

# Operációkutatás I.

Szegedi Tudományegyetem  
Informatikai Intézet  
Számítógépes Optimalizálás Tanszék

12. Előadás

# Az optimalizálás alapfeladata

Keressük  $f$  függvény maximumát

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

ahol  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Lehetnek **adottak korlátozó feltételek**:  $g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$  és/vagy  $g_j(\mathbf{x}) = 0, j = m + 1, \dots, m + k$ . Ha adottak, **feltételes**, különben **feltétel nélküli** optimalizálási feladatról beszélünk.

- $f$  és  $g_i$  függvények lehetnek lineárisak (LP), vagy nemlineárisak is,
- de feltesszük, hogy **folytonosak**
- $\mathbf{x}$ -re nincs  $g_i$ -ken kívül megszorítás (pl. nem köthetjük meg, hogy egészek)
- jelöljük  $\mathcal{S}$ -sel a lehetséges megoldások halmazát

# Az optimalizálás alapfeladata

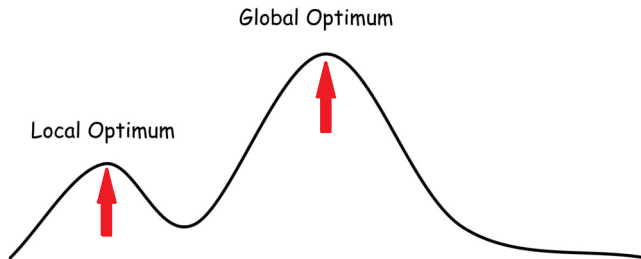
Mit jelent az, hogy  $x^*$  egy megoldás?

## Lokális optimum

Egy  $x^*$  lokális maximum (optimum), ha  $\exists \delta > 0$ , úgy, hogy  $f(x^*) \geq f(x)$   $\forall x \in \mathcal{S}$  és  $\|x - x^*\| < \delta$  esetén.

## Globális optimum

Egy  $x^*$  globális maximum (optimum), ha  $f(x^*) \geq f(x) \forall x \in \mathcal{S}$  esetén.

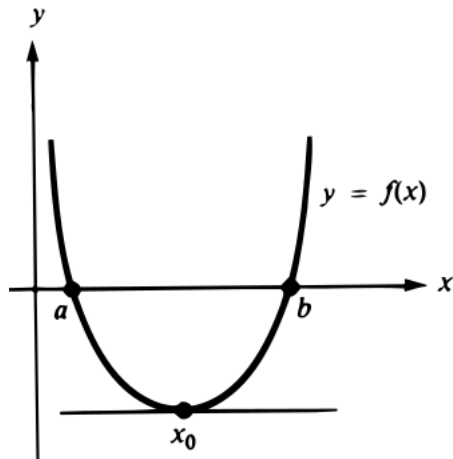
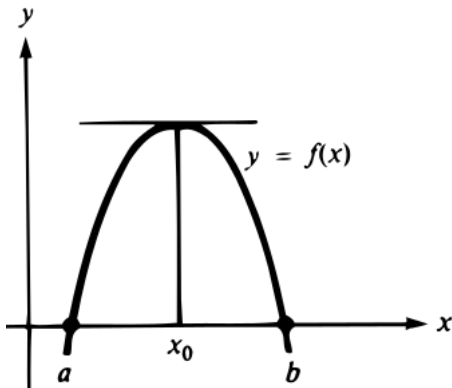


# Az optimalizálás alapeladata – ábra

## Kérdés

Mikor lesz minden lokális maximum (minimum) globális is?

Ha  $f$  konkáv (konvex) függvény, akkor biztosan.



# Feltétel nélküli optimalizálás: Szükséges és elegendő feltétel optimalitásra

**Tétel (szükséges feltétel).** Ha  $x^*$  az  $f(x)$  függvény maximuma (minimuma), akkor  $f'(x^*) = 0$ .

Ez nem elegendő, ld. pl.  $f(x) = x^3$  függvény.

