Közelítő és szimbolikus számítások I. Gyakorlat

Gyakorlatvezető: London András

9. Gyakorlat

Polinomok

Példa

$$p(x) = 3x^2 + x - 5$$
$$q(x, y) = 2x^3y^2 - 3xy + 5x^2 + y^3$$

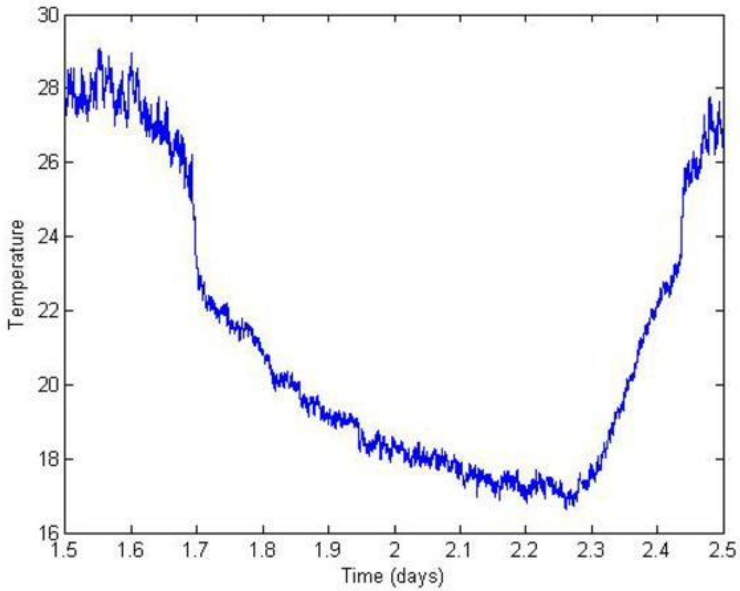
Egyváltozós polinom általános esetben

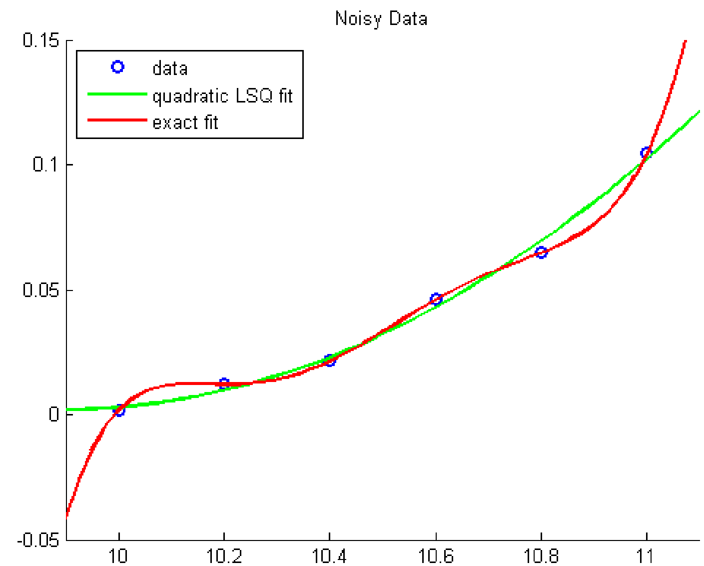
$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

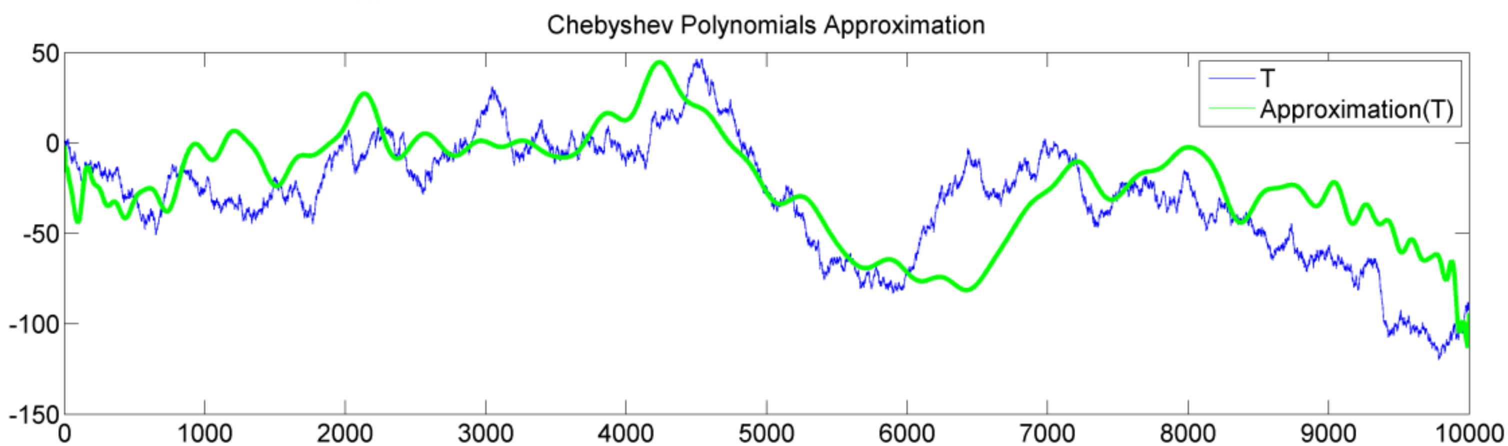
Miért szeretjük a polinomokat?

