Operációkutatás gyakorlat – 02
Grafikus megoldás

Az előző órán vett lineáris programozási feladat:

$$\begin{array}{rcrrcr}
\max z & = & 25x_1 & +20x_2 & & \\
\hline
 & & 5x_1 & +5x_2 & \leq & 200 \\
 & & & x_2 & \leq & 24 \\
 & & 10x_1 & +5x_2 & \leq & 320 \\
 & & x_1 & ,x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Lehetséges megoldások halmazának megkeresése:

- A lehetséges megoldások halmaza ebben az esetben egy kétdimenziós tartomány a síkban.
- Ábrázoljuk a korlátozó feltételeket egy koordinátarendszerben, amelynek a vízszintes tengelyen x_1 döntési változót, a függőleges tengelyén pedig az x_2 döntési változót vesszük fel. Az egyenlőtlenségekkel megadott korlátozó feltételek egy félsíkot, az egyenlőséggel megadott feltételek pedig egy egyenest határoznak meg.

A $5x_1 + 5x_2 \leq 200$ feltétel egy olyan félsíkot határoz meg, amely határegyenesének egyenlete $5x_1 + 5x_2 = 200$. Megrajzoljuk ezt az egyenest a tengelyekkel való metszéspontok segítségével. Legyen $x_1 = 0$. Ekkor $5 \times 0 + 5x_2 = 200$ egyenlet megoldása $x_2 = 40$. Ha $x_2 = 0$, akkor a $5x_1 + 5 \times 0 = 200$ egyenlet megoldása $x_1 = 40$. A metszéspontokat a következőek:

x_1	0	40
x_2	40	0

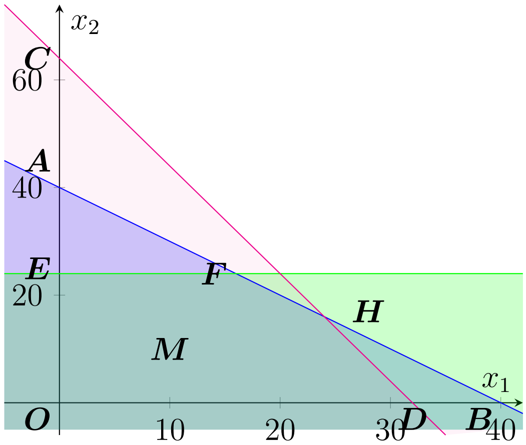
A metszéspontokat jelöljük A $(0, 40)$-val és B $(40, 0)$-vel. Megvizsgáljuk, hogy az O $(0, 0)$ pont a lehetséges pontokat tartalmazó félsíkhoz tartozik-e, behelyettesítve az O pont koordinátáit az előző feltételbe. Mivel az $5 \times 0 + 5 \times 0 \leq 200$ feltétel teljesül, ezért a lehetséges megoldások halmaza az AB egyenesnek az O irányába eső félsíkjában van.

Az $x_2 \leq 24$ feltétel határegyenese az $x_2 = 24$ vízszintes egyenes, amely a függőleges tengelyt az E $(0, 24)$ pontban metszi. Mivel $0 \leq 24$, a lehetséges megoldások halmaza az egyenes origó felőli félsíkjába esik.

A $10x_1 + 5x_2 \leq 320$ feltétel határegyenese $10x_1 + 5x_2 = 320$.

A tengelyekkel való metszéspontok $C\ (0, 64)$ és $D\ (32, 0)$. Mivel a $10 \times 0 + 5 \times 0 \leq 320$ feltétel teljesül, ezért a lehetséges megoldások halmaza a CD egyenesnek az O irányába eső félsíkjában van.

A feltételeket a következő ábra szemlélteti:



—	$5x_1 + 5x_2 = 200$
—	$x_2 = 24$
—	$10x_1 + 5x_2 = 320$

Jól látható, hogy az általunk meghatározott egyenleteket ábrázolva kirajzolódik a **lehetséges megoldások halmaza**, (jele: $\boldsymbol{M}$) azaz az a terület, amelyik mindhárom függvény feltételeinek eleget tesz.

Ha a döntési változókra csak $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ feltételek volnának felírva, akkor a lehetséges megoldások M halmaza a három korlátozó feltétel által meghatározott tartományok metszetének a koordináta-rendszer első negyedébe eső része, de mivel $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, a feladat lehetséges megoldásainak halmaza az M-beli egész koordinátájú pontokat tartalmazza. Az M egy olyan poliéder, amelynek csúcspontjai: O, E, F, H, D. Ezeket a csúcspontokat, amelyeket két feltétel egyenesének metszéspontjában kapunk, extremális pontoknak nevezzük.

