Hálózattudomány

SZTE Informatikai Intézet
Számítógépes Optimalizálás Tanszék
Előadó: London András

4. Előadás

Hogyan nőnek a hálózatok?

- **Statikus** hálózatos modellek: a pontok száma (n) fix, az éleket 'valamilyen véletlen' generálja
  - Erdős-Rényi modell (kis távolságok, alacsony klaszterezettség)
  - Watts-Strogatz modell (kis távolságok, magas klaszterezettség)
  - Konfigurácó modell (adott fokszámsorozatú gráf)
  - Sztochasztikus Blokk Model (adott magasszintű struktúra)
- Ugyanakkor sokszor valós **dinamikus** rendszereket modellezünk hálózattal
  - gondoljuk a web gráf növekedésére
  - a baráti és munkahelyi kapcsolatok kialakulására
  - a tudományos publikációk citációira

Komplex hálózatok szerkezetét vizsgálva (fokszámeloszlás, közösségszerkezet, centralitások, stb.) számos tulajdonságot megtudhatunk a modellezett rendszerről, **DE**

nem feltétlenül tudjuk, hogy miért pont ezek a mintázatok jelennek meg?

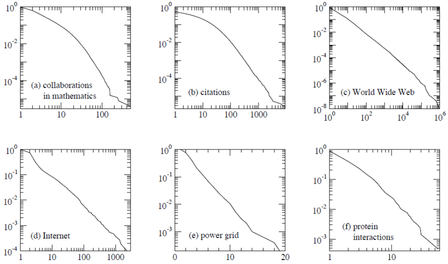
- Szociális hálókban miért nagy a klaszterezettség?
- Biológiai rendszerekben miért jelentős a mag-periféria szerkezet?
- Tudományos publikációk citációs hálózata miért követ hatványtörvényes fokszámeloszlást
- Online közösségi hálókban miért jelennek meg 'vastag-farkú' fokszámeloszlások?

$\Longrightarrow$ Milyen mechanizmus hozta létre ezeket a hálózatokat?

Hatványtörvény

$$\mathbb{P}(k_i = k) = ck^{-\alpha}$$

- Városok lakossága
- különböző szavak száma szövegekben
- Szexuális partnerek száma
- Gének kópiáinak száma egy genomban
- stb.



A hatványtörvények története

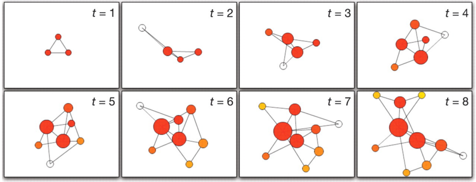
- Pareto, 1897 : Pareto eloszlás („80-20” törvény) : a javak 80%-át a lakosság 20%-a birtokolja
- Zipf, 1916 : szavak gyakorisága szövegekben, városok lakossága (a j-edik leggyakoribb angol szó gyakorisága az összes szövegben $1/j$-vel arányos)
- Simon, 1955 : „a gazdag még gazdagabb lesz” (the rich gets richer)
- Price, 1965 : citációs hálózatok vizsgálata ; az ötlet : egy tudományos cikk annál több idézést kap, minél több idézést kapott már eddig $\rightarrow$ „kumulatív előny”
- Albert Réka és Barabási László, 1999 : preferential attachment

Barabási-Albert modell [1]

Preferential attachment dinamikus modell :

1. kezdetben egy összefüggő G_0 gráf n_0 ponton
2. t időpontban hozzáadunk G_t-hez egy új v pontot úgy, és m_0 élt v-ből G_{t-1}-be, hogy

$$\mathbb{P}(v\text{-t összekötjük egy meglévő } i\text{-vel}) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



[1] Barabási & Albert, *Science*, 1999

Barabási-Albert modell

Ebből

$$\mathbb{P}(\text{létező } i \text{ pont „kap” új élt } t \text{ időpontban}) = m_0 \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

t-ben összesen tm_0 él van a gráfban

$$\sum_{j=1}^{t} k_j(t) = 2tm_0$$

A kettőből adódik, hogy annak a valószínűsége, hogy az i pont kap új élt t-ben $k_i(t)/2t$ $(t = 1,2,\dots)$
Kis „csalással” a várható fokszám időbeli változását a

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = \frac{k_i(t)}{2t}$$

differenciálegyenlet írja le a $k_i(i) = m_0$ (az i-edik pontot i időpillanatban adtuk hozzá a gráfhoz) kezdeti feltétellel (feltéve, hogy a fokszám folytonos valószínűségi változó $\leftarrow$ ez csalás!)

Barabási-Albert modell

Az egyenlet megoldása:

$$k_i(t) = m_0 \left(\frac{t}{i}\right)^{1/2}$$

A fokszámeloszlás meghatározásához meg kellene nézni, hogy t-ben hány pont foka kisebb vagy egyenlő k-val:

$$\mathbb{P}(k_i(t) < k) = \mathbb{P}(m_0 \left(\frac{t}{i}\right)^{1/2} < k)$$

Ebből

$$\mathbb{P}(i > m_0^2 t/k^2) = 1 - \mathbb{P}(i \leq m_0^2 t/k^2) = 1 - \frac{m_0^2 t}{k^2}(t + m_0)$$

feltéve, hogy a pontokat egyenlő időintervallumokon adjuk a gráfhoz

Barabási-Albert modell

A sűrűségfüggvény ebből

$$\mathbb{P}(k) = \frac{dP(k_i(t) < k)}{dk}$$

mely stacionárius megoldása

$$\mathbb{P}(k) = 2\frac{m_0^2}{k^3} \sim k^{-3}$$

Azaz a modell egy skálafüggetlen fokszámeloszlású hálózatot generál.

Uniform attachment

- az i cimkéjű pont $t = i$ időpontban születik $(i = 1{,}2, \dots)$
- $k_i(t)$ az i pont foka t-ben
- kezdetben m_0 pont
- $k_i(i) = m_0$ kezdeti feltétel (i pont az i-edik lépésben születik)
  Minden t időpillanatban az újonnan születő pont m_0 új éllel kötődik a már meglévő t ponthoz véletlenszerűen, ezért $t > i$-ben az i pont várható fokszáma:
  $$\frac{dk_i(t)}{dt} = \frac{m_0}{t}$$
  Ezután ugyanaz a sztori, mint az előbb. (szorgalmi feladat)

Vertex copy

- Adott egy G_0 hálózat
- Válasszunk egy pontot ki véletlenszerűen, „másoljuk le” az összes élével együtt
- Minden élre dobjunk fel egy érmét: ha fej (q-val), akkor ugyanahhoz a ponthoz kössük be, ahova az eredeti pont esetén volt kötve, ha írás $(1-q)$, akkor véletlenül választott ponthoz kössük be

$\Longrightarrow$ Itt is a hatványtörvényes fokszámeloszlás jön elő (projekt feladat)