Döntési rendszerek I.

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Készítette: London András

8 Gyakorlat

Alapfogalmak

A terület alapfogalmai megtalálhatók Pluhár András Döntési rendszerek előadás jegyzetében
`http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/dontes.pdf`
és
`http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/games.pdf`
Játékelméket jegyzetében.

Itt feladatokat nézünk meg, ahol szükséges, bevezetjük a megfelelő definíciókat is.

Kevert stratégiák

Tekintsük a következő **2-személyes zérusösszegű** játékot, melyet az alábbi **kifizetési mátrix** ír le (sorjátékos kifizetései):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy a 3. sor **dominálja** az 1. sort, vagyis a kifizetési mátrix redukálható:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy

sorminimumok maxima $= 4 \neq 5 =$ oszlopminimumok maximuma.

De akkor melyik stratégiát játsza sor (ill. oszlop) játékos?

Kevert stratégiák

Bevezetjük a **kevert stratégia** fogalmát: a sorjátékos játssza x_1 „valószínűséggel" az 1-es stratégiát, x_2 „valószínűséggel" a 2-es stratégiát

- $x_1, x_2 \geq 0$
- $x_1 + x_2 = 1$.[1]
- 2 stratégia esetén legyen: $x_1 = x$ és $x_2 = 1 - x$

Tegyük fel, hogy az oszlopjátékos az 1. stratégiáját játsza. Ekkor a sorjátékos **várható kifizetése**

$$1 \cdot x + 6 \cdot (1 - x) = \begin{bmatrix} x & 1 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{e_1} = -5x + 6.$$

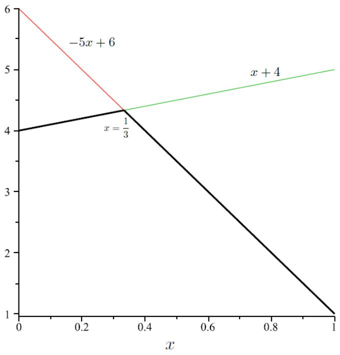
[1] egyszerűen általánosítható 2-nél több stratégia esetén

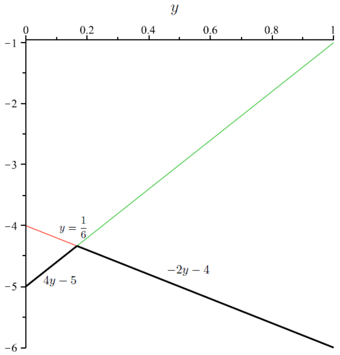
Kevert stratégiák

Most tegyük fel, hogy az oszlopjátékos az 2. stratégiáját játssza. Ekkor a sorjátékos **várható kifizetése**

$$5 \cdot x + 4 \cdot (1 - x) = \begin{bmatrix} x & 1 - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T A_1 \mathbf{e_2} = x + 4.$$

Ábrázoljuk ezeket a stratégiákat





Kevert stratégiák

A második ábrát hasonlóan kapjuk, mint az elsőt, csak az oszlopjátékos **kevert stratégiáit** vizsgáljuk

- Legyen ez y és $1-y$, $0 \leq y \leq 1$

Ha a sorjátékos az 1. stratégiáját játssza, akkor a **várható kifizetés**

$$-1 \cdot y - 5 \cdot (1-y) = \mathbf{e}_1^T(-A_1)\mathbf{y} = 4y - 5,$$

illetve Ha a sorjátékos a 2. stratégiáját játssza, akkor a **várható kifizetés**

$$-6 \cdot y - 4 \cdot (1-y) = \mathbf{e}_2^T(-A_1)\mathbf{y} = -2y - 4.$$

Egyensúly

Mindkét játékos **racionális**, azaz a várható **kifizetés maximalizálásra törekszik**. Az ábráról leolvasható

- sorjátékos esetén az $x = 1/3$ és $1 - x = 2/3$;
- oszlopjátékos esetén az $y = 1/6$ és $1 - y = 5/6$

kevert stratégia a legjobb, amit tehet.

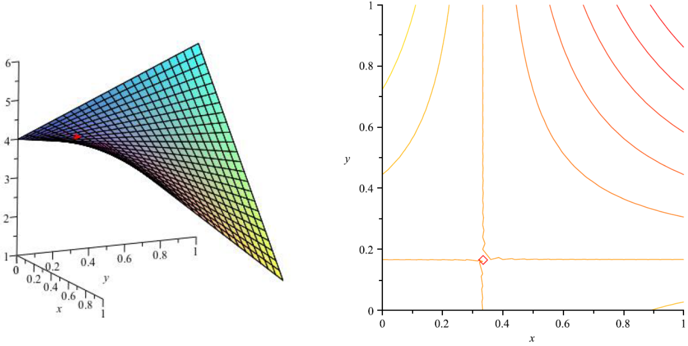
Azt mondjuk, hogy $\mathbf{x}^* = (1/3, 2/3)$ és $\mathbf{y}^* = (1/6, 5/6)$ **stratégiapár** **Nash-egyensúly** az adott játék esetén.

Egyensúly

Zérusösszegű játékok esetén a Nash-egyensúlyt nyeregpontnak is nevezzük. Ugyanis ha $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ a két játékos kevert stratégiái, akkor pl. a sorjátékos kifizetése.

$$\mathbf{x}^T A_1 \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} = -6xy + 2y + x + 4.$$

Részletesen ezt nem fejtük ki, az alábbi ábra mutatja a motivációt:



Nash-egyensúly

Legyen u_s az sorjátékos kifizetése (nyeresége) és legyen u_o az oszlopjátékos kifizetése (nyeresége)

Az $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ és $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*)$ kevert stratégiapár **Nash-egyensúly**, ha

$$u_s(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq u_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \text{ minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

ÉS

$$u_s(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq u_s(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \text{ minden } \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$$

Azaz bármely játékos eltér az egyensúlyi stratégiától, miközben a másik (többi) játékos nem, akkor rosszabb vagy azonos kifizetést tud csak elérni annál, mintha nem tért volna el ettől.[2]

[2] a fogalom könnyen általánosítható N játékos esetén, és több stratégia esetén

Nash-egyensúly

Tétel (Nash, 1951). *Minden véges játékban létezik kevert Nash-egyensúly.*

Feladat. Mutassuk meg, hogy a kő-papír-olló játék (egyetlen) kevert Nash-egyensúlya amikor $\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^* = (1/3, 1/3, 1/3)$.