Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

4. Gyakorlat

- Egy olyan lottót játszunk, ahol tudjuk, hogy 1000 szelvényből pontosan 1 nyer.
- Kitöltünk egy szelvényt. $\mathrm{Pr}(\text{nem nyer a szelvény}) \geq 0.99$.

Tekintsük a következő „axióma” rendszert:

1. racionális elfogadni azt (az állítást), ami nagyon valószínű
2. nem racionális elfogadni (az állítást), ami inkonzisztens
3. ha racionális elfogadni A-t (állítást) és A'-t (állítást), akkor racionális elfogadni $[A \text{ és } A']$-t.

A paradoxon.

- Az 1. axióma miatt racionális elfogadni, hogy a kitöltött szelvényünk nem nyer.
- Sőt, az is racionális, hogy a második kitöltött szelvényünk sem nyer, és így tovább.
- Viszont a 3. axióma miatt elfogadjuk azt, hogy egyetlen szelvény sem nyer.
- Ekkor a 2. axióma (inkonzisztencia) miatt nem fogadjuk el azt sem, hogy van nyerő szelvény.

Mi lenne, ha eldobnánk az első axiómát?

Tegyük fel, hogy az U tőkénk b-szeresét $(0 < b \leq 1)$ biztosítjuk.

(Például arra kötünk biztosítást, hogyha leég a 10m Ft-ot érő lakásunk, akkor a kár 80%-t téríti a biztosító)

A káresemény bekövetkezési valószínűsége legyen p.
A biztosítási díjat is a tőkéhez nézzük, legyen annak c-szerese

(Azaz ha egyszeri 10 ezer Ft-ot fizetünk a lakásra évente, akkor $c = 0.001$)

Termesztésen arra vagyunk kíváncsiak, hogy U és p függvényében megéri-e ekkora biztosítási díjat kifizetni, azaz hogyan válasszuk meg b-t és c-t.

Nézzük meg mi történik n év után ($n = 1,2,\dots$).
Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ **független, azonos eloszlású** valószínűségi változók amik megadják, hogy a káresemény bekövetkezett-e az adott évben, vagy sem: $\Pr(X_i = 1) = p$ és $\Pr(X_i = 0) = 1 - p$.

- **Ha nincs biztosításunk**, akkor a tőkénk k év után

$$U_k = U_{k-1}(1 - bX_k),$$

vagyis n év után

$$U_n = U \prod_{k=1}^{n} (1 - bX_k).$$

Mindkét oldal logaritmusát véve

$$\log U_n = \log U + \sum_{k=1}^{n} \log(1 - bX_k)$$

Mivel

$$\mathbb{E}[\log(1 - bX_k)] = p\log(1 - b \cdot 1) + (1 - p)\log(1 - b \cdot 0) = p\log(1 - b)$$

ezért aszimptotikusan

$$U_n \approx U(1 - b)^{np}$$

- **Ha van biztosításunk**, akkor k év után

$$U_k = U_{k-1}(1 - c)$$

vagyis n év után

$$U_n = U(1 - c)^n.$$

Ha n nagy, akkor előnyös számunkra a biztosítás, ha

$$U(1-b)^{np} < U(1-c)^n$$

Ugyanakkor a biztosító számára, mivel nagy számú biztosítással dolgozik, az átlagos bevétel- veszteség a mérvadó, ezért előnyös, ha

$$c > bp$$

Ezek alapján mindkét fél számára a **saját szempontjából** akkor lenne elfogadható, ha

$$bp < c < 1-(1-b)^p$$

Látható, hogy c megválasztható úgy, hogy mindkét egyenlőtlenség teljesüljön (és nem függ U-től és n-től).

Miért lehet mindkét fél számára előnyös az üzlet?