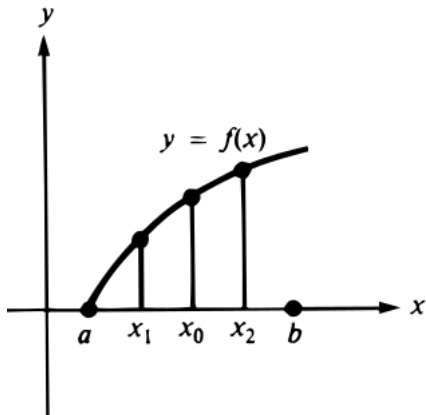
**Tétel (elegendő feltétel).** Ha  $f'(x^*) = 0$  és  $f''(x^*)$  negatív (pozitív), akkor  $x^*$  lokális maximuma (minimuma)  $f$ -nek.

Azokat a pontokat, ahol  $f'(x) = 0$  **stacionárius pontoknak** nevezzük. A

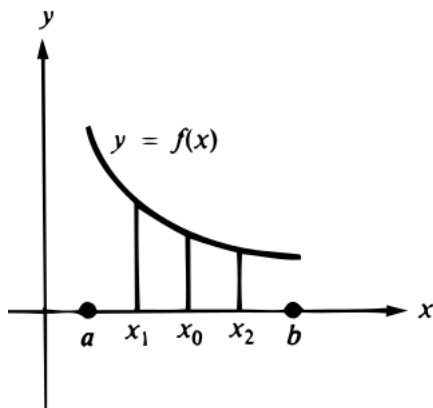
$$\max_{x \in [a, b]} f(x)$$

feladat megoldását a stacionárius pontjai illetve  $a$  és  $b$  közt keressük.

## Példák monoton függvényre

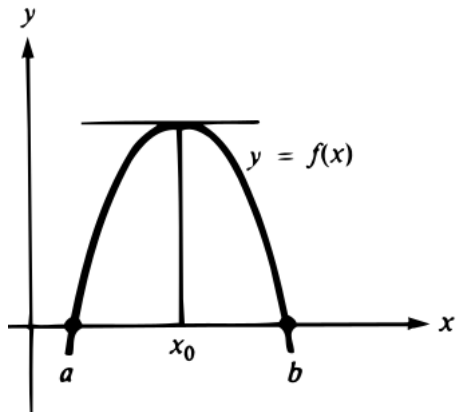


- (a)  $f'(x_0) > 0$   
 $f(x_1) < f(x_0)$   
 $f(x_2) > f(x_0)$   
 $x_0$  nem lokális  
szélsőérték hely

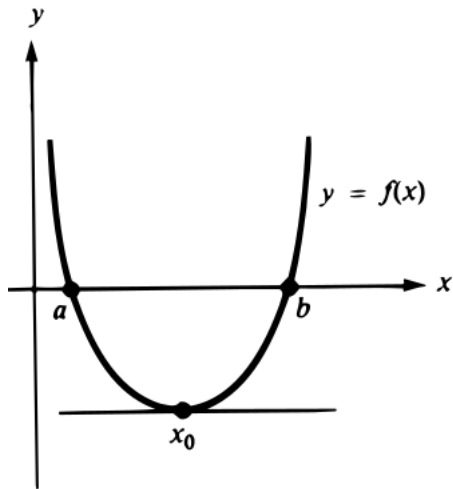


- (b)  $f'(x_0) < 0$   
 $f(x_1) > f(x_0)$   
 $f(x_2) < f(x_0)$   
 $x_0$  nem lokális  
szélsőérték hely

