f(z),y))) \vee \forall x \exists y\ r(g(x,y))$$

2. **Kiigazítás:**

$$(\neg((\exists x_1\ q(z,x_1,c)) \wedge \exists y_2\ p(f(z),y_2))) \vee \forall x_3 \exists y_4\ r(g(x_3,y_4))$$

3. **Prenex alak:**

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \exists y_4 \left((\neg((q(z,x_1,c)) \wedge p(f(z),y_2))) \vee r(g(x_3,y_4)) \right)$$

4. **Skolem alak:**
   - y_4 szerepel csak egzisztenciális kvantor után
   - egy új függvényjel fog kelleni! g és f már foglaltak! Választhatjuk h-t.
   - 3 változó van univerzális kvantorral kötve előtte. Így: y_4-t cseréljük $h(x_1,y_2,x_3)$-ra

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \left((\neg((q(z,x_1,c)) \wedge p(f(z),y_2))) \vee r(g(x_3,h(x_1,y_2,x_3))) \right)$$

5. **Lezárás:** Szabad változónk is van: z

   Vezessünk be helyette egy új konstanst: c már foglalt! Cseréljük mondjuk a-ra.

$$\forall x_1 \forall y_2 \forall x_3 \left((\neg((q(a,x_1,c)) \wedge p(f(a),y_2))) \vee r(g(x_3,h(x_1,y_2,x_3))) \right)$$

Help Box I.

Ha van egy formulánk, aminek ilyen az eleje:

$$\underbrace{\exists x}_{a}\ \underbrace{\exists y}_{b}\ \forall z\ \underbrace{\exists z_z}_{g(z)}\ \forall z_{z_z} \underbrace{\exists z_{orro}}_{h(z, z_{z_z})}(\ldots) \text{ és van belül } f \text{ és } c \text{ is:}$$

Ha van pl. szabad w is, akkor ahelyett is új konstansjel kerül be pl. egy d.

Help Box II.

Jelölések:

- konstansok: $a, b, c, d, \ldots$
- függvényjelek:$f, g, h, i, \ldots$
- predikátumjelek: $p, q, r, s, \ldots$
- változók: $w, x, y, z, \ldots$

Indexelt, csillagozott, körbe rajzolt változatban tetszőlegesen felhasználhatóak.