Döntési rendszerek I.

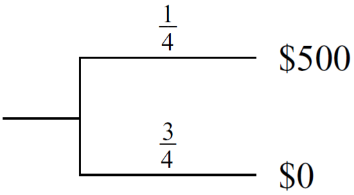
SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

5. Gyakorlat

Lottó

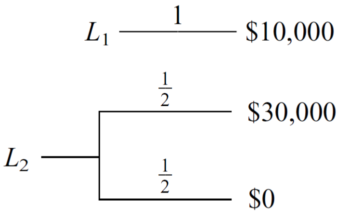
Tegyük fel, hogy valamilyen r_i kifizetést „kapunk” p_i valószínűséggel $(i = 1{,}2, \ldots, n)$. Az ezt leíró $L = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$ rendszert lottónak nevezzük.

1. Példa. Legyen $L = (\frac{1}{4}, \$500; \frac{3}{4}, \$0)$. Egy lottó szemléltethető egy fával, ez esetben:



Lottó

2. Példa. Tegyük fel, hogy az alábbi 2 lottó közül kell választanunk: $L_1 = (1, \$10000)$, azaz biztosan kapunk \$10000-t; a másik $L_2 = (\frac{1}{2}, \$30000; \frac{1}{2}, \$0)$, azaz egy $1/2$ valószínűséggel semmit sem kapunk, $1/2$-del pedig \$30000-et.



Melyiket választanánk ebben az esetben? Várható értéket számolva $\mathbb{E}(L_1) = 10000$, illetve $\mathbb{E}(L_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 30000 = 15000$. Ugyanakkor valószínűleg a legtöbbünk a biztos 10000-et választaná (?), ugyanis kevesebb kockázattal (bizonytalansággal) jár.

Hasznosság függvény

- De ha nem a várható érték, akkor mi alapján választunk?
- Neumann és Morgenstern a következő megközelítést használta:
  1. Rangsoroljuk a kifizetéseket a nekünk (egyénileg!) legjobbtól a legrosszabbig
  2. Legyen u egy olyan függvény, amely minden kifizetéshez egy számot rendel, úgy, hogy

$$u(\text{legjobb}) = 1 \text{ és } u(\text{legrosszabb}) = 0.$$

  3. Ha $u(r_i)$-t megadjuk minden r_i kifizetés esetén, akkor u-t a döntéshozó hasznossági függvényének nevezzük

Várható hasznosság

Adott egy $L = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$ lottó, akkor annak várható hasznossága a következőképp definiált:

$$\mathbb{E}(U, L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(r_i)$$

A kérdés persze az, hogy hogyan tudjuk meghatározni egy egyén hasznossági függvényét?

A kérdésre több megközelítés létezik, de itt a részletekre nem térünk ki. A következőkben egy megközelítést vázolunk.

Logaritmikus hasznosság függvény

Tegyük fel, hogy az aktuális „vagyonunk” w. Tegyük fel továbbá, hogy ennek Δ-val való növekedésének számunkra vonatkozó hasznossága a jelenlegi vagyonunkkal a következőképpen arányos:

$$u(w+\Delta) - u(w) \sim \frac{\Delta}{w}$$

Ez tkp. azt fejezi ki, hogy minél nagyobb az aktuális vagyonunk, adott növekmény egyre kisebb hasznosságnövekedést eredményez.[1] Innen

$$\frac{u(w+\Delta) - u(w)}{\Delta} = c\frac{1}{w}$$

és ha $\Delta \to \infty$, akkor ennek a megoldása

$$u(w) = c\log(w) - \log(w_0)$$

[1] Közgazdászok gyakran a „hamburger példát” hozzák. Ha éhes az ember, az első szendvics jelentősen csökkenti az éhséget, két-három még jól eshet, de a negyedikre már rá sem bírunk nézni.

Logaritmikus hasznosság függvény

A szentpétervári paradoxon újra

Ha visszaemlékszünk a szentpétervári paradoxonra, a játék várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x\Pr(X = x) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \cdots = \infty.$$

Legyen c a játékba való beszállás költsége, w a jelenlegi vagyonunk, u pedig logaritmikus hasznossági függvény. Ekkor a várható hasznosság növekedés

$$\Delta\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}[u(w+2^k-c)-u(w)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}[\log(w+2^k-c)-\log(w)].$$

Egyrészt ez konvergens, másrészt implicit kapcsolatot ad teremt w és c között. Például ha valakinek 1m Ft-ja van, akkor 20.88 Ft-ig „megéri" beszállni a játékba. Ha 1000 Ft-ja van, akkor 10.95 Ft-ot még hajlandó lehet fizetni, hogy játszon.

Hasznosság függvények

1. Gyökös: $u(x) = \sqrt{x}$
2. Exponenciális: $u(x) = (1 - e^{-ax})/a$, ha $a \neq 0$ és $u(x) = x$, ha $a = 0$
   - $a > 0$: kockázat kerülő
   - $a = 0$: kockázat semleges
   - $a < 0$: kockázat kereső
3. Leontief: $u(x_1, \ldots, x_m) = \min\{x_1/w_1, \ldots, x_m/w_m\}$
   - ahol w_i az i-edik jószág súlya (fontossága) a fogyasztó szemszögéből
4. etc.