## Példák konkáv és konvex függvényekre

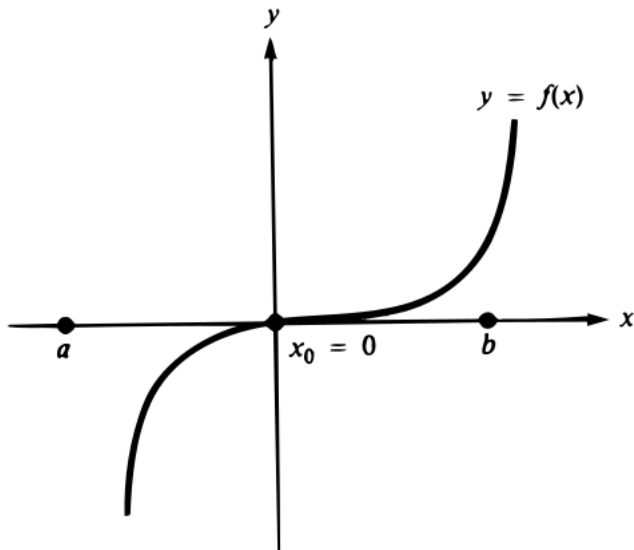


- (c)  $f'(x_0) = 0$   
Ha  $x < x_0$ , akkor  $f'(x) > 0$   
Ha  $x > x_0$ , akkor  $f'(x) < 0$   
 $x_0$  lokális maximum



- (d)  $f'(x_0) = 0$   
Ha  $x < x_0$ , akkor  $f'(x) < 0$   
Ha  $x > x_0$ , akkor  $f'(x) > 0$   
 $x_0$  lokális minimum

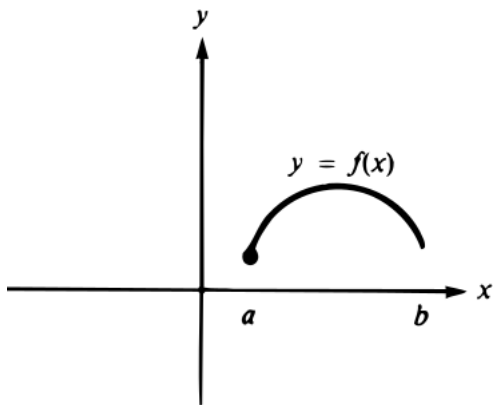
## Példa se nem konkáv se nem konvex függvényre



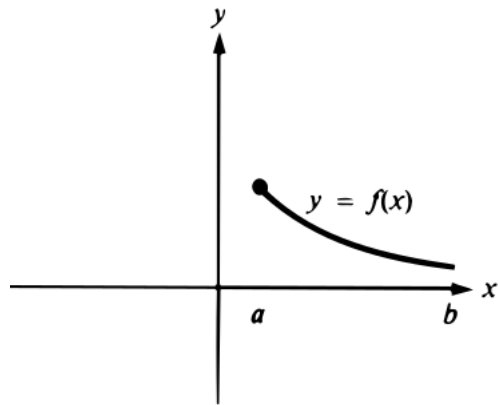
- (e)  $x_0 = 0$  nem lokális maximum  
vagy lokális minimum,  
de  $f'(x_0) = 0$



# Példa optimumra nem 0 deriválttal



(a)  $f'(a) > 0$   
 $a$  lokális minimum



(b)  $f'(a) < 0$   
 $a$  lokális maximum

## Legmeredekebb lejtő módszere

Több dimenziós feladatoknál az  $f'(x) = 0$  feltételt felváltja a

$$\nabla f(x) = (f'_{x_1}(x), f'_{x_2}(x), \dots, f'_{x_n}(x)) = \mathbf{0}$$

szükséges feltétel.

Ez nem feltétlenül vezet könnyen megoldható egyenletrendszerre, ezért iteratív megoldáshoz folyamodunk.

