



N-személyes játékok

Bársony Alex

Előszó

- Neumann János és Oskar Morgenstern
- Racionális osztozkodás törvényeinek tanulmányozása
- Játékosok egy tetszőleges csoportjának „ereje”
 - Nem 3 személyes sakk



Definíció - kooperatív n-személyes játék

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$ - a játékosok halmaza.
- $S \subseteq I$ - (halmaz) **koalíció**
- v - A koalíciókhoz egy valós számot rendelő karakterisztikus függvény:
 - $v(\emptyset) = 0$
 - $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, ha $S, T \subseteq I$ és $S \cap T = \emptyset$. (**superadditivitás**)
- 2 koalíció: S, T ; $S \subseteq T : v(S) \leq v(T)$ (**monotonitás**)



Példa - Ingatlan fejlesztés

- Egy földműves által birtokolt föld mezőgazdasági értéke **100 ezer** dollár.
- Két vevő pályázik rá
 - egyik lakásépítéssel **200 ezer**-
 - másik bevásárló központ létrehozásával **300 ezer** dollár hasznot érhet el a föld felhasználásával.
- A földműves egymagában is képes hasznát venni a földjének, az építők nem.

Példa - Ingatlan fejlesztés

- $I = \{1, 2, 3\}$ (1: földműves; 2, 3: vevők.)
- $v(\emptyset) = 0$
- $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$
- $v(\{1\}) = 100000$
- $v(\{1,2\}) = 200000$
- $v(\{1,3\}) = 300000$
- $v(\{2,3\}) = 0$
- $v(\{1,2,3\}) = 300000$



Definíció - Egyszerű játék

- ▶ v csak 0 és 1 értéket vesz fel.

Példa - Többségi játékok

- ▶ 50%+1 szavazattal megvalósuló döntések
- ▶ $I = \{1, \dots, n\}$
- ▶ $v(S) = 1$: S "nyer"; 0: "veszít" ($S \subseteq I$)
- ▶ $v(S) = 1$: ha $|S| > n/2$; 0: különben

Definíció - imputáció

- ▶ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: egy kifizetés.
- ▶ $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in I$ (**Egyéni racionalitás**)
 - ▶ *Egy játékos sem fogadna el olyan kifizetést, aminél jobbat egyedül is elérhetne.*
- ▶ $\sum x_i = v(I)$ (**Pareto optimalitás**)
 - ▶ *Nem osztható ki több, mint amennyi van. Sőt, a megszerezhető maximális értéket szét kell osztani.*
- ▶ Az olyan kifizetéseket, amelyre a fenti 2 feltétel teljesül, imputációnak nevezzük.
- ▶ $A(v)$ - Az összes imputáció halmaza.

Példa - imputációk halmaza

- $I = \{1, 2, 3\}$
- $v(S) = 0$, ha $|S| < 2$; $v(S) = |S|/3$ különben

$$A(v) = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 x_i = 1\}$$

- Az imputációk halmaza *túl nagy*, emiatt nem tekinthető megoldásnak
- A megoldások halmazát bizonyos **szűkítő feltételek** után kaphatjuk meg
 - Mag
 - Stabil halmaz
 - Shapley érték

Definíció - hatékony preferálás

- ▶ Ha van 2 kifizetés: x, y
- ▶ Akkor nem üres koalíció ($\emptyset \neq S \subseteq I$) hatékonyan preferálja x -et y -nal szemben, ha
 - ▶ $x_i > y_i$ minden $i \in S$ esetén (**előnyösebb**)
 - ▶ $\sum x_i \leq v(S)$. (**elérhető**)

$$x \succ_S y$$

Definíció - Játék magja

- Azon **x imputációk** halmaza, melyekkel szemben **egyetlen y imputációt sem preferál hatékonyan** bármely S koalíció.
- Jele: $C(v)$
- Ha $A(v)$ csak egyelemű, akkor az lesz a mag (ezt kell szeretni)
- Ez jó megoldás, azonban gyakran nincs ilyen imputáció.

