Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

1. Gyakorlat

Burdan szamara (14. század): a példa szerint egy szamár két tökéletesen egyforma szénahalom közé állítva okvetlenül éhen halna – ugyanis nem tudná magát elhatározni, hogy melyiket kezdje el fogyasztani.

Jóval korábban: „...a man, being just as hungry as thirsty, and placed in between food and drink, must necessarily remain where he is and starve to death." – Aristotle, On the Heavens 295b, c. 350 BC"

Egy lehetséges feloldás: **érmedobás** (azaz a „véletlen majd eldönti helyettünk")

A későbbiekben intenzíven fogjuk **valószínűségszámítás** eszköztárát használni **döntési problémák** modellezésre!

Ezekkel a kérdésekkel fordult de Méré lovag Pascalhoz.

1. Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz?
2. Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség 1/2-nél kicsit nagyobb, a második valószínűség pedig 1/2-nél kicsit kisebb.

Megoldás.

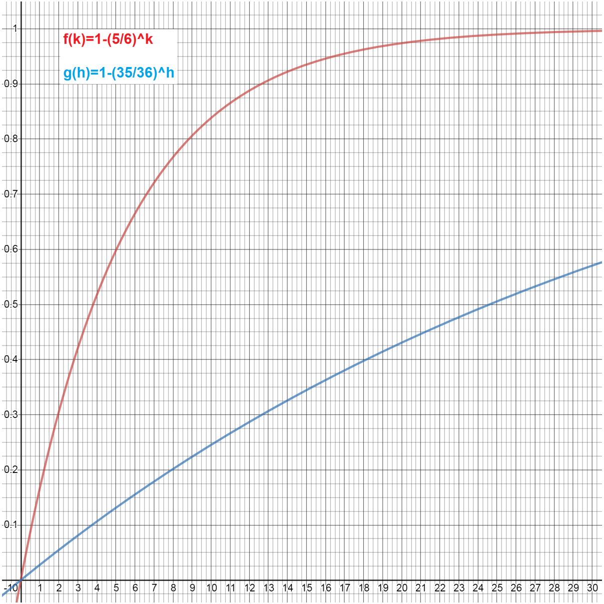
1. Annak az esélye, hogy k dobásból lesz hatos:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k > \frac{1}{2} \text{ ha } k \geq 4$$

2. Annak az esélye, hogy k dobásból lesz dupla hatos két kocka esetén

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k > \frac{1}{2} \text{ ha } k > 25$$

de Mére lovag problémája



ábra. forrás: Hajdu Balázs ábrája

de Méré lovag második problémája. Sokan e feladat megoldásától illetve Pascalnak és Fermat-nak e probléma megoldásáról szóló levelezésétől számítják a **valószínűség számítás** megszületését.

- Két játékos egy igazságos játékot játszik, melynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el 6 nyerést. A játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek 3 a másikuknak pedig 5 nyerése volt.

  Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Megoldás.

- Tekintsük a következő (le nem játszott) három játékot.
- A második játékosnak mindhárom játékot meg kell nyernie.
- Az összes lehetséges változat (W: a második játékos nyer, L: veszít)
  1. WWW
  2. WWL, WL(W), L(WW)
  3. WL(L), L(LW), L(WL)
  4. L(LL)
- Azaz az összes lehetséges eset 8, ebből csak 1 kedvező a második játékosnak $\Rightarrow$ 7:1 lenne az igazságos osztozkodás

Milyen más döntési módszereket tudunk itt elképzelni?

Pascal levele Fermathoz: „Az Ön módszerét, amellyel a méltányos osztozkodás problémát megoldotta, még sokkal inkább csodálom, mint a kocka játékra vonatkozó kérdésre adott megoldását; ugyanis többekkel is beszéltem, akik a kocka játékra vonatkozó kérdést megoldották, így maga de Méré lovag is, aki nekem e kérdést feltette, valamint Roberval úr; azonban de Méré nem volt képes megtalálni a méltányos osztozkodásra vonatkozó kérdés helyes megoldását, sőt még hozzá sem tudott e kérdéshez fogni, úgyhogy én voltam eddig az egyetlen, aki a helyes arányt ismertem.
Az Ön módszere teljesen megbízható, és amikor e kérdésen gondolkodni kezdtem, én is először így indultam el; azonban mivel a különböző kombinációk megszámlálása igen fáradságos, később egy rövidebb és valójában egészen más egyszerűbb és elegánsabb módszert találtam, amelyről most röviden be szeretnék Önnek számolni, ugyanis szeretném ezentúl megosztani Önnek gondolataimat annyira, amennyire ez lehetséges, olyan öröm számomra a mi egyetértésünk. Látom ugyanis ebből, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ban, mint Párizsban”

Van egy cinkelt érménk, amelyről tudjuk (honnan?), hogy nem 1/2-1/2 valószínűséggel esik fejre, illetve írásra. (Azt tapasztaltuk, hogy 100-szor feldobva 60-szor fej volt...)

Hogy generáljunk ezzel az egy érmével „igazságos (1/2-1/2-es) véletlent?”

Megoldás.

- Tegyük fel, hogy $\Pr(F) = 0.6$ (és $\Pr(I) = 0.4$)
- Dobjuk fel az érmét egymás után kétszer. Ekkor
  1. $\Pr(FF) = \Pr(F) \cdot \Pr(F) = 0.36$
  2. $\Pr(II) = \Pr(I) \cdot \Pr(I) = 0.16$
  3. $\Pr(FI) = \Pr(F) \cdot \Pr(I) = \Pr(I) \cdot \Pr(F) = \Pr(IF) = 0.24$
- Módszer:
  1. ha a két dobás különböző, akkor tekintsük az első dobást az eredményének
  2. ha a két dobás azonos, akkor újradobunk (kétszer)

Várhatóan mennyi dobásra lesz ehhez szükség?

Legyen most $\Pr(F) = p$ (és $\Pr(I) = q = 1 - p$).

- $\Pr(\text{különbözőek}) = 2pq$ és $\Pr(\text{azonosak}) = 1 - 2pq$
- Legyen $\mathbb{E}_t$ a **várható** dobások száma, amíg ez be nem következik
- Ha rögtön „szerencsénk" van akkor 2 dobás elég; ha nem, akkor 2 dobást elhasználtunk, és kezdjük előről

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_t =& 2\Pr(\text{különbözőek}) + \Pr(\text{azonosak})(2 + \mathbb{E}_t) \\
=& 4pq + (1 - 2pq)(2 + \mathbb{E}_t) \\
=& 4pq + \mathbb{E}_t + 2 - 2pq\mathbb{E}_t - 4pq \\
=& \frac{2}{2pq} \\
=& \frac{1}{p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Ábrázoljuk a $\mathbb{E}_t$-t p függvényében!

This whole idea can be implemented quite easily. Lets say we have a function *coin(p)*, which bias towards probability p. We can then make a fair coin of it with the following snippet:

```
var coin = p => () => Math.random() < p;

function fairCoin(coin) {

  do {
    var a = coin();
    var b = coin();
  } while (a == b);
  return a;
}

fairCoin(coin(0.6));
```

When we simulate the toss, we will see an outcome of 50:50:

```
var heads = 0, tails = 0;
for (var i = 0; i < 10000; i++) {
  if (fairCoin(coin(0.6))) heads++;
  else tails++;
}
console.log(heads / (heads + tails)); // 0.5005
```

forrás:
https://www.xarg.org/2018/01/make-a-fair-coin-from-a-biased-coin/