Közelítő és szimbolikus számítások I. Gyakorlat

Gyakorlatvezető: London András

6. Gyakorlat

Mátrix sajátérték-sajátvektor

$$Ax = \lambda x$$

ahol

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\lambda \in \mathbb{C} \quad \leftarrow$ sajátérték (s.é.)

$x \in \mathbb{C}^n \quad \leftarrow$ sajátvektor (s.v.)

Ugyanez átrendezve:

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0 \text{ vagy } \det(A - \lambda I) = 0$$

Mátrix sajátérték-sajátvektor

A determináns kifejtve: $\det(A - \lambda I) =$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1}-\lambda & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_0 = 0}_{\text{karakterisztikus polinom}}$$

Matlab utasítás.

```
[V, E]=eig(A)
```

Alkalmazások

- Matematika szinte összes területén
- Fizika (kvantum mechanikában pl. Schrödinger egyenlet)
- Statisztika (pl. főkomponens analízis -> köv. diák)
- Képfeldolgozás
- Adatbányászat
- Stb.

Példa: főkomponens analízis

Az adatok sokszor magas dimenziós vektorok

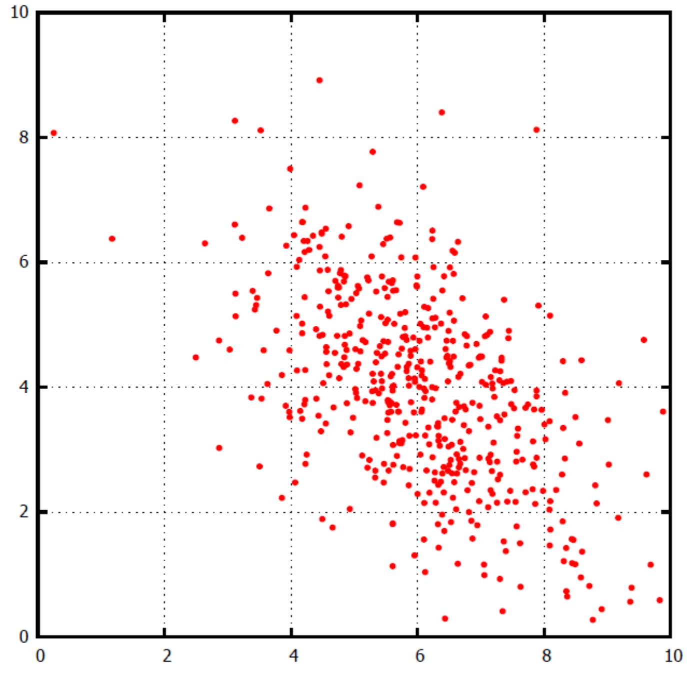
- Képek (pixelek száma)
- Idősorok (pl. árfolyamok, napi hőmérséklet)
- Nyilvántartás, adatbázisok rekordjai

