Közelítő és szimbolikus számítások I. Gyakorlat

Gyakorlatvezető: London András

4. Gyakorlat

Mátrixok inverze

Mátrixszorzás nem kommutatív → jobb és bal inverz

$$\underset{n\times m}{A}\,\underset{m\times n}{X} = I \qquad\qquad \underset{m\times n}{Y}\,\underset{n\times m}{A} = I$$

Ha létezik bal és jobb inverz, akkor a kettő megegyezik és egyértelmű

$$\underset{n\times a}{A}\,\underset{n\times n}{A}^{-1} = \underset{n\times n}{A}^{-1}\,\underset{n\times a}{A} = I.$$

Ha A és B invertálható akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

megjegyzés: ld. még Moore-Penrose pszeudoinverz

Mátrix inverz Gauss eliminációval

Példa: mátrixegyenlet megoldása

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Három egyenletrendszerre bontva

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \\ x_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,3} \\ x_{2,3} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MATLAB-ban egyszerűen

```
>> inv(A)
```

vagy

```
>> A^-1
```

QR felbontás

Egy Q négyzetes mátrix **ortogonális**, ha $QQ^T = Q^T Q = I$

azaz ha transzponáltja megegyezik az inverzével[1]

Tetszőleges A négyzetes valós reguláris mátrixnak létezik

$A = QR$ felbontása egy ortogonális és egy felső háromszögmátrixra

Lineáris egyenletrendszer megoldása: $Ax=b \rightarrow QRx=b \rightarrow Rx=Q^Tb$

QR-felbontás háromszor drágább, mint az LU-felbontás. (*miért?*)

De miért jó?

[1]numerikus stabilitás szempontjából a legjobb!

[2]ld. Gram-Schmidt ortogonalizáció

LU vs QR

LU előnyök

- Minden mátrixra megy
- Minden megoldást megtalál
- Könnyű programozni
- Gyors

LU hátrányok

- Könnyen instabillá (!) válik
- Nem keres közelítő megoldást

QR előnyök LU-val szemben

- Ha nincs egzakt megoldás, talál közelítőt

QR hátrányok LU-val szemben

- Algoritmikusan bonyolultabb meghatározni a QR felbontást mint az LU-t
- Lasabb

De általában mindig jobb, mint az LU

QR felbontás és egyenletrendszer MATLAB-ban

```
>> A = [2 1 -1; -3 -1 2; -2 1 2];
>> b = [8 -11 -3]';
>> [Q,R] = qr(A)

Q =     -0.4851    0.4117    0.7715
         0.7276   -0.2994    0.6172
         0.4851    0.8608   -0.1543


R =     -4.1231   -0.7276    2.9104
              0    1.5718    0.7111
              0         0    0.1543

>> x = R\(Q'*b)

x =      2.0000
         3.0000
        -1.0000
```

Cholesky felbontás

Egy A négyzetes mátrix szimmetrikus ha $A=A^T$

Egy A négyzetes mátrix pozitív definit ha $x^T A x > 0$ minden x nem nullvektor esetén

Ha A négyzetes mátrix szimmetrikus és pozitív definit, akkor felbontható $A=LL^T$ ahol L alsó háromszögmátrix a főátlóban pozitív elemekkel (*v.ö. LU felbontás*) → Cholesky

Miért jó? Kb. kétszer hatékonyabb, mint az LU

Cholesky felbontás és egyenletrendszer MATLAB-ban

```
>> A = [1 2 3; 2 8 12; 3 12 27];
>> b = [14 54 108]';
>> L = chol(A, 'lower')

L =  1     0     0
     2     2     0
     3     3     3

>> y = L\b;
>> x = L'\y

x =  1
     2
     3
```

Feladatok

1. Valósíts meg egy négyzetes mátrix invertáló eljárást MATLAB-ban az `inv` függvény és hatványozás művelet nélkül (tipp: LU felbontás)
2. Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszert a Cholesky-felbontás segítségével:
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
3. Oldd meg a következő lineáris egyenletrendszert a QR-felbontás segítségével:
$$\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$