### Lokális kereső eljárás

Legyen  $x_0$  a kezdő megoldásunk, az iterációs lépés pedig

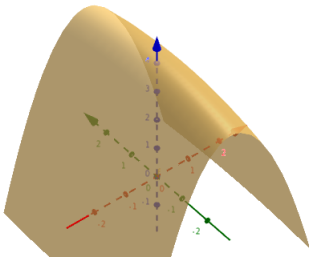
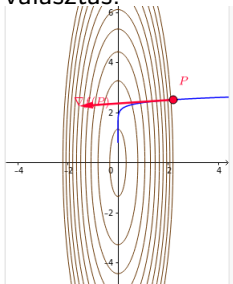
$$x_{i+1} = x_i + \mu d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

ahol  $d_i$  egy növekvő irány maximalizálásnál,  $\mu$  pedig a lépéshossz.

Ha  $\|x_{i+1} - x_i\| \leq \epsilon$ , azaz az új lépés nem elég nagy, STOP.

# Legmeredekebb lejtő módszere

Ahogy  $f'(x)$  a növekvő irányba mutat 1D-ben, úgy  $\nabla f(\mathbf{x})$  a legmeredekebb növekedés irányába mutat  $nD$ -ben. Így  $\mathbf{d}_i = \nabla f(\mathbf{x}_i)$  jó választás.



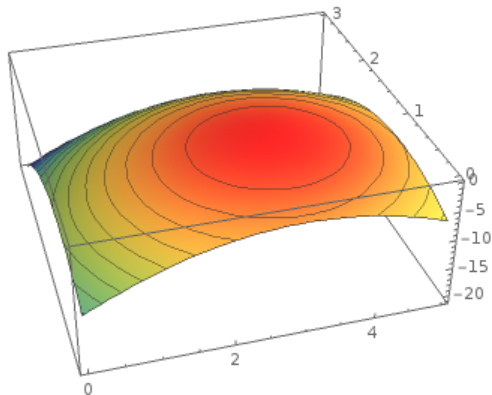
► Geogebra

## Lépéshossz meghatározása

$\mu$ -t vagy az egydimenziós  $\max_{\mu} f(\mathbf{x}_i + \mu \mathbf{d}_i)$  feladat megoldásával, vagy közelítéssel határozzuk meg.

## Legmeredekebb lejtő: példa

**Példa.** Maximalizáljuk az  $f(x, y) = -(x - 3)^2 - 3(y - 1)^2$  függvényt!



$$\begin{aligned}\nabla f &= \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2(x-3) \\ -6(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 6-6y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0)$$

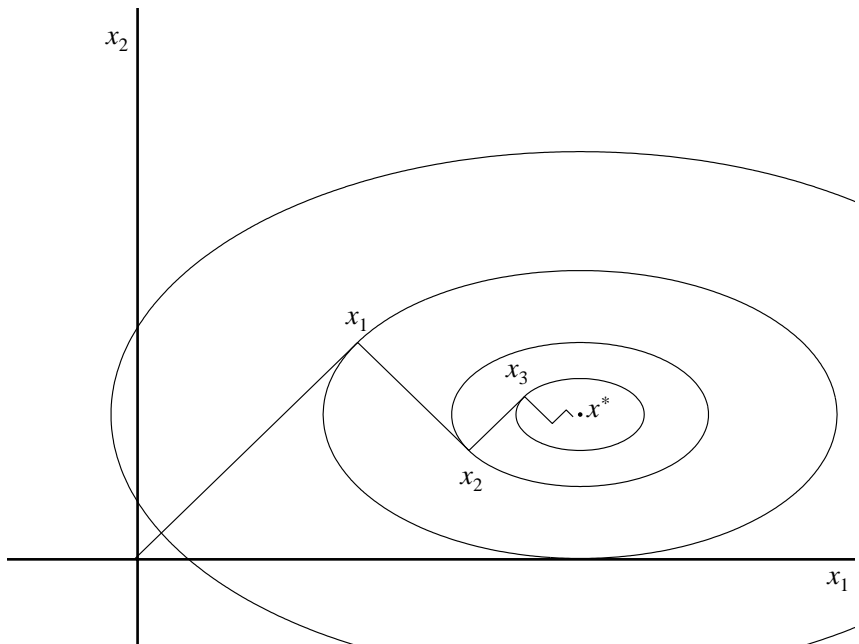
$$\mathbf{x}_1 = (0, 0) + \mu(6, 6) = (6\mu, 6\mu),$$

vagyis

$\max_{\mu} f(6\mu, 6\mu)$ -t keressük!

