Hálózattudomány

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Előadó: London András

3. Előadás

Gráfmodellek

- Milyen általános közös tulajdonságai vannak „tipikus” gráfoknak?
- Tudjuk-e valamilyen modellel közelíteni a valóságban megjelenő hálózatokat?
- A különböző területeken (társadalom, gazdaság, biológia, technológia) megjelenő hálózatok modelljei között mik a legfontosabb különbségek/hasonlóságok?

Gráfmodellek

- **Mely gráfok az érdekesek ?** Mi alapján különböztetjük meg az érdekeset a nem érdekestől ? $\longrightarrow$ referencia pontok
- Hálózatelemzésnél egy fontos referencia pont a véletlen gráf
- Két alapvető gráfmodell család
  - Konstrukciós modellek : bizonyos szabályok mentén bizonyos típusú hálózatot hoz létre ; pl. „preferential attachment"
  - Generatív modellek : szabad paraméterek felhasználásával generál hálózatot ; pl. az élvalószínűség adott

Erdős- Rényi modell [1]

- $G(n,p)$ – **minden élt** $p \in [0,1]$ **valószínűséggel húzunk be**, egymástól függetlenül
- élek száma várhatóan: $\binom{n}{2}p$
- átlagos fokszám: $\overline{k} = (n-1)p$
- fokszámeloszlás:

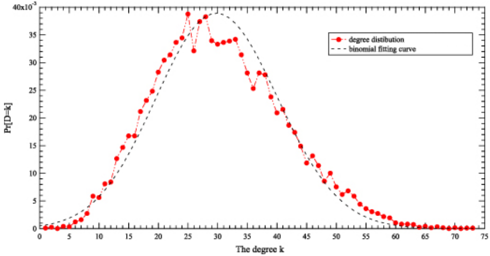
$$\mathbb{P}(k_i = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k},$$

azaz binomiális.

Fontos és rendkívül sokat vizsgált matematikai modell

[1] Erdős & Rényi, 1959

Erdős-Rényi modell



ábra. Generált ER gráf fokszámeloszlása és az illesztett binomiális eloszlásgörbe

Kisvilág gráfok

- Stanley Milgram (1933-84) kísérlete: véletlenül kiválasztott emberek küldjenek egy levelet egy közeli ismerősnek, hogy az szintén továbbküldje így, azzal a céllal, hogy egy általuk valószínűleg ismeretlen bostoni orvoshoz eljusson végül a levél
- A 64 levél az USA 64 különböző pontjáról átlagosan 5.5 levélváltás után célba ért

$\Longrightarrow$ Kicsi átmérő: A legtávolabbi pontok sincsenek túl messzire egymástól...

Kisvilág gráfok

További fontos jellemző: háromszögek száma nagy

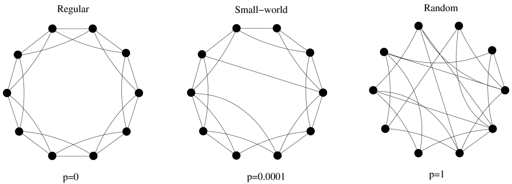
Klaszterezettség/tranzitivitás (Clustering coefficient)

$$C = \frac{3 \times \text{háromszögek száma}}{\text{összefüggő ponthármasok száma}}$$

- Kisvilág gráfokban (pl. társadalmi hálózatokban) ez a szám nagy („A barátom barátját nagy valószínűséggel én is ismerem"), szemben a véletlen gráfban, ahol 0-hoz tart. (*Szorgalmi: számoljuk ki*)

Watts-Strogatz modell [2]

- Kiindul egy 4-reguláris gráfból (minden pont foka 4)
- Minden élt p valószínűséggel átdrótoz (azaz (i, j) él esetén választunk véletlenül egy k pontot, és p valószínűséggel töröljük (i, j)-t és behúzzuk (i, k)-t)



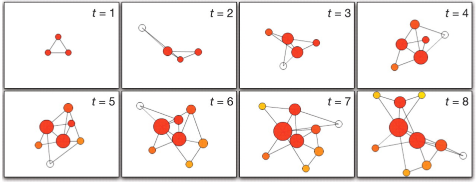
$\Longrightarrow \sim \log n$ az átmérő; ha (i, j) és (i, k) is él, akkor nagy valószínűséggel (j, k) is az (azaz háromszövek száma nagy)

[2] Watts & Strogatz, *Nature*, 1998

Barabási-Albert modell [3]

- Konstrukciós modell – hogyan fejlődhet ki egy hálózat?
- A **preferential attachment modell**:
  1. kezetben egy összefüggő G_0 gráf n_0 ponton
  2. t időpontban hozzáadunk G_t-hez egy új v pontot úgy, hogy

$$\mathbb{P}(v\text{-t összekötjük egy meglévő } i\text{-vel}) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



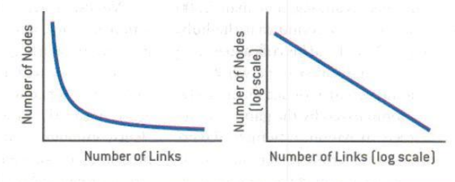
a későbbiekben részletesen tárgyaljuk a modellt

[3] Barabási & Albert, *Science*, 1999

Skálafüggetlen fokszámeloszlás

A fokszámeloszlás az ún. hatványtörvényt követi:

$$\mathbb{P}(k_i = k) = ck^{-\alpha},$$



A valóságban megjelenő hálózat jelentős része ilyen tulajdonságú
(a későbbiekben részletesen tárgyaljuk)

A konfiguráció modell

- $G(n, \mathbf{k})$ – ahol $\mathbf{k} = (k_1, k_1, \ldots, k_n)$ fokszámsorozat adott ($\sum_i k_i$ páros!)
  - ha minden k_i egyenlő, akkor egy reguláris gráfot kapunk
  - ha k_i-k Poisson-eloszlású véletlen változók c/n várható értékkel, akkor egy $G(n, p)$ típusú gráfhoz jutunk el
- Hogyan generálnánk le a gráfot, ha adott n és $\mathbf{k}$?

$$\mathbb{E}(i \text{ és } j \text{ közötti élek száma}) = \frac{k_i k_j}{2m}$$

A megfigyelt mintázatok a hálózatokban mennyire magyarázhatók pusztán a fokszámok ismeretében?