Tétel

Ha egy LP feladatnak van optimális megoldása, akkor olyan optimális megoldása is van, ami a lehetséges megoldási tartomány csúcspontja.

Általánosan: egy *lehetséges megoldás* egy olyan $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy x_i-be p_i-t helyettesítve kielégíti a feltételrendszert ($\forall i \in (1, 2, \ldots, n)$).

Az optimális megoldás keresése: Az optimális megoldás az az (x_1, x_2) pont a lehetséges megoldások halmazából, amelyre a $z = 50x_1 + 40x_2$ célfüggvény értéke a legnagyobb.

Általánosan: az *optimális megoldás* olyan lehetséges megoldás, amelyben a célfüggvény felveszi a maximumát/minimumát.

Értékeljük ki a csúcspontokban a célfüggvényt. A következő táblázat adja meg a csúcspontok koordinátái és a hozzátartozó behelyettesítési értékeket:

Csúcspont	(x_1, x_2)	z
O	$(0, 0)$	0
E	$(0, 24)$	480
F	$(16, 24)$	880
H	$(24, 16)$	920
D	$(32, 0)$	800

A legnagyobb értéket a H pontban kapjuk. Mivel ennek a pontnak a koordinátái egész számok, ezért az $x_1 = 24, x_2 = 16$ optimális megoldás egyben az egész értékű feladat optimális megoldása is lesz.

Tehát a cég maximális profitja $z = 920$ és ezt akkor éri el, ha a következő héten a Tardisból 24 darabot a Dalekből pedig 16 darabot gyárt le.

A feladat alakjai

1. **Standard:**

$$\begin{array}{rrcll} \sum_{j=1}^{n} & a_{ij}x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, \ldots, n) \\ \hline \max \sum_{j=1}^{n} & c_j x_j & = & z & \end{array}$$

   Maximalizálás esetén minden feltétel kisebb egyenlő.

   Az itteni változókat *döntési változóknak* nevezzük.

   Minden LP feladathoz megadható ekvivalens standard alakú feladat.

2. **Általános alak:**

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m \\ \hline c_1x_1 & + & \ldots & + & c_nx_n & & & = & z \end{array}$$

3. **Szótár:**

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & \dots & - & a_{1n}x_n \\
x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & \dots & - & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
x_{n+m} & = & b_m & - & a_{n1}x_1 & - & \dots & - & a_{mn}x_n \\
\hline
z & = & & & c_1x_1 & + & \dots & + & c_nx_n
\end{array}$$

1. Feladat A fentiek alapján hajtsuk végre az átalakításokat, hogy végül szótár alakú feladatot kapjunk!

Standard alak:

A feladatunk már standard alakú, így ehhez nem kell átalakításokat végeznünk.

Áttérés általános alakra:

Ahhoz, hogy az egyenlőtlenségeket egyenlőségekre cseréljük, adjunk hozzá új, nemnegatív mesterséges (slack) változókat az egyenlőtlenségek bal oldalaihoz.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 5x_1 & +5x_2 & +x_3 & & & = & 200 \\
 & & & x_2 & & +x_4 & & = & 24 \\
 & & 10x_1 & +5x_2 & & & +x_5 & = & 320 \\
 & & x_1, & x_2 & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \\
\hline
\max z & = & 25x_1 & +20x_2 & & & & &
\end{array}$$

Az új mesterséges változóink: x_3, x_4, x_5.

Áttérés általános alakról szótárra:

Fejezzük ki a mesterséges változókat az egyes egyenletekből.

$$\begin{array}{ccccccc}
x_3 & = & 200 & -5x_1 & -5x_2 & & \\
x_4 & = & 24 & & -x_2 & & \\
x_5 & = & 320 & -10x_1 & -5x_2 & & \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \\
\hline
\max z & = & 0 & +25x_1 & +20x_2 & &
\end{array}$$

Definíció

A szótár feltétel egyenleteinek bal oldalán álló változókat **bázisváltozóknak** nevezzük.

A szótár feltételeinek jobb oldalán álló változókat **nembázis változóknak** nevezzük.

Szótár bázismegoldása: olyan x vektor, amelyben a bázisváltozók értékei az őket tartalmazó egyenletek jobb oldali konstansai, a nembázis változók értéke nulla.

Lehetséges (fizibilis) bázismegoldás: olyan bázismegoldás, ami egyben lehetséges megoldás is, azaz a szótárra teljesül, hogy $b_i \geq 0$ $i = 1, 2, \ldots, m$.