$$\max_{\mu} f(6\mu, 6\mu) = \max -(6\mu - 3)^2 - 3(6\mu - 1)^2 = \max -144(\mu - 1/4)^2 - 3$$

$$\mu = 1/4 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = (6/4, 6/4)!!!$$



# Feltételes optimalizálás: Lagrange függvény

Adott a következő feltételes probléma

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ & g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Az

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

függvényt a feladat **Lagrange függvény**ének nevezzük.

**Tétel (szükséges feltétel).** Ha  $\mathbf{x}^*$  az (1) feladat maximuma, akkor létezik  $\boldsymbol{\lambda}^*$  amire  $\mathbf{x}^*$  a Lagrange függvény stacionárius pontja, azaz  $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$ .

A  $\boldsymbol{\lambda}$  vektor elemeit **Lagrange multiplikátor**oknak nevezzük.

# Lagrange függvény – példa

**Példa.** Maximalizáljuk  $f(x, y) = x + y$  függvényt, ha  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Lagrange függvény.**

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = x + y - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

A szükséges feltétel

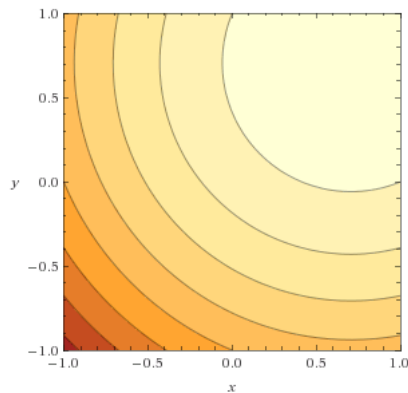
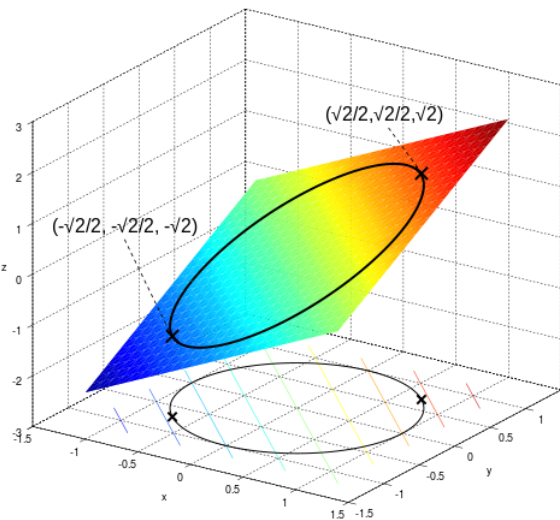
$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}'_x \\ \mathcal{L}'_y \\ \mathcal{L}'_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megoldva:  $x = y = 1/(2\lambda)$ ,  $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$

így  $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , illetve  $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ .

Ebből  $f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$  a maximum,  $f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$  a minimum.

# Lagrange függvény – példa



A Lagrange fv  $\lambda = 1/\sqrt{2}$ -vel



# Korlátozófüggvény módszer

**Motiváció:** ahelyett, hogy megoldanánk egy feltételes optimalizálási feladatot, **beépítjük a feltételeket a célfüggvénybe.** (ld. mint Lagrange függvény)

**Ötlet:** Tegyük fel, hogy adott egy kezdő lehetséges megoldásunk ( $x_0 \in \mathcal{S}$ ). „**Készítsünk szakadékot**” az  $\mathcal{S}$  határán.