- Könnyű deriváni, integrálni
- „Könnyen” lehet közelíteni (meghatározni) a zérushelyeit
- Jól lehet vele bonyolult függvényeket közelíteni

Polinomok


Temperature
Time (days)
30
28
26
24
22
20
18
16
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
2.1
2.2
2.3
2.4
2.5


Noisy Data
data
quadratic LSQ fit
exact fit
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
10
10.2
10.4
10.6
10.8
11


Chebyshev Polynomials Approximation
T
Approximation(T)
50
0
-50
-100
-150
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

Polinomok zérushelyei (gyökei)

Az x_0 (komplex) számot a $p(x)$ polinom **zérushely**ének (gyökének) nevezzük, ha $p(x_0) = 0$.

A gyökökre érvényesek a következő állítások:

- Az n-edfokú $p(x)$ polinomnak n db (komplex) gyöke van
- A $p(x)$ polinom a gyökök sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható a $p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ **gyöktényezős alak**ban.
- Nincs olyan megoldóképlet, amely tetszőleges polinom gyökeit meg tudná adni az együtthatókat tartalmazó, véges sok aritmetikai művelettel és gyökvonással felírt kifejezések formájában.

Polinomok Matlabban

Sorvektor formában adjuk meg az együtthatóival

$x^3 - 7x - 6$

```
>> p = [1 0 -7 -6]

p =      1      0      -7      -6
```

Fontos, hogy a 0 együtthatókat is be kell vinni

A polinom **gyökei:**

```
>> roots(p)

ans = 3.0000
     -2.0000
     -1.0000
```

Polinomok Matlabban

Polinom (együtthatóinak) meghatározása a gyökök ismeretében:

```
r = [3 -2 -1];

>> poly(r)

ans =   1.0000   -0.0000   -7.0000   -6.0000
```

Kiértékelés adott helyen:

```
>> p = [1 -5 11 -15];
>> polyval(p,2)

ans =   -5
```

Műveletek polinomokkal

Polinomok **szorzása:**

```
>> p1 = [2      0      1];
>> p2 = [1      2      0      3];

>> conv(p1,p2)    % Polinomok szorzasa

ans =   2      4      1      8      0      3
```

Polinomok **osztása:**

```
>> deconv(p2,p1) % Polinomok osztasa

ans =   0.5000    1.0000


>> [q r] = deconv(p2,p1)    % maradek polinom kiíratasa

q =     0.5000    1.0000
r =     0         0         -0.5000    2.0000
```

Műveletek polinomokkal

Polinom **deriválása**

```
>> polyder(p)

ans =    3   -10    11

% polinom derivaltjanak kiertekelese egy adott helyen
>> polyval(polyder(p),2)

ans =    3
```

Ábrázolás:

```
>> p = [1 0 0];
>> x = -10:0.001:10;
>> y = polyval(p,x);
>> plot(x,y,'b-')
```

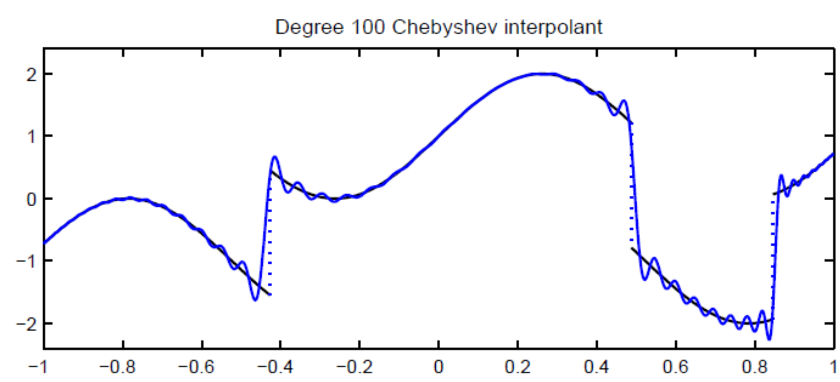
Néhány speciális polinom: Chebysev

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \ldots$$

chebfun.m függvény

```
>>f = sin(6*x) + sign(sin(x+exp(2*x)));
>>plot(f,'k'), p = chebfun(f,101); hold on, plot(p)
```



Néhány speciális polinom: Bernstein

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$B_{0,1}(t) = 1 - t$$

$$B_{1,1}(t) = t$$

A `sin(2*pi*t)` és approximációja:

```
>> syms t //szimbolikus változó
>>b10=bernstein(@(t), sin(2*pi*t), 10, t);
>>b100=bernstein(@(t), sin(2*pi*t), 100, t);
>>plot(b100,[0,1])
```

Feladatok

1. Adjunk meg 2 tetszőleges polinomot és végezzük el rajtuk az összes most megismert műveletet.
2. Mi lesz a karakterisztikus polinomja a következő mátrixnak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki a sajátértékeit kétféleképpen.