Operációkutatás gyakorlat – 04

Nemkorlátosság, degeneráció, pivot szabályok

1. Feladat Nemkorlátos LP:

Tekintsük a következő LP feladatot:

$$\begin{array}{rcrrcl}
\max z & = & 7x_1 & +4x_2 & & \\
\hline
 & & -1x_1 & +1x_2 & \leq & 2 \\
 & & 3x_1 & -9x_2 & \leq & 9 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Megoldás

Térjünk át szótár alakra:

$$\begin{array}{rcrrr}
x_3 & = & 2 & +1x_1 & -1x_2 \\
x_4 & = & 9 & -3x_1 & +9x_2 \\
\hline
\max z & = & 0 & +7x_1 & +4x_2
\end{array}$$

I. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_1
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(-, \frac{9}{3})$ miatt a 2. egyenlet.

Az új szótár:

$$\begin{array}{rcrrr}
x_3 & = & 5 & +2x_2 & -\frac{1}{3}x_4 \\
x_1 & = & 3 & +3x_2 & \frac{1}{3}x_4 \\
\hline
\max z & = & 21 & +25x_2 & -\frac{7}{3}x_4
\end{array}$$

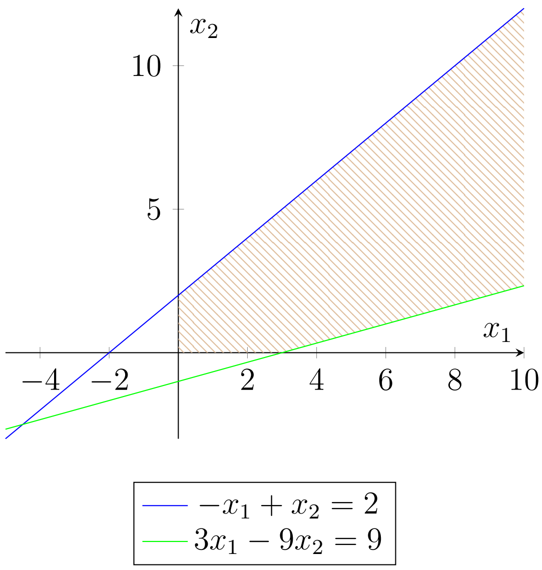
II. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_2

- A legkisebb korlátot adó egyenlet: Az x_2-nél negatív együtthatójú egyenletekből kellene választani, de mindkét egyenletben szereplő x_2 együtthatója pozitív. Ebben az esetben az egyenletrendszer nem korlátos.

Ábrázolva az LP feladat lehetséges megoldásait, ezt grafikusan is láthatjuk:



2. Feladat Degeneráció:

Tekintsük a következő szótárral adott feladatot:

$$
\begin{array}{rcrrrr}
x_4 & = & 5 & -1x_1 & & -2x_3 \\
x_5 & = & 6 & -2x_1 & -1x_2 & \\
x_6 & = & 3 & -1x_1 & & -1x_3 \\
\hline
\max z & = & 0 & +1x_1 & & +1x_3
\end{array}
$$

Megoldás

I. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_1 (ha két egyforma van, a legkisebb indexűt választjuk)
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(5, 3, 3)$ miatt a 2. egyenlet. (ha két egyforma van, a ,,feljebb lévő” egyenletet választjuk)

$$\begin{array}{rcrrrr}
x_4 & = & 2 & +\frac{1}{2}x_2 & -2x_3 & +\frac{1}{2}x_5 \\
x_1 & = & 3 & -\frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_6 & = & 0 & +\frac{1}{2}x_2 & -1x_3 & +\frac{1}{2}x_5 \\
\hline
\max z & = & 3 & -\frac{1}{2}x_2 & +1x_3 & -\frac{1}{2}x_5
\end{array}$$

II. iteráció:

A klasszikus pivot szabály szerint fogunk pivotelemet választani.

- A legpozitívabb együtthatójú változó: x_3
- A legkisebb korlátot adó egyenlet: $\min(1, -, 0)$ miatt a 3. egyenlet.

$$\begin{array}{rcrrrr}
x_4 & = & 2 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_5 & +2x_6 \\
x_1 & = & 3 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_5 & \\
x_3 & = & 0 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_5 & -1x_6 \\
\hline
\max z & = & 3 & & & -1x_6
\end{array}$$

Minden célfüggvény együttható negatív. Optimumnál vagyunk.

A szótár bázismegoldása:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \qquad x_4 = 2, \qquad x_5 = 0, \qquad x_6 = 0$$

A célfüggvényérték: $z(\bar{x}) = 3$

Definíció

Degenerált iterációs lépés: olyan szimplex iteráció, amelyben nem változik a bázismegoldás.

Degenerált bázismegoldás: a bázismegoldásban egy vagy több bázisváltozó értéke nulla.

Ciklizáció: ha a szimplex algoritmus valamely iterációja végén egy korábbi iteráció szótárát kapjuk meg újra, azt mondjuk, hogy az algoritmus ciklizál.

- ha a szimplex algoritmus nem áll meg, akkor *ciklizál.*
- a ciklizáció oka a *degeneráció.*

Ötlet: Használjunk más pivot szabályt!

Pivot szabályok:

	Klasszikus	Legnagyobb növekmény	Bland
Oszlop	pozitív célfüggvény együtthatós		
	c_i legnagyobb, ha több is van, akkor a legkisebb indexű	$\left\lvert c_i \times \frac{b_j}{a_{ij}} \right\rvert$ maximális, x_i legkisebb indexű, ha több is van	x_i legkisebb indexű
Sor	legszűkebb korlátot adó egyenlet		
	legkisebb indexű egyenlet	legkisebb indexű egyenlet	legkisebb indexű bázisváltozó
Biztosan megáll?	nem	nem	igen

3. Feladat

Tekintsük a következő szótárat. Melyik pivot szabály mit választ?

$$
\begin{array}{lcrrrrr}
x_5 & = & 2 & -4x_1 & +1x_4 & \color{blue}{-2x_7} & -2x_8 \\
x_2 & = & 4 & \color{magenta}{-8x_1} & & -4x_7 & -4x_8 \\
x_6 & = & 2 & -4x_1 & \color{orange}{-1x_4} & -2x_7 & -2x_8 \\
x_3 & = & 2 & -2x_1 & -1x_4 & -1x_7 & -2x_8 \\
\hline
\max z & = & 2 & +2x_1 & +2x_4 & +4x_7 & +4x_8
\end{array}
$$

Megoldás

- Klasszikus: x_7 az 1. egyenletben
  - belépő: x_7, mert annak a legpozitívabb a célfüggvényben az együtthatója
  - kilépő: $\min(1, 1, 1, 2)$ miatt a legfelső egyenletben
- Bland: x_1 a 2. egyenletben
  - belépő: x_1, mert a pozitív célfüggvény együtthatósok közül ennek a legkisebb az indexe
  - kilépő: $\min(\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{2}{4}, 1)$ miatt a 2. egyenletben, mert x_5, x_2, x_6 közül x_2 indexe a legkisebb
- Legnagyobb növekmény: x_4 a 3. egyenletben, mert:

  $\max\left(2 \cdot \min(\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{2}{4}, 1), 2 \cdot \min(-, -, 2, 2), 4 \cdot \min(1, 1, 1, 2), 4 \cdot \min(1, 1, 1, 1)\right) = \max(1, 4, 4, 4)$

  Ezért a lehetségesek közül választjuk az elsőt. A legkisebb indexű célfüggvény együttható a 4-esek közül x_4-é, a minimális korlátok közül pedig a fentebb lévőt választjuk.