A feladat:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{feltéve} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

**A korlátozófüggvény (barrier):**

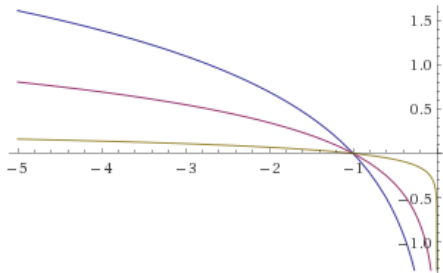
$$B_\mu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mu\phi(\mathbf{x})$$

ahol  $\phi(\mathbf{x})$  tartson  $-\infty$ -hez  $\mathbf{x}$  tart a megengedett tartomány határához, de kis negatív ha még megengedett!

# Korlátozófüggvény módszer: A $\phi$ függvény lehetséges választásai

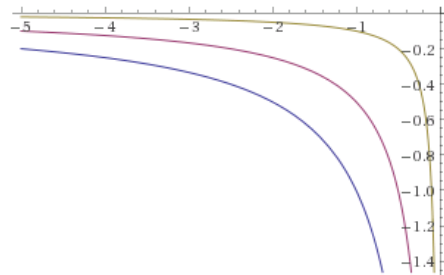
$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \log(-g_i(\mathbf{x}))$$

Az  $x \leq 0$  feltétel esetén



$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}$$

Az  $x \leq 0$  feltétel esetén



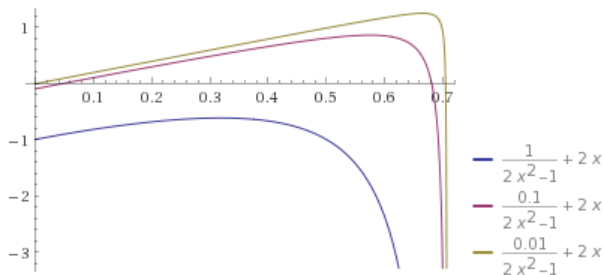
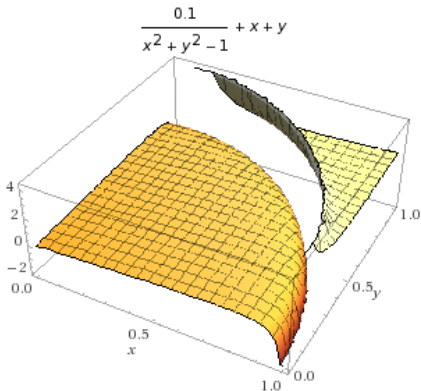
A  $\mu$  paraméter megválasztása kontrollálja az akadály szigorúságát:

- $\mu$  nagy: fokozatos akadály (kék)
- $\mu$  kicsi: éles akadály (barna)

# Korlátozófüggvény módszer: példa

**Példa.**  $\max x + y$  ha  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$B_\mu = x + y + \frac{\mu}{x^2 + y^2 - 1}$$



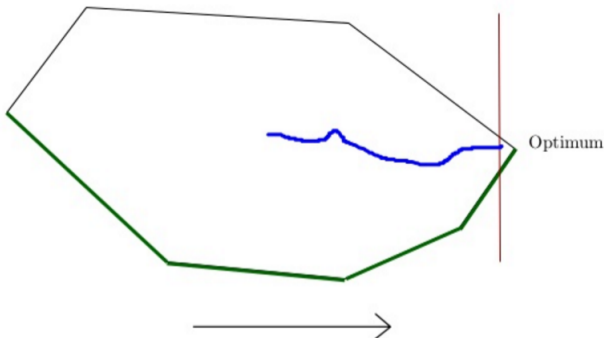
Induljunk ki az  $x_0$  megengedett kezdő megoldásunkból, oldjuk meg a  $\max B_\mu$  feladatot, majd  $\mu$ -t fokozatosan csökkentve újra meg újra oldjuk meg a  $\max B_\mu$  feladatot!

