Közelítő és szimbolikus számítások I. Gyakorlat

Gyakorlatvezető: London András

5. Gyakorlat

Iterációs módszerek

- Adott az $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ egyenletrendszer
- Kiindul egy $x^{(0)}$ kezdeti értékből, majd minden iterációval jobb közelítését adjuk a megoldásnak
- Cél, hogy az $x^{(0)}$ $x^{(1)}$,…, $x^{(k)}$,… sorozat az egyenletrendszer megoldásához konvergáljon

- Kérdések
    1. Konvergál-e?
    2. Mi legyen a leállási feltétel?

Jacobi iteráció

1. Átrendezzük az egyenletrendszert úgy, hogy a baloldalon az $x_1,\dots,x_n$ változók álljanak (ld. példa)
2. Ekkor $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{x}$ alakú egyenletrendszert kapunk
3. Az iterációs egyenletünk: $\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{c}+B\boldsymbol{x}^{(k)}$
4. Kezdjük iterálni *az* $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,\dots,1)^T$ kezdővektorból
5. Leállás: $\| \boldsymbol{x}^{(n+1)}-\boldsymbol{x}^{(n)} \| < \varepsilon$ - pl. $=0.01$

Jacobi iteráció - példa

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} 5x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{7}{5} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{5}{2} \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{3}x_2^{(k)} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Jacobi iteráció - példa

1. Iteráció.

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

2. Iteráció.

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/5 \\ 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Iteráció.

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1.9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/5 \\ 5/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 \\ 2 \\ 0.03 \end{pmatrix}$$

A pontos gyökök az $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T$ vektor elemei.

Gauss-Seidel iteráció

- A Jacobi eljárás módosított változata
- Sok esetben jobban működik
- Könnyebb implementálni

Gauss-Seidel iteráció - példa

- Az előző példa iterációs egyenlete:

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_2^{(k)} + \frac{7}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{5}{2}$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{3}x_2^{(k+1)} + \frac{2}{3}$$

- $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,\ldots,1)^T$ kezdővektorral

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{5}1 + \frac{7}{5} \Longrightarrow x_1^{(1)} = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}1.2 + \frac{5}{2} \Longrightarrow x_2^{(1)} = 1.9$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{3}1.9 + \frac{2}{3} \Longrightarrow x_3^{(1)} = 0.03$$

Gauss-Seidel iteráció - példa

2. Iteráció.

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{5}1.9 + \frac{7}{5} \Longrightarrow x_1^{(2)} = 1.02$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}1.02 + \frac{5}{2} \Longrightarrow x_2^{(2)} = 1.99$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{3}1.99 + \frac{2}{3} \Longrightarrow x_3^{(2)} = 0.003$$

Konvergencia kritériumok

- Itt nem tárgyaljuk
- Ld. Előadás jegyzet
- Ld. Coospace jegyzet