

# Operációkutatás gyakorlat – 09

## Duaitás III. - zh típusfeladatok

**1. Feladat** Írjuk fel az alábbi szótárhoz tartozó duális *szótárat!*

$$\begin{array}{r}
 x_4 = 5 \quad -1x_1 \quad -1x_2 \quad +4x_3 \\
 x_5 = 7 \quad -1x_1 \quad -3x_2 \quad -1x_3 \\
 \hline
 \max z = 0 \quad +2x_1 \quad +1x_2
 \end{array}$$

**Megoldás**

Írjuk vissza a szótárat standard alakra:

$$\begin{array}{r}
 1x_1 \quad +1x_2 \quad -4x_3 \leq 5 \\
 1x_1 \quad +3x_2 \quad +1x_3 \leq 7 \\
 \hline
 \max z = 2x_1 \quad +1x_2
 \end{array}$$

Ennek a duálisa:

$$\begin{array}{r}
 1y_1 \quad +1y_2 \geq 2 \\
 1y_1 \quad +3y_2 \geq 1 \\
 -4y_1 \quad +1y_2 \geq 0 \\
 \hline
 \min z = 5y_1 \quad +7y_2
 \end{array}$$

A duális standard alakja (szorozzuk az egészet  $-1$ -gyel):

$$\begin{array}{r}
 -1y_1 \quad -1y_2 \leq -2 \\
 -1y_1 \quad -3y_2 \leq -1 \\
 4y_1 \quad -1y_2 \leq 0 \\
 \hline
 \max z = -5y_1 \quad -7y_2
 \end{array}$$

Ebből a szótár:

$$\begin{array}{r}
 y_0 = 2 \quad -1y_1 \quad -1y_2 \quad +1y_3 \\
 y_4 = 1 \quad \quad \quad +2y_2 \quad +1y_3 \\
 y_5 = 2 \quad +3y_1 \quad \quad \quad +1y_3 \\
 \hline
 \max z = 0 \quad -5y_1 \quad -7y_2 \\
 \max w = -2 \quad +1y_1 \quad +1y_2 \quad -1y_3
 \end{array}$$

**2. Feladat** Bland generálóelem választással az alábbi duális (maximalizálási) feladat következő lépésre optimumba ér!

$$\begin{array}{rcccc}
 y_1 & = & 4 & -1y_3 & -1y_5 \\
 y_6 & = & 12 & -6y_3 & -6y_4 & +6y_5 \\
 y_2 & = & 0 & -1y_3 & +4y_4 & +1y_5 \\
 \hline
 \max z & = & 20 & -1y_3 & +2y_4 & -3y_5
 \end{array}$$

- Mennyi a primál feladat (maximalizálási) optimuma?
- Mennyi az eredeti feladat első feltételéhez tartozó erőforrásának árnyékára?
- Mennyi a primál feladat optimális megoldásában  $x_2$  értéke?

**Megoldás a):** *Vegyük észre: a duális feladat maximalizálási alakban szerepel! Ez azt jelenti, hogy az egész szótár  $-1$ -szerese az eredetinek. Vegyük ezt figyelembe az értékek felírásakor!*

Mivel tudjuk, hogy a primál és duál feladat optimuma megegyezik, így egyszerűen csak végezzük el a pivot lépést és olvassuk le a célfüggvényértéket (a válasz ennek  $-1$ -szerese lesz).

$$\begin{array}{rcccc}
 y_1 & = & 4 & -1y_3 & -1y_5 \\
 y_4 & = & 2 & -1y_3 & +1y_5 & -\frac{1}{6}y_6 \\
 y_2 & = & 8 & -5y_3 & +5y_5 & -\frac{2}{3}y_6 \\
 \hline
 \max z & = & 24 & -3y_3 & -1y_5 & -\frac{1}{3}y_6
 \end{array}$$

A célfüggvényérték:  $z(y^*) = 24$ . Mivel ez maximalizálásként szerepelt, így a minimalizálási feladat optimuma (és egyben a primál feladat optimuma is):  $-24$ .

**Megoldás b):**

*HELP: ha az  $i$ . erőforrás (feltétel) árnyékára a kérdés, akkor az adott Primál feltételhez tartozó  $y_i$  értékét keressük. Ehhez pedig a következőt érdemes tudnunk:*

*A duális változók az eredeti feladat mesterséges változóihoz rendelhetők: (onnan tudjuk, hogy hány db mesterséges változó - azaz feltétel - volt a primálban, hogy megszámláljuk a duál feladat oszlopait a konstansok nélkül.)*

Itt: 3 oszlop van, tehát 3 feltétel volt a primálban és 3 nem mesterséges változó, mert ennyi sora van a duál feladatnak. Így a párosítás:

$$x_4 \leftrightarrow y_1; x_5 \leftrightarrow y_2; x_6 \leftrightarrow y_3.$$

Most hogy megvan a párosításunk keressük ki az első feltételhez tartozó változót. A feladat első feltételének mesterséges változója  $x_4$ , az ehhez tartozó duális változó  $y_1$ .

Keressük ki az előzőleg kiszámított szótárban  $y_1$ -et. Az első feltétel bázisváltó, tehát az értéke és egyben a megoldás az adott feltétel konstansa: 4.

**Megoldás c):**

*HELP: Itt épp az előző fordítottja a megoldás menete. Itt a duális feladat mesterséges változóhoz párosítjuk a primál feladat eredeti változóit. Az adott változót kikeressük, a megoldás az ehhez tartozó célfüggvényérték  $-1$ -szerese.*

Itt: 3 feltétel van, a kezdőszótár mesterséges változóit  $y_4, y_5, y_6$  és ezeket párosítjuk a primál feladat nem mesterséges változóit. Így a párosítás:

$$y_4 \leftrightarrow x_1; y_5 \leftrightarrow x_2; y_6 \leftrightarrow x_3.$$

Az  $x_2$  párja ebben az esetben  $y_5$ . Keressük ezt ki a számolt szótárban: nem bázis változó, vegyük a hozzá tartozó célfüggvényérték  $-1$ -szeresét: 1.

#### ZH tipp

Egy  $4 \times 4$ -es  $A$  mátrix esetén (azaz összesen 8 változóval szótár alakban) a fenti párosítás a következő:

$$x_1 \leftrightarrow y_5; x_2 \leftrightarrow y_6; x_3 \leftrightarrow y_7; x_4 \leftrightarrow x_8; x_5 \leftrightarrow y_1; x_6 \leftrightarrow y_2; x_7 \leftrightarrow y_3; x_8 \leftrightarrow y_4$$