Definíció - Stabil megoldás

- Neumann és Morgenstern eredeti gondolata
- A mag lehet üres, ekkor más szempont kell
- A stabil megoldások halmaza *bővebb*, mint a mag ($C(v) \subseteq B$)
- Az imputációk $A(v)$ halmaza felfogható egy G **gráfként**:
 - **Csúcsok**: az imputációk
 - **Élek**: x és y csúcs (imputáció) között akkor van él, ha x -et hatékonyan preferáljuk y -nal szemben, valamilyen S koalíció esetén
- $A(v)$ -nek egy B részhalmaza **stabil megoldás**, ha B stabil halmaz az általa meghatározott G gráfban
- B stabil halmaz, ha:
 - **Független**: semmilyen $x, y \in B$ -re nem mondható, hogy x -et hatékonyan preferáljuk y -nal szemben
 - **Domináló**: minden $y \in I \setminus B$ -re igaz, hogy létezik $x \in B$, amit hatékonyan preferálunk y -nal szemben

Példa - ingatlan fejlesztés

v (karakterisztikus fgv)	$A(v)$ (imputációk)	$C(v)$ mag
$v(\{1\}) = 100000$ $v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$ $v(\{1,2\}) = 200000$ $v(\{1,3\}) = 300000$ $v(\{2,3\}) = 0$ $v(\{1,2,3\}) = 300000$	$x_1 \geq 100000$ $x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$ $\Sigma = 300000$	$A(v)$ azon elemei melyekre: $x_1 + x_2 \geq 200000$ $x_1 + x_3 \geq 300000$ $x_2 + x_3 \geq 0$

- 1, 3 együtt elérik a maximumot, ezért 2 kimarad az üzletből
- Mivel $x_2 = 0$, ezért adódik, hogy $x_1 \geq 200000$
- Tehát a mag:
 - $C(v) : \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$
- Stabil halmaz:
 - $B : \{x : 100000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$

Definíció - Shapley érték

- Az előbbi megoldások *túl egyszerűsítettek*
 - Egyetlen valós szám határozza meg a koalíció értékét (kifizetés: $v(S)$)
- A shapley érték **célja**, hogy egy olyan **valós számot** határozzon meg, hogy egy játékos számára mekkora az **értéke annak, hogy részt vesz** a játékban.
 - *Másképpen:* Mekkora értéke van az adott játékban, adott játékosnak.
- Ezt az értéket adja meg a Φ függvény, amelyre teljesülnek az alábbi axiómák:
 - A játékosok **ereje független az elnevezésüktől**
 - $\sum \Phi_i(v) = v(I)$, - megszerezhető haszon **teljes felosztása**
 - $\Phi_i(v) = 0$, az olyan i játékosoknak akiknek **nincs befolyásuk** a játék menetére
 - **Additivitás:** v, v' 2 játék I halmazon, és $w = v + v'$, akkor $\Phi(w) = \Phi(v) + \Phi(v')$

Shapley tétel

- A karakterisztikus függvények halmazán létezik egy egyértelműen meghatározott Φ függvény, amely eleget tesz az 1-4 axiómáknak.
- Továbbá:

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})),$$

- Ahol:

$$\gamma(k) = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}.$$

Példa - Számolás

➤ (51; 49, 48, 3)

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq I} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) = \sum_{i \in S, |S|=2} \frac{1}{3!}(1 - 0) = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3},$$

$$\Phi(v) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

➤ Minden játékos értéke 1/3

- Hiába több az 1., 2. játékos szavazatainak száma, mivel egyedül nem mennek vele semmire
- Legalább 2 játékos kell ahhoz, hogy nyerhessenek

Példa - Ingatlan fejlesztés

$$\begin{aligned}\Phi_1(v) = \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{1\})) + (v(\{1, 3\}) - v(\{1\}))] + \\ + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})) = 216666\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 3\}))] = 16666\frac{2}{3}$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1, 3\}) - v(\{1\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1, 2, 3\}) - v(\{1, 2\}))] = 66666\frac{2}{3}$$

- Az eredmény jól tükrözi a helyzetet
 - Földműves (1) shapley értéke messze magasabb a többinél, hiszen ővé a föld, nélküle nem sokra menne a többi játékos
- Ez az eredmény utat mutat a korábbi megoldás finomítására (ki mennyire alkuképes)
 - $C(v) : \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$



Referencia

- <http://www.inf.u-szeged.hu/~pluhar/oktatas/games.pdf>
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cooperative_game
- http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/buraip/solymosi_jatekelmelet.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/N-player_game
- https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Cooperative_game
- https://en.wikipedia.org/wiki/Unscrupulous_diner%27s_dilemma