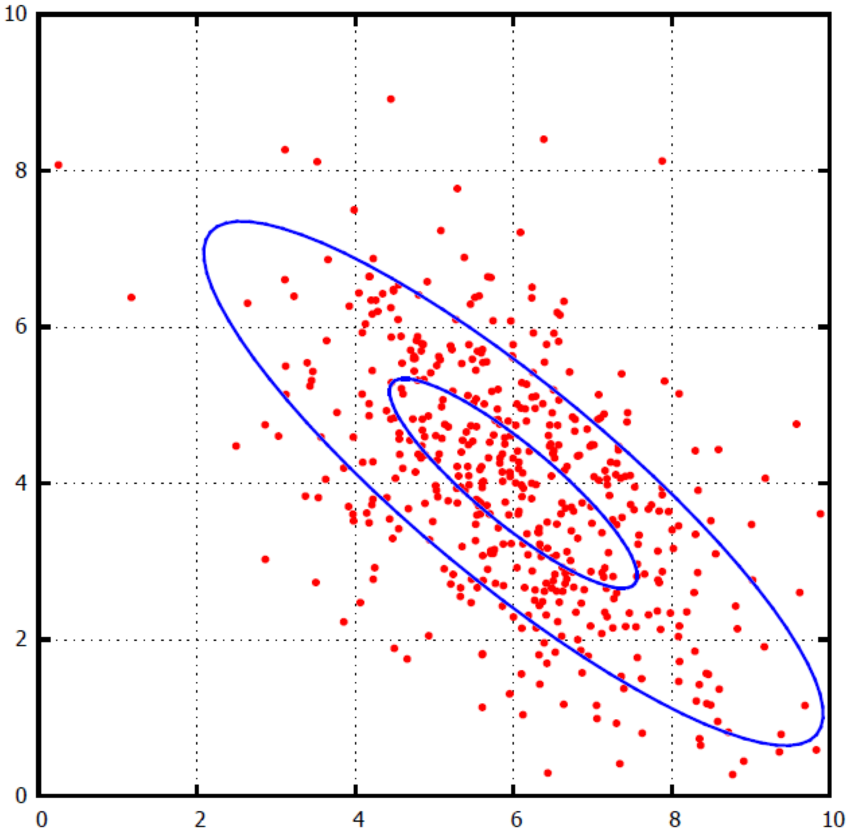
Az adathalmaz változói általában nem függetlenek

- A variancia nagy része információ (megtartjuk)
- A többi zaj (eldobjuk)

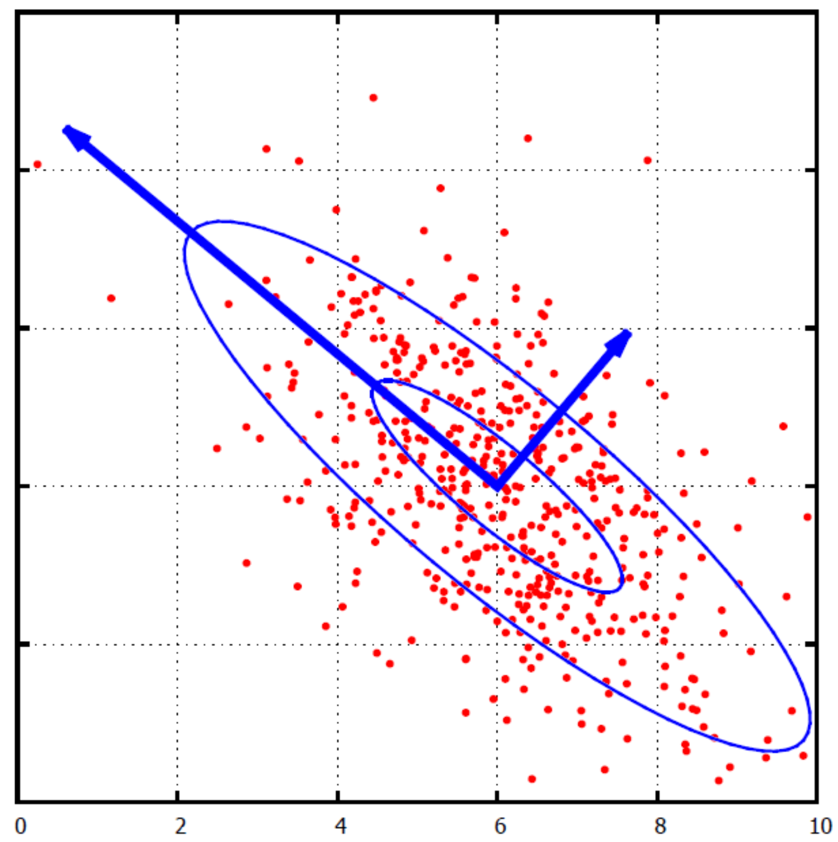
Példa: főkomponens analízis

A cél kezelhető szintre redukálni a dimenziók (változók) számát, tömöríteni az adatokat és „eldobni” a zajt