## Korlátozófüggvény módszer: Megjegyzések

- A  $B_\mu$  feladatok megoldása tart az eredeti feladat megoldásához ha  $\mu \rightarrow 0$ , de nem éri el ha  $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$  ( $B_\mu(\mathbf{x}^*) = -\infty \forall \mu > 0$ ).
- Csak egyenlőtlenség feltételek mellett alkalmazható, különben nincs lehetséges megoldása!
- Kis  $\mu$  esetén a korlátozó (barrier) függvény rosszul kondicionált, azaz numerikusan nehezen megoldható (túl nagy a célfüggvényérték különbség kis lépésre is).
- A feltételeket nem hagyhatjuk figyelmen kívül: ha kilépünk a lehetséges tartományból a függvényünk vagy nem értelmezett (logaritmus), vagy rossz megoldást ad (reciprok).

# Szimplex vs. belső pontos módszer

A korlátozófüggvény módszer lineáris programozási feladatra való alkalmazásából született az ú.n. **belső pontos módszer**!



# Büntetőfüggvény

Mi a helyzet akkor, ha **nincs meg a kezdő lehetséges megoldás** (azaz egy belső pont...)?

**Ötlet:** Legyen a **büntető függvény**

$$P_\rho(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \rho\psi(\mathbf{x}),$$

ahol  $\rho < 0$  szám a **büntető paraméter** és

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \mathbf{x} \text{ lehetséges megoldás} \\ > 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

**Cél:**

$$\max_{\mathbf{x}} P_\rho(\mathbf{x})$$

problémák sorozatának megoldása, ahol  $\rho \rightarrow -\infty$ .

Vagyis: a nem lehetséges megoldások esetén a célfüggvény legyen egyre kisebb.

# Büntetőfüggvény

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{feltéve} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \\ \text{feltéve} \quad & g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = m + 1, \dots, l \end{aligned}$$

feltételekkel adott feladatot.

**A  $\psi$  függvény lehetséges választásai:**

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\mathbf{x})\} + \sum_{i=m+1}^l |g_i(\mathbf{x})|$$

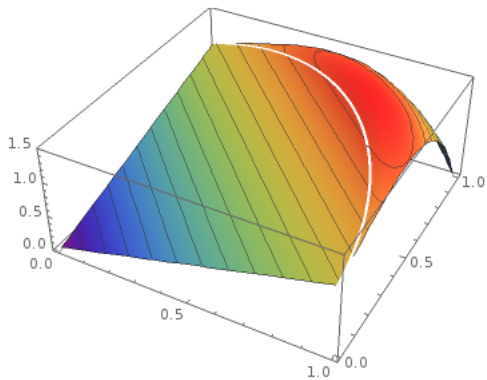
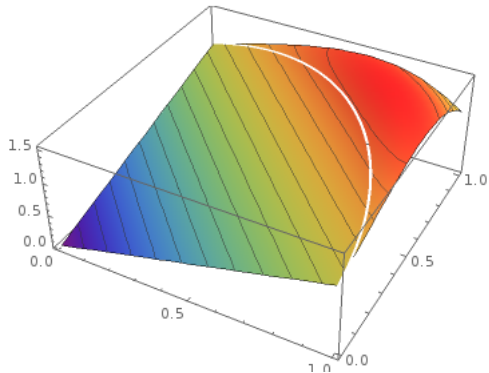
Vagy a négyzetes büntetőfüggvény

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(\mathbf{x})\}^2 + \sum_{i=m+1}^l g_i(\mathbf{x})^2$$

