Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

7. Gyakorlat

Alapfogalmak

A terület alapfogalmai megtalálhatók Pluhár András Döntési rendszerek előadás jegyzetében
`http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/dontes.pdf`
és
`http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/games.pdf`
Játékelméket jegyzetében.
Itt feladatokat nézünk meg, ahol szükséges, bevezetjük a megfelelő definíciókat is.

Kő-Papír-Olló

Tekintsük a jól ismert kő-papír-olló **2-személyes játékot** úgy, hogy aki veszít egy 1 Ft-ot fizet a nyertesnek.

- Az egyes kimenetelekhez tartozó **kifizetéseket** célszerű egy mátrixban tárolni.
- Az 1-es számú játékost **sorjátékosnak**, a 2-es számú játékost **oszlopjátékosnak** nevezzük.
- A sorjátékos és oszlopjátékos is a **stratégiáját**a {kő, papír, olló} halmazból választhatja ki.
- A mátrix sorai és oszlopai a sor, illetve oszlopjátékos stratégiáihoz tartoznak, a mátrix egy adott eleme pedig a megfelelő stratégia pár esetén adja meg a sorjátékos kifizetését:

Kő-Papír-Olló

A **kifizetési mátrix** így a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel bármelyik játékos pontosan annyit nyer (vagy veszít), mint amennyit a másik veszít (nyer), ezért a játékot **zérusösszegűnek** nevezzük. Hogyan döntsük el, hogy melyik stratégiát érdemes játszani?

Racionalitás

Tekintsük az alábbi kifizetési mátrixszal adott 2-személyes zérusösszegű játékot:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A sorjátékos garantáltan el tud érni 3 (pl. Euró) kifizetést. Miért?

- Ha az 1-es stratégiáját játssza, akkor 2-t nyerhet legrosszabb esetben.
- Ha a 2-es stratégiáját játssza, akkor 3-at nyerhet legrosszabb esetben.
- A legrosszabb esetek legjobbikát célszerű választania: ezt nem más mint a **sorminimumok maxima**.

Racionalitás

Nézzük meg, hogy a kifizetési mátrix hogyan néz ki az oszlopjátékos szemszögéből. Írjuk fel a kifizetési mátrixot úgy, mintha ő lenne a sorjátékos:

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

A sorjátékos garantáltan el tud érni legfeljebb -3 (pl. Euró) veszteséget. Miért?

- Ha az 1-es stratégiáját játssza, akkor -3-t „nyerhet” legrosszabb esetben.
- Ha a 2-es stratégiáját játssza, akkor -6-at nyerhet legrosszabb esetben.
- A legrosszabb esetek legjobbikát célszerű választania: ezt nem más mint a sorminimumok maxima.
- DE számíthattuk volna ezt úgy, hogy az első mátrixon vesszük az **oszlopmaximumok minimumát**

Racionalitás

$\Rightarrow$ zérusösszegű játék esetén elég csak a sorjátékos szemszögéből felírt kifizetési mátrixot használni

- **Nyeregpont**:

  $$\text{sorminimumok maximuma} = \text{oszlopmaximumok minimuma}$$

- Ha van nyeregponti stratégia, az bizonyos értelemben (később tárgyaljuk) optimális $\Rightarrow$ a nyeregpontot adó stratégiát kell játszani a játékosoknak.
- Ugyanakkor nyeregpont nem mindig van
  - ld. pl. kő-papír-olló

Számjáték

Két játékos egymástól függetlenül leír egy papírra egy 1 és 100 közti egész számot, majd összehasonlítják őket. Ha a két szám közt egy a különbség, akkor a kisebb számot választó fizet 1 eurót a nagyobb számot választónak. Ha viszont legalább kettő a különbség, akkor épp fordítva, a nagyobb számot választó fizet 2 eurót a kisebbet választónak. Ugyanakkora számok esetén senki sem fizet a másiknak. A táblázat sorjátékos nyereségét mutatja (az oszlopjátékos nyeresége épp ennek az ellentettje, hiszen a játék zérusösszegű).

Számjáték

A játékhoz tartozó kifizetési mátrix a következő:

	1	2	3	4	5	6	.	.	.	100
1	0	-1	2	2	2	2	.	.	.	2
2	1	0	-1	2	2	2	.	.	.	2
3	-2	1	0	-1	2	2	.	.	.	2
4	-2	-2	1	0	-1	2	.	.	.	2
5	-2	-2	-2	1	0	-1	.	.	.	2
.										
.										
.										
99	-2	-2	.	.	.			1	0	-1
100	-2	-2	.	.	.			-2	1	0

Gondoljuk meg, hogy ha a sorjátékos 4-et vagy nagyobbat mondd, sosem jár jobban, mintha 1-et mondott volna. Hasonlóan igaz ez az oszlopjátékosra is. $\Rightarrow$ egy 3×3-as kifizetési mátrix-ra (ami nagyon hasonló a kő-papír-ollóéra) egyszerűsíthető a játék.

Dominancia

- Az egyszerűsítés gondolatmenete a **dominancia** fogalmához vezet: Egy $A = (a_{ij})$ kifizetési mátrix r sora dominálja az s sorát, ha $a_{rj} \geq a_{sj}$ minden $j = 1,2,\ldots$ esetén. Hasonlóan, egy r oszlop dominálja s oszlopot, ha $a_{ir} \geq a_{is}$ minden $i = 1,2,\ldots$.

$\Rightarrow$ A sorjátékos nem fogja az s sorhoz tartozó stratégiát játszani. Az oszlopjátékos nem fogja az r oszlophoz tartozó stratégiát játszani.

Adott egy játék a kifizetési mátrixával:

1. Nézzük meg a dominanciákat és egyszerűsítsünk
2. Ha már nem tudunk tovább egyszerűsíteni nézzük meg van-e nyeregpont.
3. Ha nincs nyeregpont... ld. következő óra.