Korrelált szórás: ellipszisek



Főtengely irányok

Főtengely transzformáció

- Mik az irányok, melyekben legnagyobb a szórás
- Legyen olyan a bázis, hogy a vektorok ezen irányokba állnak
- A bázisvektorok hossza arányos a szórással (az eljárást itt nem részletezzük)

Az eljárás után:

- Néhány sajátérték (adatmátrix kovariancia mátrixához) kiemelkedik
- A lényeget a nagy sajátértékhez tartozó sajátvektorok hordozzák

Ötlet: elég csak a nagy sajátértékeket megtartani -> főkomponensek

Spektrum

Spektrum: Mátrix sajátértékeinek halmaza (multiplicitással)

Spektrálsugár: a legnagyobb sajátérték abszolút értéke

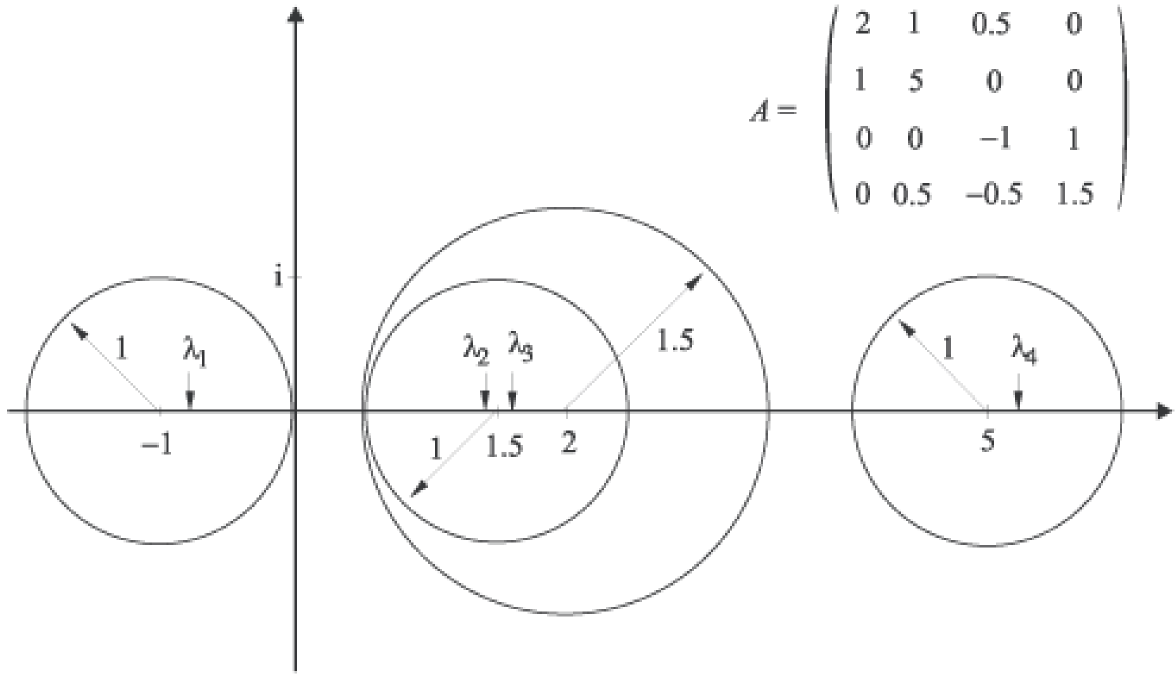
Gersgorin tétele: Az A mátrix összes sajátértéke benne van a

$$K_i = \{Z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{k=1,k\neq i}^{n} |a_{i,k}|\}$$

körök $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ uniójában.

Gersgorin körök példa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$



Feladatok

1. Állapítsuk meg és rajzoljuk fel (Gersgorin tétele alapján) az alábbi mátrix sajátértékeinek elhelyezkedését a komplex számsíkon:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Számítsuk ki a fenti mátrix sajátértékeit és sajátvektorait Matlbbal.

3. Írj fel egy olyan mátrixot (Matlab segtségével), aminek sajátértékei az 1 (háromszoros multiplicitással) és a 2 (egyszeres multiplicitással)!