# Büntetőfüggvény: példa

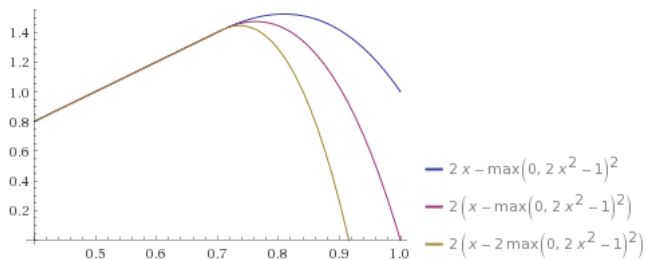
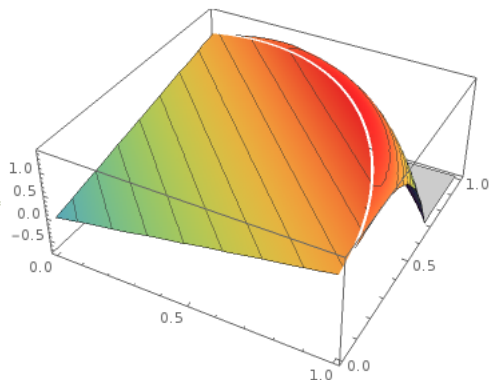
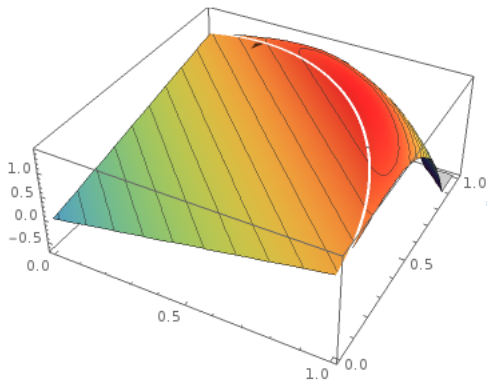
**Példa.**  $\max x + y$  ha  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$P_\rho = x + y + \rho \max\{0, x^2 + y^2 - 1\}^2$$





# Büntetőfüggvény: példa

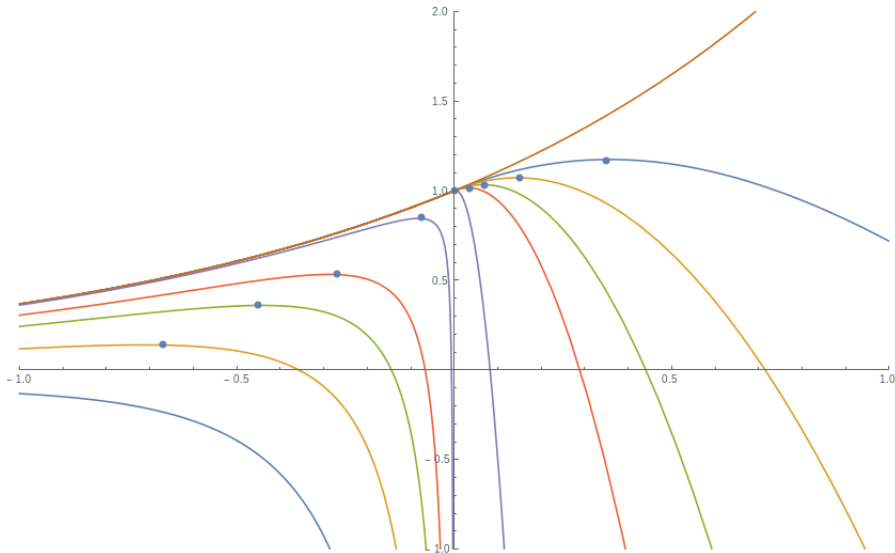


# Büntetőfüggvény

- Nem tudjuk előre, mekkora  $\rho$  fog kelleni
- $\rho < 0$ , ha  $|\rho|$  túl nagy, a feladat rosszul kondicionált
- Csökkentsük fokozatosan  $\rho$  értékét
- A keresést mindig az előző megoldásból indítsuk
- Ha konvergál a függvényérték, megállunk
- Van olyan feladat amire **csak nem megengedett megoldást ad** (ld. következő ábra)

# Barrier vs büntetőfüggvény – ábra

**Példa.**  $\max e^x$  f.h.  $x \leq 0$



# Korlátozófüggvény vs büntetőfüggvény – ábra

Korlátozó függvények

Büntető függvények

