Operációkutatás gyakorlat – 01

Lineáris programozási feladat

Operációkutatás

Problémamegoldási technikák és módszerek valós életbeli problémák megoldására. Például:

- optimalizálási eljárások
- döntéselmélet
- adatelemzés
- sztochasztikus modellek

Kialakulását a II. világháborútól számíthatjuk, amikor harcászati jellegű problémák megoldására használták ezeket a módszereket.

Lineáris programozási feladat

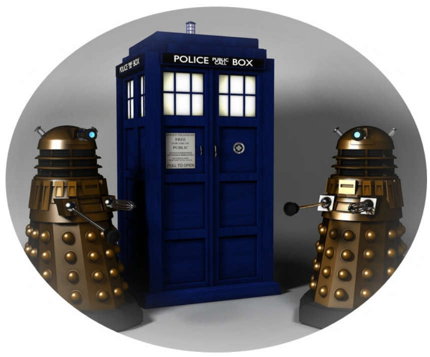
Keressük adott lineáris, $\mathbb{R}^n$ értelmezési tartományú függvény (célfüggvény) szélsőértékét (minimumát/maximumát) értelmezési tartományának adott lineáris korlátokkal (feltételekkel).

Amiket fontos, hogy megkülönböztessünk:

- döntési változók: $x_1, x_2, \ldots$
- változók értelmezési tartománya: $x_1 \geq 0$
- cél: maximalizálás/minimalizálás probléma
- célfüggvény (max/min): $2x_1 + 5x_2$
- korlátozások (egyenletek, egyenlőtlenségek): $3x_1 + 2x_2 \leq 10$

1. Feladat (Erőforrás allokáció)

Egy cég életnagyságú Tardisokat és Dalekeket gyárt Dr. Who rajongóknak. A Tardis darabja 25 euró profitot, a Dalek darabja 20 euró profitot jövedelmez.



A következő héten a két termék összerakására 200 munkaóra áll rendelkezésre. Egy darab Tardis összeszereléséhez 5 munkaóra és egy darab Dalek összeszereléséhez szintén 5 munkaóra szükséges.

A Dalekhez szükség van speciális lézerhabverőre, amiből csak 24 darab van raktáron.

A cég raktározási helysége 320 négyzetméter, amiből egy Tardis 10 négyzetmétert és egy Dalek 5 négyzetméter területet foglal el. A cég vezetősége maximalizálni szeretné a profitját. Milyen termelési tervet kövessen?

Megoldás

1. Döntési változók és mértékegységek meghatározása:
   - x_1 az összeszerelendő Tardisok darabszáma;
   - x_2 az összeszerelendő Dalekek darabszáma.
2. A célfüggvény felírása:
   - Cél: a profit maximalizálása.
   - Ha a cég az (x_1, x_2) termelési tervet választja, azaz x_1 darabot rak össze Tardisból és x_2 darabot Dalekból, mennyi lesz a profitja?
     Tudjuk, hogy 1 darab Tardis 25 euró profitot eredményez. Tehát x_1 darabnak $25x_1$ a profitja. Teljesen hasonlóan x_2 darab Dalek $20x_2$ profitot eredményez. Tehát, a teljes profit és ebből következően a célfüggvény: $z = 25x_1 + 20x_2$.
3. A korlátozó feltételek megadása:
   - Az összeszerelés időigényével kapcsolatos feltétel: mivel egy darab Tardis összeszereléséhez 5 munkaóra és egy darab Dalek összeszereléséhez is 5 munkaóra szükséges, ezért x_1 darab Tardist és x_2 darab Daleket $5x_1 + 5x_2$ munkaóra alatt szerelnek össze, ami nem lehet nagyobb, mint a rendelkezésre álló 200 munkaóra, vagyis $5x_1 + 5x_2 \leq 200$.
   - A Dalek lézerhabverőjével kapcsolatos feltétel: mivel csak 24 darab lézerhabverő van raktáron, ezért: $x_2 \leq 24$.
   - A raktározási feltétel: mivel egy Tardis 10 m^2-t és egy Dalek 5 m^2-t foglal el, ezért x_1 darab Tardis és x_2 darab Dalek összesen $10x_1 + 5x_2$ m^2 területet igényel, ami nem lehet nagyobb, mint a rendelkezésre álló 320 m^2 raktározási felület. Következésképpen: $10x_1 + 5x_2 \leq 320$.
   - A döntési változókra vonatkozó előjelkorlátozó feltételek: mivel az x_1 és x_2 darabszámokat jelölnek, ezért $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, és x_1, x_2 egész számok.

Ha összegezzük az 1. 2. és 3. pontokban kapott összefüggéseket, az alábbi matematikai modellhez jutunk:

$$
\begin{array}{rcrrcr}
\max z & = & 25x_1 & +20x_2 & & \\
\hline
 & & 5x_1 & +5x_2 & \leq & 200 \\
 & & & x_2 & \leq & 24 \\
 & & 10x_1 & +5x_2 & \leq & 320 \\
 & & x_1 & , x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ezt a rendszert programnak nevezzük. Lineáris, mert:

- A célfüggvény a döntési változók lineáris függvénye.
- A korlátozó feltételek lineáris egyenlőtlenségek.